

Problema 1 Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

1. Resuélvase el sistema (1).
2. Obténgase la solución de (1) si $x(0) = y(0) = z(0) = u(0) = 0$.

Considérese ahora $X(t)$ e $Y(t)$ vectores columnas con n componentes y A , B matrices cuadradas constantes de tamaño $n \times n$.

3. Supóngase que $X(t) = e^{\lambda t}v$ e $Y(t) = e^{\mu t}v$ cumplen $X' = AY$, $Y' = BX$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y v es un vector constante no nulo columna de \mathbb{R}^n . Pruébese que λ es un valor propio de A . ¿Qué relación hay para B y μ ? ¿Ayuda esto para resolver el apartado 1?

PUNTUACIÓN: 1 = 7 puntos, 2 = 1 punto, 3 = 2 puntos.

Problema 2 Considérese la ecuación

$$y'' + ky' + 4y = 0. \quad (2)$$

1. Calcúlese el valor de k para que la ecuación (2) tenga un sistema fundamental de soluciones (una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea) formado por las funciones

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = xe^{2x},$$

y resuélvase, para este valor de k , la ecuación diferencial

$$y'' + ky' + 4y = \frac{e^{2x}}{x+1}.$$

2. Resuélvase el problema formado por la ecuación (2) para $k = 0$ con las condiciones de frontera

$$y'(0) = 1, \quad y(2) = 3,$$

usando discretización con diferencias finitas en 4 subintervalos de la misma longitud. Resuélvase dicho problema de forma exacta y compárense los resultados.

3. Para un valor concreto de k la ecuación (2) tiene como solución $y_1(x) = xe^{-2x}$. Obténgase otra solución de (2) independiente de y_1 por el método de reducción del orden.

PUNTUACIÓN: 1 = 4 puntos, 2 = 4 puntos, 3 = 2 puntos.

Solución esquemática.

Problema 1

1. Los valores propios de la matriz del sistema son $\lambda = \pm 1$ (doble cada uno de ellos). Los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ son $L\{(1, 0, 1, 0)\}$ y los asociados a $\lambda = -1$ son $L\{(1, 0, -1, 0)\}$. Como $m.a.(\pm 1) \neq m.g.(\pm 1)$, entonces la matriz del sistema no es diagonalizable y hay que acudir a la forma de Jordan.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = SJS^{-1}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego, si v_1, v_2, v_3, v_4 son las cuatro columnas de S , entonces

$$Y_1 = e^t v_1, \quad Y_2 = e^t v_2 + te^t v_1, \quad Y_3 = e^{-t} v_3, \quad Y_4 = e^{-t} v_4 + te^{-t} v_3$$

son 4 soluciones independientes del homogéneo. Luego la solución general del homogéneo es

$$Y_h = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Para la particular conjeturo $Y_p = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}e^{2t}$, donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^4$. Como el sistema no homogéneo se escribe $Y' = MY + \vec{u}t + \vec{v}e^{2t}$, donde \vec{u} es el traspuesto de $(1, 0, 0, 0)$ y \vec{v} es el traspuesto de $(0, 0, 1, 0)$, al substituir Y_p en la no homogénea, obtenemos

$$\vec{b} + 2\vec{c}e^{2t} = M(\vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}e^{2t}) + \vec{u}t + \vec{v}e^{2t}.$$

Igualando coeficientes

$$\vec{b} = M\vec{a}, \quad \vec{0} = M\vec{b} + \vec{u}, \quad 2\vec{c} = M\vec{c} + \vec{v}.$$

Como \vec{u}, \vec{v} son conocidos, podemos resolver los sistemas anteriores obteniendo

$$\vec{a} = (-1, 0, 0, 0)^t, \quad \vec{b} = (0, 0, -1, 0)^t, \quad \vec{c} = (1/3, 0, 2/3, 0)^t.$$

La solución general es la solución general de la homogénea más una particular.

2. Al substituir en la solución general la condición inicial $x(0) = y(0) = z(0) = u(0) = 0$ tenemos un sistema 4×4 donde las incógnitas son C_1, \dots, C_4 . Tras resolverlo tenemos $C_1 = C_2 = C_4 = 0, C_3 = 2/3$.
3. Como $X(t) = e^{\lambda t}v$ e $Y(t) = e^{\mu t}v$ cumplen $X' = AY, Y' = BX$, al substituir tenemos $\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\mu t}v$ y $\mu e^{\mu t}v = Be^{\lambda t}v$. Al hacer $t = 0$ tenemos $\lambda v = Av$ y $\mu v = Bv$. Es decir λ es un valor propio de A y μ es un valor propio de B .

Partiendo las matrices por bloques de esta manera:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}' = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} O & A \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Tenemos $X' = AY, Y' = AX$. El único valor propio de A es $\lambda = 1$ con vector propio $(1, 0)$. Este apartado sólo dice que $e^t(1, 0, 1, 0)$ es solución del homogéneo. Luego este apartado ayuda a encontrar una solución del homogéneo, pero no las 4 que posee.

Problema 2

1. Como e^{2x} y xe^{2x} son soluciones de $y'' + ky' + 4 = 0$ entonces $\lambda = 2$ es una raíz doble de $\lambda^2 + k\lambda + 4$. Luego $k = -4$.

Se resuelve la no homogénea por variación de parámetros: Sea $Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}$.

Una particular de la no homogénea es $Y_p = M(x) \int M^{-1}(x)B(x) dx$, donde

$$M(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x}/(x+1) \end{bmatrix}.$$

Ahora se puede hallar Y_p y entonces una solución particular de la no homogénea, sea y_p , es la primera componente de Y_p . Por tanto la solución general de la ecuación no homogénea es la general de la homogénea más una particular. Es decir la solución es $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + y_p(x)$, para c_1, c_2 constantes reales.

2. El polinomio característico de $y'' + 4y = 0$ es $\lambda^2 + 4 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = \pm 2i$. Luego la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x). \quad (3)$$

Al substituir las condiciones de frontera tenemos el siguiente sistema lineal 2×2 (las incógnitas son c_1 y c_2)

$$\begin{aligned} 3 &= y(2) = c_1 \cos(4) + c_2 \sin(4) \\ 1 &= y'(0) = 2c_2. \end{aligned}$$

Que se resuelve y los valores de c_1 y c_2 se substituyen en (3).

Resolvamos el problema de forma aproximada por diferencias finitas. Se tiene $h = 1/2$. Sean $y_0 \simeq y(0)$, $y_1 \simeq y(1/2)$, $y_2 \simeq y(1)$, $y_3 \simeq y(3/2)$, $y_4 \simeq y(2)$. El planteamiento del sistema es

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = 1, \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 4y_1 = 0, \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + 4y_2 = 0, \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + 4y_3 = 0, y_4 = 3.$$

Que se puede resolver. Para efectuar la comparación basta estudiar $|y(x_i) - y_i|$ para $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1/2, 1, 3/2, 2)$, donde $y(x)$ es la solución exacta obtenida previamente.

3. Sea $s(x) = xe^{-2x}$. Conjeturamos como solución $y = u \cdot s$, donde u es una función que hay que hallar. Entonces, como $y' = s'u + us'$, $y'' = s''u + 2s'u' + su''$, al substituir en la ecuación homogénea se tiene

$$0 = \underline{s''u} + 2s'u' + su'' + \underline{ks'u} + \underline{ksu'} + \underline{4su} = 2s'u' + su'' + ksu', \quad (4)$$

puesto que $s''u + ks'u + 4su = (s'' + ks' + 4s)u = 0$ ya que s satisface la ecuación homogénea. Hacemos el cambio $v' = u$ en (4) y tenemos $0 = (2s' + ks)v + sv'$. Esta es una ecuación separable:

$$\frac{v'}{v} = -2\frac{s'}{s} - k \Rightarrow \log v = -2\log s - kx \Rightarrow v = \frac{1}{e^{-kx}s^2} = \frac{1}{x^2e^{(4-k)x}}.$$

Como xe^{-2x} cumple $y'' + ky' + y = 0$ entonces $k = 4$, luego $v = 1/x^2$. Y como $u' = v$ entonces $u = -1/x$. Por tanto otra solución independiente de y_1 es $u \cdot s = -e^{-2x}$.