

E.T.S.I. TELECOMUNICACION

ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen ordinario de Junio de 1999.

PROBLEMA 1.

Considere el problema diferencial siguiente:

$$-u'' + 2u' - 2u = 2, \quad u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- ¿Qué letra utilizaría para la variable independiente? ¿Por qué?
- Resuelva el problema de forma analítica.
- Resuélvalo por diferencias finitas utilizando 3 puntos interiores además de los extremos del intervalo.
- Resuélvalo por el método de colocación utilizando $\pi/8$, $\pi/4$ y $3\pi/8$ como puntos de colocación y como funciones de prueba las generadas por las funciones $\sin 2x$, $\sin 4x$ y $\sin 6x$.
- Compare los resultados obtenidos.

Puntuación: a) 1p; b) 3p; c) 2p; d) 3p; e) 1p.

PROBLEMA 2.

Sea A una matriz cuadrada real. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden: $Y'' = AY$.

- Si λ es un valor propio real no nulo de A con vector propio asociado v , halle dos soluciones independientes del sistema $Y'' = AY$. Distinga los casos λ positivo y negativo.
- Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Transfórmelo en uno de orden 1 equivalente.

- Resuelva el sistema homogéneo asociado.
- Halle una solución particular del sistema completo.
- Obtenga la solución que verifica $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

Puntuación: a) 2p; b) 2p; c) 3p; d) 2p; e) 1p.

Solución Examen Ecuaciones Diferenciales

Junio de 1999

E.T.S.I. Telecomunicación

Problema 1.

- a. La letra x por tratarse de un problema de tipo "espacial".
- b. El polinomio característico es $-\lambda^2 + 2\lambda - 2$, cuyas raíces son $\lambda = -1 \pm i$. Una solución compleja es $e^{-(1+i)x} = e^{-x} \cos x - ie^{-x} \sin x$. La parte real e imaginaria proporcionan un sistema fundamental de soluciones. La solución general de la homogénea es:

$$u_h(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para la particular conjeturamos $u_p(x) = A$. Forzando que u_p satisfaga la ecuación diferencial no homogénea obtenemos $u_p(x) = -1$. Luego la solución general de la ecuación es

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Forzamos que $u(x)$ satisfaga las condiciones en la frontera:

$$0 = u(0) = C_1 - 1, \quad 0 = u(\pi/2) = e^{-\pi/2}C_2 - 1.$$

Obtenemos $C_1 = 1$, $C_2 = e^{\pi/2}$. Luego la solución analítica es:

$$u(x) = e^{-x}(\cos x + e^{\pi/2} \sin x) - 1.$$

- c. Llamamos $u_k = u(k\pi/8)$, $k = 1, \dots, 4$. $h = \pi/8$. Usamos las fórmulas:

$$u''(k\frac{\pi}{8}) \simeq \frac{u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k}{h^2}, \quad u'(k\frac{\pi}{8}) \simeq \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}.$$

Usando la ecuación diferencial:

$$-\left[\frac{u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k}{h^2}\right] + 2\left[\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right] - 2u_k = 2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Teniendo en cuenta que $u_0 = u_4 = 0$, obtenemos el siguiente sistema 3×3 :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} - 2 & \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} & 0 \\ -\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} - 2 & \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \\ 0 & -\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- d. Se conjetura como solución aproximada $u(x) = \alpha \sin 2x + \beta \sin 4x + \gamma \sin 6x$. Calculamos el residuo de esta función:

$$\begin{aligned} R(x) &= -u'' + 2u' - 2u - 2 = \\ &= a(4 \cos 2x + 2 \sin 2x) + b(8 \cos 4x + 14 \sin 4x) + c(12 \cos 6x + 34 \sin 6x) - 2. \end{aligned}$$

Forzamos que el residuo sea 0 en los puntos elegidos:

$$0 = R(\pi/8) = 3\sqrt{2}a + 14b + 11\sqrt{2}c - 2.$$

$$0 = R(\pi/4) = 2a - 8b - 34c - 2.$$

$$0 = R(3\pi/8) = -\sqrt{2}a - 14b + 23\sqrt{2}c - 2.$$

Obtenemos un sistema 3×3 que se resuelve fácilmente.

Problema 2.

- a. Primero transformemos el sistema en uno de primer orden: Llamamos $Z_1 = Y$, $Z_2 = Y'$. Entonces

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$

Intentemos hallar los valores y vectores propios de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_2 &= \mu u_1 \\ Au_1 &= \mu u_2 \end{aligned} \right\} Au_1 = \mu^2 u_1.$$

Como v es un vector propio asociado al valor propio λ de la matriz A , concluimos que $\pm\sqrt{\lambda}$ son valores propios de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ con vectores propios correspondientes, respectivamente a

$\begin{pmatrix} v \\ \pm\sqrt{\lambda}v \end{pmatrix}$. Entonces

$$e^{\sqrt{\lambda}t} \begin{pmatrix} v \\ \sqrt{\lambda}v \end{pmatrix}, \quad e^{-\sqrt{\lambda}t} \begin{pmatrix} v \\ -\sqrt{\lambda}v \end{pmatrix}$$

son dos soluciones (del problema de primer orden). Del problema original simplemente nos quedamos con las primeras coordenadas: $e^{\sqrt{\lambda}t}v$, $e^{-\sqrt{\lambda}t}v$ son dos soluciones independientes.

Si $\lambda < 0$, entonces $\lambda = -\omega^2$ para cierto ω , entonces

$$e^{\sqrt{\lambda}t} = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t).$$

Ya que v es un vector real, dos soluciones reales independientes son $v \cos(\omega t)$ y $v \sin(\omega t)$.

- b. Introducimos las variables $u = x'$, $v = y'$. Tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

c. Veamos si la matriz A de orden 4 del sistema es diagonalizable:

$$\det(A - \lambda I) = \dots = (\lambda^2 - 4)^2.$$

Los valores propios son $\lambda = \pm 2$ (con multiplicidad algebraica 2). Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a = c, 2b = d, a = b.$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = 2$ son $L\{(1, 1, 2, 2)\}$. La matriz A ya no es diagonalizable, ya que $m.a.(2) \neq m.g.(2)$. Ahora calculemos los vectores propios asociados a $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a = -c, 2b = -d, a = b.$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = -2$ son $L\{(1, 1, -2, -2)\}$. Calculemos la forma canónica de Jordan de A : Como ambos valores propios tienen multiplicidad geométrica simple, la única forma canónica de Jordan posible (salvo el orden de los bloques) es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sea $S = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ invertible con $AS = SJ$. Entonces se tiene

$$Av_1 = 2v_1, \quad Av_2 = 2v_2 + v_1, \quad Av_3 = -2v_3, \quad Av_4 = -2v_4 + v_3.$$

$\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son dos cadenas de Jordan asociadas respectivamente a los valores propios 2 y -2. Además v_1 es un vector propio asociado a 2 y v_3 es un vector propio asociado a -2; por lo que $v_1 = \alpha(1, 1, 2, 2)$; $v_3 = \beta(1, 1, -2, -2)$. Calculemos $v_2 = (a, b, c, d)^t$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a + c = \alpha \\ -2b + d = \alpha \\ a - b = 4\alpha \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado para todo α . Tomamos $\alpha = 1$. Una solución es $a = 4, b = 0, c = 9, d = 1$. De la misma manera obtenemos una solución para v_4 ; por ejemplo, $v_4 = (0, 4, 1, -7)$. Por tanto las cuatro funciones siguientes forman base del conjunto de soluciones:

$$Y_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + te^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para dar la solución del sistema original, sólo nos quedamos con las dos primeras coordenadas:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 (4e^{2t} + te^{2t}) + C_3 e^{-2t} + C_4 te^{-2t}, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t} + C_3 e^{-2t} + C_4 (4e^{-2t} + te^{-2t}), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

- d. Conjeturamos $Y_p(t) = u + tv + e^t w$, donde u, v, w son vectores de \mathbb{R}^4 que hay que determinar. Forzamos que Y_p satisfaga el sistema no homogéneo:

$$v + e^t w = Au + tAv + e^t Aw + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Igualemos términos semejantes:

$$v = Au, \quad 0 = Av + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = Aw + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Son tres sistemas compatibles determinados, cuyas soluciones respectivas son

$$v = \begin{pmatrix} -3/16 \\ 1/16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/16 \\ 1/16 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -4/9 \\ -1/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}.$$

Por tanto una solución particular del sistema no homogéneo es

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/16 \\ 1/16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/16 \\ 1/16 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -1/9 \\ -4/9 \\ -1/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}.$$

De nuevo nos quedamos con las dos primeras coordenadas:

$$x_p(t) = -\frac{3}{16}t - \frac{1}{9}e^t, \quad y_p(t) = \frac{1}{16}t - \frac{4}{9}e^t.$$

- e. $Y(t) = Y_p(t) + Y_h(t)$ (particular + homogénea) es la solución del problema de orden 1 asociado. Como $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$, se tiene $Y(0) = (0, 0, 0, 0)^t$. Luego:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/16 \\ 1/16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/9 \\ -4/9 \\ -1/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema se obtienen los valores de las constantes $C_i, i = 1, \dots, 4$.