

Examen de Ecuaciones Diferenciales. ETSIT. Septiembre 2004

PROBLEMA 1

Una cuenta está restringida a resbalar sin fricción a lo largo de una varilla rígida recta de longitud $2L$. La varilla gira en el plano vertical con velocidad angular constante $\omega > 0$ en torno a un punto fijo P en la mitad de la varilla; pero el diseño permite que la cuenta se deslice por toda la varilla. Sea $r(t)$ la distancia (con signo) de la cuenta a P . La ecuación diferencial que satisface $r(t)$ es

$$r'' = \omega^2 r - g \sin(\omega t). \quad (1)$$

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada a (1).
2. Halle una solución particular de (1).
3. Halle $r(t)$ sabiendo que cumple (1) y que inicialmente está en la posición r_0 y tiene velocidad inicial v_0 (es decir, $r(0) = r_0$; $r'(0) = v_0$). Determine r_0 y v_0 para que la cuenta tenga un movimiento armónico simple (es decir, que $r(t)$ sea una oscilación pura). Halle una condición suficiente sobre r_0 y v_0 para que la cuenta salga disparada de la varilla.
4. En este apartado se investigará de forma numérica en qué tiempo T la cuenta sale de la varilla suponiendo que $r(0) = 0$. En este apartado tome $\omega = 3$; $L = 1$ y $g = 9.8$. Para ello se plantea el problema de contorno

$$r'' = 9r - 9.8 \sin(3t).$$

$$r(0) = 0, \quad r(T) = 1.$$

Mediante diferencias finitas exprese $r(T/3)$ y $r(2T/3)$ en función de T . A continuación aproxime $v_0 = v'(0) = r'(0)$ mediante una diferencia finita para encontrar una ecuación numérica que debe cumplir T .

5. Este apartado ofrece otro enfoque para resolver la ecuación diferencial (1). Sea $s(t)$ una función que cumple $s'' = \omega^2 s$ (que debe hallar). Mediante el cambio de variables $r(t) = u(t)s(t)$ transforme (1) en una ecuación diferencial de primer orden que deberá identificar y resolver. Ayuda: para este ejercicio necesitará el valor de las siguientes integrales:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C,$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C.$$

Puntuación: Todos los apartados valen 2 puntos.

PROBLEMA 2

El flujo I que recorre una línea de corriente de longitud l está relacionado con el potencial en los extremos 0 y l . Por un lado, una ley constitutiva establece que en el extremo 0 la caída localizada de potencial, $V_0(t)$, es proporcional y de signo contrario a la intensidad local, es decir

$$V_0'(t) = -kI(t), \quad k > 0$$

Por otro lado, una ley de conservación de energía establece que la diferencia de potencial entre los extremos se invierte en pérdidas resistivas, proporcionales al flujo, y en variaciones del flujo, proporcionales a su derivada, es decir,

$$V_L(t) - V_0(t) = aI(t) + bI'(t), \quad a \geq 0, b > 0$$

siendo $V_L(t)$ el potencial en el extremo l , que puede ser variado libremente.

- a) ¿En ausencia de forzamiento ($V_L(t) = 0$), ¿qué relación debe haber entre a , b y k para que tanto I como V_0 tengan carácter oscilatorio?
- b) ¿Qué más debe cumplirse para que la solución sea periódica? Escriba la solución.
- c) Resuelva el problema para los valores $a = 2.5$, $b = 100$ y $k = 0.05$, siendo la condición inicial $V_0(0) = 0$, $I(0) = 0$ y el forzamiento $V_L(t) = 1$.
- d) Utilice los mismos valores pero con forzamiento periódico $V_L(t) = 0.001 \sin \omega t$ y obtenga la solución estacionaria.
- e) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia? ¿Cuánto vale la amplitud de la oscilación en resonancia? ¿Cuál es la relación entre las amplitudes de resonancia y forzamiento?

Puntuación: 2,2,2,2,2.

PROBLEMA 1

Un dispositivo semiconductor de placas paralelas separadas por un determinado material dieléctrico genera calor entre las placas. Dicho calor, de resultar excesivo, puede deteriorar el dispositivo y, por tanto, inutilizarlo. Se quiere tener una estimación de la temperatura entre las placas. Para investigar el problema se simplifica considerando un modelo unidimensional (despreciando los efectos en los bordes del dispositivo). La ecuación que verifica la temperatura u entre las placas responde a la clásica ecuación del calor y resulta ser

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q \text{ en }]-L, L[$$

donde ρ es la densidad, c el calor específico y k la conductividad térmica del material dieléctrico entre las placas y Q es un término de fuentes volumétricas de calor, siendo $2L$ la distancia entre las placas. Si se considera el problema estacionario y se utiliza para Q la denominada ley de Arrhenius, el problema se escribe

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma e^u = 0 \text{ en }]-L, L[$$

donde γ es un parámetro que se determina de manera experimental. Por las características del problema se sabe que la temperatura alcanza su valor máximo en el punto medio entre las placas, disminuyendo de manera simétrica hacia las placas. Así, el problema se puede reducir a la mitad de su dominio, considerando derivada nula en el punto medio. Por otra parte se considera, por simplicidad, temperatura nula en las placas. Al adimensionalizar, finalmente se tiene el problema de contorno

$$u'' + a e^u = 0 \text{ en }]0, 1[, u'(0) = 0, u(1) = 0.$$

donde $a = \gamma/k$. Este es, claramente, un problema no lineal. Una forma de resolverlo de manera aproximada es mediante linealización. Para linealizarlo se utiliza la aproximación de Taylor de orden uno de la exponencial ($e^u \approx 1 + u$).

- Resuelva el problema linealizado según el signo del parámetro a .
- ¿En qué caso se obtiene una solución coherente en el sentido de que es decreciente en las proximidades de $x = 0$?
- Resuelva el problema linealizado por diferencias finitas para $a = 2$, tomando como norma de la partición $h = 0.25$.
- Compare con la solución correspondiente obtenida en el apartado a).
- Observe que el problema sin linealizar, aun siendo de segundo orden puede ser reducido a uno de primer orden ya que falta la variable independiente. Resuélvalo de esta manera, hasta donde le sea posible.

Puntuación: a) 3p; b) 1p; c) 3p; d) 1p; e) 2p.

PROBLEMA 2

En este problema se estudia el efecto de un terremoto sobre un edificio de dos pisos. Supondremos que el piso i tiene masa m_i y que están unidos por un conector cuya acción se parece a un muelle (normalmente, los elementos estructurales de un edificio son de acero, que es un material muy elástico). Se puede demostrar que si $x_i(t)$ es el desplazamiento horizontal del piso i , entonces se tiene

$$m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) + F_e \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' = -k_1(x_2 - x_1),$$

donde k_0 es la constante de proporcionalidad de la fuerza de restitución entre el primer piso y el suelo, k_1 es la constante de proporcionalidad de la fuerza de restitución entre los dos suelos. Se supone que la fuerza externa del terremoto, cuya amplitud es F_e , actúa sólo sobre el primer piso y es de tipo oscilatorio (un terremoto suele durar entre 2 y 3 segundos, por lo que si $T = 2\pi/\omega$ es la duración, entonces normalmente $2 < T < 3$). Se supone en lo sucesivo que todas las constantes físicas que aparecen son estrictamente positivas.

1) Transforme el sistema en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}$, donde \mathbf{Y} , \mathbf{F} son vectores de funciones y \mathbf{A} es una matriz cuadrada de orden necesario.

2) En este apartado tome $k_0 = 6$, $k_1 = 4$, $m_1 = m_2 = 1$, $\omega = 3$, $F_e = 21$.

- 2.a) Resuelva el sistema homogéneo asociado.
- 2.b) Halle una solución particular del sistema no homogéneo.
- 2.c) Resuelva el sistema completo cuando $x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$.

3) En este apartado se enfocará otra manera de resolver el sistema (1). Tome $F_e = 0$, $m_1 = m_2 = 1$ y k_1, k_2 constantes arbitrarias positivas. Este sistema se puede escribir de la forma $\mathbf{X}'' = \mathbf{B}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ y \mathbf{B} es una matriz cuadrada apropiada de orden adecuado que se debe hallar. Debido a la naturaleza física del problema, se puede argumentar que $\mathbf{X}(t) = \mathbf{u} \cos(\sigma t)$, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{v} \sin(\sigma t)$, son dos soluciones de $\mathbf{X}'' = \mathbf{B}\mathbf{X}$, con \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores del tamaño adecuado y σ un número real positivo.

- 3.a) Pruebe que $(\mathbf{B} + \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{B} + \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- 3.b) Halle los valores de σ en términos de k_1 y k_2 . (Si ω es cercano a σ se puede demostrar que el edificio sufre grandes daños en un terremoto, por lo que es interesante hallar estos valores de σ).

Puntuación: 1) 1p; 2.a) 3p; 2.b) 3p; 2.c) 1p; 3.a) 1p; 3.b) 1p.