

E.T.S.I. TELECOMUNICACION

ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen ordinario Junio de 2006.

PROBLEMA 1.

Aunque, cada día más, los sistemas de comunicaciones de señales son inalámbricos, todavía algunos necesitan de cables que, con cierta frecuencia, necesitan ser suspendidos en el aire. Cada tirada de un tal cable está sujeta entre dos puntos y la forma que adopta responde a un equilibrio entre la carga distribuida (normalmente, el peso del propio cable) y la fuerza horizontal que ejercen los extremos para tratar de mantenerlo tenso y horizontal. No obstante, salvo en los extremos donde la posición es fija, los demás puntos del cable experimentan un desplazamiento vertical que, de manera simplificada y tras adimensionalizar, puede venir dado por el siguiente problema de contorno:

$$u'' = p(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Donde $u(x)$ es el desplazamiento vertical y $p(x)$ es el ratio entre la carga distribuida y la fuerza horizontal ejercida por los extremos. En este problema consideraremos $p(x) = x(x-1)$.

- Obtenga la solución analítica del problema.
- Resuelva el problema mediante diferencias finitas utilizando una partición del intervalo $[0,1]$ con 4 puntos interiores equiespaciados, es decir, con norma de la partición $h = 0.2$.

En los apartados siguientes va a utilizar los métodos de colocación y ponderación. Para ello, como funciones de prueba (candidatas a ser la solución) utilice las funciones de la forma

$$u(x) = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 3\pi x.$$

- Calcule el residuo, $Ru(x) = u''(x) - p(x)$, para tales funciones.
- Utilice el método de colocación utilizando como puntos de colocación $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.
- Utilice el método de ponderación utilizando como funciones test las funciones características en los intervalos $[0,1]$ y $[1/3,2/3]$. (Nota la función característica en un intervalo $[a,b]$ toma el valor 1 entre a y b y el valor cero fuera del intervalo).
- Compare las cuatro soluciones obtenidas.

Puntuación: 2 puntos cada apartado salvo el f). El apartado f) tiene un punto extra.

PROBLEMA 2.

La ecuación clásica del movimiento de una partícula de carga q y de masa m en un campo magnético \mathbf{B} es

$$m \mathbf{v}' = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

donde c es una constante positiva y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ es la velocidad vectorial de la partícula. En todo este problema se supondrá que \mathbf{B} es constante, y tras girar los ejes de coordenadas de manera adecuada, se puede suponer que $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, donde $B > 0$.

a) Deduzca que

$$\begin{cases} v_x' = Kv_y \\ v_y' = -Kv_x \\ v_z' = 0 \end{cases}$$

en donde $K = qB / mc$ y $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$.

- b) Expresa el sistema planteado en a) de forma matricial y resuelva este sistema.
 c) ¿Qué debe cumplir $\mathbf{v}(0)$ para que la trayectoria sea perpendicular a \mathbf{B} ? O preguntado de otro modo, ¿qué debe cumplir $\mathbf{v}(0)$ para que $\mathbf{v}(t)$ sea perpendicular a \mathbf{B} para todo t ?
 d) Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula, entonces $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$. Halle $\mathbf{r}(t)$.
 e) Si además consideramos un campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ y la gravedad terrestre, entonces se debe modificar la primera ecuación del modo siguiente

$$m \mathbf{v}' = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) + m \mathbf{g},$$

donde \mathbf{g} es el vector constante de la aceleración terrestre. Es importante la situación en la que \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales. En tal caso, girando los ejes coordenados se puede suponer que $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ y que $\mathbf{E}(t) = (E(t), 0, 0)$, donde $E(t)$ es un campo escalar. Si además $E(t) = \cos(\omega t)$ para $\omega > 0$ y $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$, deduzca que

$$\begin{cases} v_x' = Kv_y + \cos(\omega t) + g_x \\ v_y' = -Kv_x + g_y \\ v_z' = g_z \end{cases}$$

Resuelva este sistema para $\omega \neq K$. ¿Qué ocurre si $\omega \rightarrow K$? [Nota: observe que el vector \mathbf{g} no tiene por qué ser de la forma $(0, 0, g)$, pues se ha girado el sistema de coordenadas].

Puntuación: a) 1, b) 2, c) 2, d) 2, e) 3