

Examen de Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales
8 de Septiembre de 1998
E.T.S.I. Telecomunicación

Considere la aplicación lineal $\Phi_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ dada por $\Phi(p(x)) = p(ax+b)$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. [Así, por ejemplo, se tiene $\Phi_n(x^2 + 2x + 3) = (ax + b)^2 + 2(ax + b) + 3$].

1. Halle la matriz de Φ_n en las bases canónicas.
2. ¿Para qué valores de a, b , Φ_n es biyectiva?
3. Para estos valores halle la inversa de la matriz de Φ_2 hallada en el primer apartado por el método de Gauss-Jordan indicando claramente las operaciones elementales.
4. Encuentre los valores propios de Φ_n . Halle los vectores propios de Φ_n cuando $a = 0$ y $a = 1$ (tome en este apartado $b \neq 0$).
5. Considere el producto escalar $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$. ¿Cuánto deben valer a, b para que $\langle p, q \rangle$ sea el producto escalar ordinario (salvo un múltiplo escalar) en $([-1, 1])$ de $\Phi(p), \Phi(q)$?
6. Utilice el apartado anterior para encontrar una aproximación de e^x en \mathcal{P}_2 sobre el intervalo $[2, 4]$, sabiendo que los polinomios de Legendre $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ forman una base ortogonal de \mathcal{P}_2 con el producto escalar ordinario en $([-1, 1])$.

Puntuación 2, 1, 1, 2, 2, 2

1. Se tiene

$$\Phi_n(1) = 1, \quad \Phi_n(x) = ax + b, \quad \Phi_n(x^2) = a^2x^2 + 2ax + b^2, \dots$$

Luego la matriz de Φ_n en las bases canónicas es (recuerde el binomio de Newton)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 & \dots & b^n \\ 0 & a & 2ab & 3ab^2 & \dots & nab^{n-1} \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2b & \dots & \binom{n}{2} a^2b^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & a^3 & \dots & \binom{n}{3} a^3b^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{pmatrix}$$

2. Φ_n es biyectiva si y solamente si su matriz en cualquier base es invertible. Y una matriz es invertible si y solamente si su determinante no es 0. Se tiene $|A| = a \cdot a^2 \cdots a^n$. Por tanto Φ_n es biyectiva si y solamente si $a \neq 0$.

3. Se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \left| \right. & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2ab & \left| \right. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & \left| \right. & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b^2 & \left| \right. & 1 & -b/a & 0 \\ 0 & a & 2ab & \left| \right. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & \left| \right. & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \left| \right. & 1 & -b/a & b^2/a^2 \\ 0 & a & 0 & \left| \right. & 0 & 1 & -2b/a \\ 0 & 0 & a^2 & \left| \right. & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \left| \right. & 1 & -b/a & b^2/a^2 \\ 0 & 1 & 0 & \left| \right. & 0 & 1/a & -2b/a^2 \\ 0 & 0 & 1 & \left| \right. & 0 & 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones elementales han sido:

1. 1ª fila se cambia por la 1ª $- \frac{b}{a} 2^a$.
2. 1ª fila se cambia por la 1ª $+ \frac{b^2}{a^2} 3^a$.
3. 2ª fila se cambia por la 2ª $- \frac{2ab}{a^2} 3^a$.
4. Dividir la 2ª filas y la 3ª entre a y a^2 respectivamente.

4. Como la matriz de Φ_n es diagonal, los valores propios son los términos de la diagonal: $1, a, a^2, \dots, a^n$.

- Calculemos los vectores propios cuando $a = 0$. En este caso solo hay dos valores propios: $\lambda = 0, \lambda = 1$

Vectores propios asociados a $\lambda = 0$. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un vector propio asociado a 0, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene $a_0 + ba_1 + \dots + b^na_n = 0$, de donde

$$p(x) = (-ba_1 - \dots - b^na_n) + a_1x + \dots + a_nx^n = a_1(x-b) + \dots + a_n(x^n - b^n).$$

Por tanto los vectores propios asociados a 0 son $L\{x-b, \dots, x^n - b^n\}$.

Vectores propios asociados a $\lambda = 1$. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un vector propio asociado a 0, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene $a_1 = \dots = a_n = 0$. Por tanto los vectores propios asociados a 1 son $L\{1\}$.

- Calculemos los vectores propios cuando $a = 1$. En este caso solo hay un valor propio: $\lambda = 1$. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un vector propio asociado, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 0 & 2b & \dots & nb^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por substitución regresiva tenemos $a_n = \dots = a_1 = 0$. De nuevo los vectores propios son las constantes.

5. Tenemos

$$\begin{aligned}\langle p, q \rangle &= \int_2^4 p(x)q(x)dx = \int_{(2-b)/a}^{(4-b)/a} p(at+b)q(at+b)adt = \\ &= a \int_{(2-b)/a}^{(4-b)/a} \Phi(p(t))\Phi(q(t))dt.\end{aligned}$$

Si queremos que la última integral se corresponda con el producto escalar usual en $([-1, 1])$, entonces $(4-b)/a = 1$, $(2-b)/a = -1$. Resolviendo este sistema $b = 3$, $a = 1$

6. Sea $p(x)$ la mejor aproximación en $([2, 4])$ de e^x . Entonces se tiene $\langle p(x) - e^x, x^\alpha \rangle = 0$ para $\alpha = 0, 1, 2$. Por el apartado previo

$$\int_{-1}^1 [\Phi(p(x)) - e^{ax+b}] \Phi(x^\alpha) dx = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (1)$$

($a = 1, b = 3$). Al ser Φ invertible, transforma bases en bases, y por tanto $\{\Phi(1), \Phi(x), \Phi(x^2)\}$ es una base de \mathcal{P}_2 . De (1) se tiene que $\Phi(p(x))$ es la proyección de e^{ax+b} sobre \mathcal{P}_2 usando el producto escalar canónico de $([-1, 1])$. Usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\begin{aligned}\Phi(p(x)) &= \frac{\int_{-1}^1 e^{ax+b} dx}{\int_{-1}^1 dx} + \frac{\int_{-1}^1 x e^{ax+b} dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x + \frac{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3}) e^{ax+b} dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} (x^2 - \frac{1}{3}) = \\ &= \frac{e^4 - e^2}{2} + \frac{2e^2}{2/3} x + \frac{2e^4/3 - 14e^2/3}{8/45} (x^2 - \frac{1}{3}) = \\ &= \frac{3e^2}{4} [5(e^2 - 7)x^2 + 4x + 11 - e^2].\end{aligned}$$

Para hallar $p(x)$, basta aplicar Φ^{-1} , y para ello usamos la inversa hallada en (3):

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{3e^2}{4} \begin{pmatrix} 11 - e^2 \\ 4 \\ 5(e^2 - 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2(11e^2 - 79) \\ \frac{3}{2}e^2(107 - 15e^2) \\ \frac{15}{4}e^2(e^2 - 7) \end{pmatrix},$$

Por tanto

$$p(x) = 3e^2(11e^2 - 79) + \frac{3}{2}e^2(107 - 15e^2)x + \frac{15}{4}e^2(e^2 - 7)x^2.$$