

## E.T.S.I. TELECOMUNICACION

### ECUACIONES DIFERENCIALES

#### Examen extraordinario de Septiembre 2000.

1. El flujo,  $I$ , que recorre una línea de corriente de longitud  $L$ , está relacionado con el potencial variable en los extremos de la línea,  $V_0(t)$  y  $V_L(t)$ . Se sabe que la diferencia de potencial entre los extremos se invierte en pérdidas, proporcionales al flujo, y en variaciones del flujo, proporcionales a su derivada, es decir, verifica la ley

$$V_0(t) - V_L(t) = aI(t) + bI'(t), \quad a \geq 0, b > 0$$

En el extremo  $L$  el potencial,  $V_L(t)$ , puede ser impuesto arbitrariamente. En cambio, en el extremo  $0$  la caída localizada de potencial es proporcional y de signo contrario a la intensidad local, es decir, se tiene que

$$V_0'(t) = -kI(t), \quad k > 0$$

- ¿En ausencia de forzamiento ( $V_L(t) = 0$ ), ¿qué relación debe haber entre  $a$ ,  $b$  y  $k$  para que tanto  $I$  como  $V_0$  tengan carácter oscilatorio?
- ¿Qué más debe cumplirse para que la solución sea periódica? Escriba la solución.
- Resuelva el problema para los valores  $a = 2.5$ ,  $b = 100$  y  $k = 0.05$ , siendo la condición inicial  $V_0(0) = 0$ ,  $I(0) = 0$  y el forzamiento  $V_L(t) = 1$ .
- Utilice los mismos valores pero con forzamiento periódico  $V_L(t) = 0.001 \sin \omega t$  y obtenga la solución estacionaria.
- ¿Cuál es la frecuencia de resonancia? ¿Cuánto vale la amplitud de la oscilación en resonancia? ¿Cuál es la relación entre las amplitudes de resonancia y forzamiento?

Puntuación: 2,2,2,2,2.

- 
2. Dos partículas con idéntica carga están situadas en los puntos del plano  $F_1 = (-a, 0)$  y  $F_2 = (a, 0)$ , con  $a > 0$ . La ecuación de la familia de líneas equipotenciales es

$$1/d(X, F_1) + 1/d(X, F_2) = C,$$

donde  $C$  es una constante arbitraria,  $X = (x, y)$  y  $d(A, B)$  denota la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$ .

- Pruebe que la ecuación diferencial de las líneas equipotenciales es  $(yy' + x)S + aD = 0$ , denotando  $S = d(X, F_1)^3 + d(X, F_2)^3$  y  $D = d(X, F_2)^3 - d(X, F_1)^3$ .
- ¿Es exacta la ecuación diferencial planteada en el apartado previo?
- Calcule la dirección de la trayectoria de una partícula situada en un punto  $(x, 0)$  para  $x > a$ . (Ayuda: En este apartado no intente resolver la ecuación diferencial).
- Para partículas suficientemente alejadas de los puntos  $F_1$  y  $F_2$  se puede suponer que  $a$  es despreciable frente a las otras variables. La ecuación diferencial planteada en el primer apartado se puede escribir (ya que  $S \neq 0$ ) como  $yy' + x = 0$ . Resuelva esta ecuación diferencial y asimismo halle las trayectorias ortogonales. Interprete geoméricamente y físicamente este resultado.

Puntuación: 2,3,2,3.