

Problema 1. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + G(t), \quad (1)$$

donde a, b, c y d son constantes reales y $G(t)$ es una función vectorial 2×1 y considérese la ecuación siguiente, llamada *ecuación secular asociada del sistema*:

$$u''(t) - (a + d)u'(t) + (ad - bc)u(t) = 0.$$

1. Pruébese que toda componente de una solución del sistema homogéneo asociado a (1) es solución de su ecuación secular.
2. Si $u(t)$ es una solución de la ecuación secular, pruébese que si $b \neq 0$ entonces

$$x(t) = bu(t) \quad \text{junto con} \quad y(t) = u'(t) - au(t)$$

es solución del sistema homogéneo asociado a (1).

3. Usando el apartado 2. resuélvase el sistema homogéneo asociado a (1) siendo $a = 0$, $b = -4$, $c = 1$ y $d = 0$.
4. Resuélvase el mismo sistema homogéneo del apartado anterior usando teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
5. Resuélvase el sistema (1) con los valores de las constantes dadas en el apartado 3. siendo

$$G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Puntuación. 1) 1'5; 2) 2; 3) 1'5 ; 4) 2'5; 5) 2'5.

Problema 2. Para cada n natural, la ecuación diferencial

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n + 1)y = 0 \quad (2)$$

tiene una solución polinómica P_n de grado n , que se puede determinar completamente si se exige que éste cumpla la condición $P_n(1) = 1$.

1. Calcúlense P_1 y P_2 .
2. Resuélvase la ecuación no homogénea $(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = t^2$, sabiendo que tiene una solución particular que es un polinomio de grado 2.
3. En este apartado se pretende estudiar la ecuación (2) en los puntos de inflexión. Para ello se desprecia el término y'' . Resuélvase por tanto la ecuación $-2ty' + n(n + 1)y = 0$.
4. Considérese en este apartado el problema de contorno

$$\begin{aligned} (1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n + 1)y &= 0, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

Usando los puntos $t = 0$ y $t = 1$, y los polinomios de grado menor o igual que 3 que cumplan las condiciones de contorno, plantéese el sistema necesario para hallar la solución aproximada por el método colocación.

Puntuación. 1) 2'5; 2) 3; 3) 2; 4) 2'5.