

Examen de Ecuaciones Diferenciales. ETSIT. Septiembre 2004

PROBLEMA 1

Una cuenta está restringida a resbalar sin fricción a lo largo de una varilla rígida recta de longitud $2L$. La varilla gira en el plano vertical con velocidad angular constante $\omega > 0$ en torno a un punto fijo P en la mitad de la varilla; pero el diseño permite que la cuenta se deslice por toda la varilla. Sea $r(t)$ la distancia (con signo) de la cuenta a P . La ecuación diferencial que satisface $r(t)$ es

$$r'' = \omega^2 r - g \sin(\omega t). \quad (1)$$

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada a (1).
2. Halle una solución particular de (1).
3. Halle $r(t)$ sabiendo que cumple (1) y que inicialmente está en la posición r_0 y tiene velocidad inicial v_0 (es decir, $r(0) = r_0$; $r'(0) = v_0$). Determine r_0 y v_0 para que la cuenta tenga un movimiento armónico simple (es decir, que $r(t)$ sea una oscilación pura). Halle una condición suficiente sobre r_0 y v_0 para que la cuenta salga disparada de la varilla.
4. En este apartado se investigará de forma numérica en qué tiempo T la cuenta sale de la varilla suponiendo que $r(0) = 0$. En este apartado tome $\omega = 3$; $L = 1$ y $g = 9.8$. Para ello se plantea el problema de contorno

$$r'' = 9r - 9.8 \sin(3t).$$

$$r(0) = 0, \quad r(T) = 1.$$

Mediante diferencias finitas exprese $r(T/3)$ y $r(2T/3)$ en función de T . A continuación aproxime $v_0 = v'(0) = r'(0)$ mediante una diferencia finita para encontrar una ecuación numérica que debe cumplir T .

5. Este apartado ofrece otro enfoque para resolver la ecuación diferencial (1). Sea $s(t)$ una función que cumple $s'' = \omega^2 s$ (que debe hallar). Mediante el cambio de variables $r(t) = u(t)s(t)$ transforme (1) en una ecuación diferencial de primer orden que deberá identificar y resolver. Ayuda: para este ejercicio necesitará el valor de las siguientes integrales:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C,$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C.$$

Puntuación: Todos los apartados valen 2 puntos.

PROBLEMA 2

El flujo I que recorre una línea de corriente de longitud l está relacionado con el potencial en los extremos 0 y l . Por un lado, una ley constitutiva establece que en el extremo 0 la caída localizada de potencial, $V_0(t)$, es proporcional y de signo contrario a la intensidad local, es decir

$$V_0'(t) = -kI(t), \quad k > 0$$

Por otro lado, una ley de conservación de energía establece que la diferencia de potencial entre los extremos se invierte en pérdidas resistivas, proporcionales al flujo, y en variaciones del flujo, proporcionales a su derivada, es decir,

$$V_L(t) - V_0(t) = aI(t) + bI'(t), \quad a \geq 0, b > 0$$

siendo $V_L(t)$ el potencial en el extremo l , que puede ser variado libremente.

- a) ¿En ausencia de forzamiento ($V_L(t) = 0$), ¿qué relación debe haber entre a , b y k para que tanto I como V_0 tengan carácter oscilatorio?
- b) ¿Qué más debe cumplirse para que la solución sea periódica? Escriba la solución.
- c) Resuelva el problema para los valores $a = 2.5$, $b = 100$ y $k = 0.05$, siendo la condición inicial $V_0(0) = 0$, $I(0) = 0$ y el forzamiento $V_L(t) = 1$.
- d) Utilice los mismos valores pero con forzamiento periódico $V_L(t) = 0.001 \sin \omega t$ y obtenga la solución estacionaria.
- e) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia? ¿Cuánto vale la amplitud de la oscilación en resonancia? ¿Cuál es la relación entre las amplitudes de resonancia y forzamiento?

Puntuación: 2,2,2,2,2.