

E.T.S.I. TELECOMUNICACIÓN

ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen extraordinario, septiembre de 2006.

Problema 1

Parte de una cadena está enrollada en el suelo y se empieza a tirar de ella hacia arriba con fuerza constante. Si $y(t)$ representa la altura del extremo de la cadena que está en el aire en el tiempo t , se cumple tras adimensionalizar el problema

$$y \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = a - by, \quad (1)$$

donde a y b son constantes positivas.

- a) Observe que (1) es una ecuación diferencial de la forma $F(y, y', y'') = 0$. Mediante el cambio $x = dy / dt$, reduzca la ecuación (1) a la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$(x^2 + by - a) dy + y x dx = 0 \quad (2)$$

- b) Compruebe que la ecuación (2) no es exacta. Halle un factor integrante de la ecuación (2) que depende sólo de y . Resuelva la ecuación (2) si además se supone $y(0) = 0$, $x(0) = 0$ (es decir, si toda la cadena está inicialmente en el suelo y se parte del reposo).
- c) Si en la ecuación (1) se aproxima $(dy / dt)^2$ a dy / dt y si inicialmente la altura de la cadena es la unidad de longitud, entonces tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} y'' + y' &= a - b; \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Halle todas las funciones que cumplen el problema anterior. (Nota: la prima denota la derivada respecto a t)

- d) Resuelva de forma aproximada por el método de las diferencias finitas

$$\begin{aligned} y'' + y' &= a - b; \\ y(0) &= 1; \\ y(3) &= 2; \end{aligned}$$

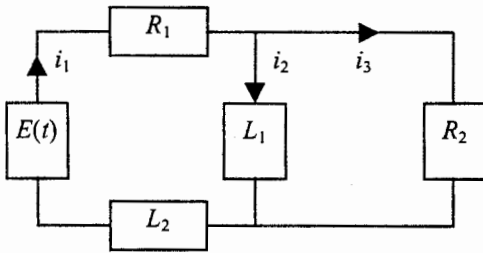
tomando $h = 1$ (o dicho de otro modo, tomando dos puntos interiores).

- e) Resuelva de forma aproximada por el método de colocación el problema planteado en el apartado d) tomando como función de prueba $y(t) = A + Bt + Ct^2$ y como punto de prueba $t = 1$.

Puntuación: a) 2p, b) 2p, c) 2p, d) 2p, e) 2p.

Problema 2

Se tiene la red eléctrica de la figura



Las ecuaciones diferenciales que modelizan el circuito son

$$L_2 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_2}{dt} = E(t)$$

$$-L_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 (i_1 - i_2) = 0$$

donde $E(t)$ es la fuerza electromotriz.

- a) Suponga que el circuito sólo está formado por la malla de la izquierda. En este caso la ecuación diferencial que lo modeliza es $\frac{di_1}{dt} = \frac{E(t) - R_1 i_1}{L_1 + L_2}$. Obtenga las

intensidades suponiendo que $R_1 = 8$ ohmios, $L_1 = 1$ henrio, $L_2 = 1$ henrios, $i_1(0) = 0$, y con $E(t) = 10$ y $E(t) = 10 \cos(t)$.

- b) Obtenga el sistema equivalente con las derivadas despejadas de forma explícita

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Resuelva el sistema homogéneo asociado al apartado b) con $R_2 = 3$ ohmios.
 d) Encuentre la solución del sistema anterior con $E(t) = 10$ y $E(t) = 10 \cos(t)$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$. Compare los resultados con los del apartado a).

Puntuación: a):3p, b) 1p, c) 3p, d) 3p