Breve historia de las ecuaciones diferenciales

Estas notas pretenden mostrar una breve historia de las ecuaciones diferenciales. Se ha pretendido dar más énfasis a las ideas que a las biografías de los matemáticos creadores de la teoría. En la siguiente dirección

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk`

se halla una colección de biografías de los matemáticos más famosos.

La mayor parte de estas notas históricas está sacadas de [1].

1. Ecuaciones diferenciales de 1$^{\text{er}}$ orden

Los primeros intentos para resolver problemas físicos mediante el cálculo diferencial a finales del siglo XVII llevaron gradualmente a crear una nueva rama de las matemáticas, a saber, las ecuaciones diferenciales. A mediados del siglo XVIII las ecuaciones diferenciales se convirtieron en una rama independiente y su resolución un fin en sí mismo.

Ya Newton (los creadores del cálculo infinitesimal fueron Leibniz y Newton) observó que si $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n = 0$, entonces $y(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, en particular, y depende de n constantes arbitrarias, aunque esta afirmación tuvo que esperar hasta el siglo XIX para poder ser demostrada con rigor (la demostración estándar actual usa el teorema del valor medio). Los matemáticos de la época con frecuencia usaban argumentos físicos: si $y(t)$ denota la posición en el tiempo t de una partícula, entonces $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ es su velocidad. Si $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$, se tiene que la velocidad es nula, es decir, la partícula no se mueve y su posición, por tanto, permanece constante.

En 1693 Huygens habla explícitamente de *ecuaciones diferenciales* y en el mismo año, Leibniz dice que las ecuaciones diferenciales son funciones de elementos del triángulo característico.

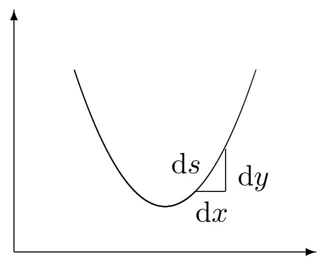

Figura 1: El triángulo característico.

En 1690, Jacques Bernouilli planteó el problema de encontrar la curva que adopta una cuerda flexible, inextensible y colgada de dos puntos fijos, que Leibniz llamó *catenaria* (del latín *cadena*). Galileo pensó que esta curva era una parábola, mientras que Huygens probó que esto no era correcto.

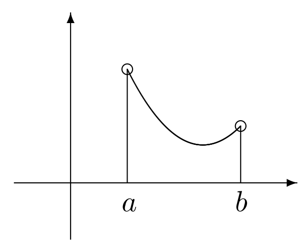

Figura 2: Una catenaria.

En 1691, Leibniz, Huygens y Jean Bernouilli publicaron soluciones independientes. La de Jean Bernouilli es la que se encuentra habitualmente en los textos de mecánica:

Consideremos un cable homogéneo sujeto por sus dos extremos (que suponemos a la misma altura) y que distan $2a$ uno del otro y sea ρ la densidad del cable. Sea $y = y(x)$ la función que describe la posición del cable. Por conveniencia se asumirá que la altura mínima del cable ocurre en $x = 0$ (o en otras palabras, $y'(0) = 0$).

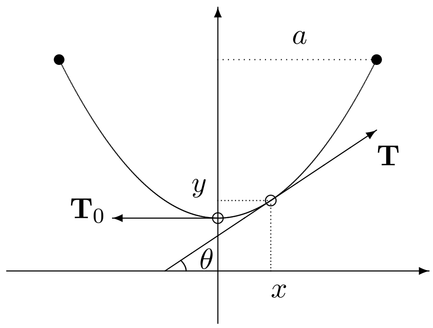

Figura 3: Deducción de la ecuación de la catenaria.

Sea (x, y) un punto arbitrario del cable (por conveniencia lo situamos en el tramo positivo de las x; en otro caso, el razonamiento es completamente igual) y pensemos en las fuerzas que actúan en el trozo de cable desde el punto de altura mínima hasta (x, y):

- El peso $\mathbf{P}$. Si m es la masa y s es la longitud del trozo considerado del cable, se tiene $m = \rho s$ y por tanto, $\mathbf{P} = (0, -g\rho s)$, donde g es la aceleración terrestre.

- La fuerza $\mathbf{T}_0$ que ejerce la parte izquierda del cable sobre el punto de altura mínima. Se tiene $\mathbf{T}_0 = (-\|\mathbf{T}_0\|, 0)$

- La fuerza $\mathbf{T}$ que ejerce la parte derecha del cable sobre el extremo derecho (x, y) del trozo de cable considerado. Observando la figura 3 se tiene que $\mathbf{T} = \|\mathbf{T}\|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

La condición de equilibrio es $\mathbf{P} + \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} = \mathbf{0}$. O componente a componente:

$$\|\mathbf{T}_0\| = \|\mathbf{T}\|\cos\theta, \qquad g\rho s = \|\mathbf{T}\|\operatorname{sen}\theta.$$

Dividiendo ambas expresiones.

$$\tan\theta = \frac{g\rho s}{\|\mathbf{T}_0\|}. \tag{1}$$

A partir de ahora, denotaremos $c = g\rho/\|\mathbf{T}_0\|$. Como (véase la figura 1)

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan\theta, \quad (\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2,$$

si derivamos (respecto a x) la ecuación (1), se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = c\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{\mathrm{d}x}.$$

O escrito de otro modo,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Por supuesto, esto es una ecuación de segundo orden; pero haciendo el cambio $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = c\sqrt{1 + v^2}. \tag{2}$$

Problema 1: Resuelva la ecuación (2). Use ahora $y'(0) = 0$ para deducir que la ecuación de la catenaria es

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx) + B, \tag{3}$$

donde B es una constante arbitraria. ¿Qué significado físico o geométrico posee B?

El siguiente problema propone otra manera de resolver la ecuación (2) usando la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de orden 2:

Problema 2: Eleve al cuadrado (2) y derive esta nueva ecuación respecto a x para obtener $\mathrm{d}^2 v/\mathrm{d}x^2 = c^2 x$. Halle ahora $v = v(x)$ y obtenga de nuevo (3).

La catenaria cumple otra importante propiedad: de entre todas las curvas de longitud dada, la que minimiza la energía potencial es precisamente la catenaria. Si $y : [-a, a] \to \mathbb{R}$ es la función que describe la forma de la catenaria (véase la figura 3), ρ es la densidad del cable y g es la aceleración de terrestre, la energía potencial de un elemento infinitesimal de masa, $\mathrm{d}m$, es

$$\mathrm{d}E = gy\mathrm{d}m = gy\rho\mathrm{d}s = g\rho y\sqrt{1+y'^2},$$

donde $\mathrm{d}s$ es el elemento diferencial de longitud de arco. La catenaria minimiza

$$\int_{-a}^{a} g\rho y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x,$$

si la longitud de la cuerda es constante, es decir

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x \text{ es constante.}$$

El estudio de funciones minimizantes llevó al descubrimiento del *cálculo de variaciones* por Euler a mediados del siglo XVIII y Lagrange a finales del siglo XVIII mejoró y amplió los métodos de Euler.

Por otra parte, acabamos de ver que la catenaria se puede obtener por dos caminos distintos: a partir de las leyes de Newton o como la curva que minimiza una cierta magnitud física. Se vio que muchos problemas físicos poseen esta dualidad. La reformulación de las leyes físicas por medio de funciones minimizantes fue hecha por Hamilton a mediados del siglo XIX.

Leibniz descubrió la técnica de separación de variables en 1691: Indicó cómo se resuelve

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f(x)g(y).$$

También redujo en el mismo año la ecuación homogénea $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(y/x)$ a una separable de primer orden del modo usual: con el cambio $y = vx$. En 1694, Leibniz, publicó la resolución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x).$$

En 1694, Leibniz y Jean Bernouilli estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dadas. Jean Bernouilli señaló que este problema es importante para determinar las trayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme porque dichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. El problema fue resuelto de forma general e independiente por Leibniz y por Jean Bernouilli en 1698. El método empleado es el mismo que se usa hoy en día.

Jean Bernouilli planteó el problema de determinar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad. La ecuación diferencial es en este caso

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^n. \tag{4}$$

Problema 3: Resuelva la ecuación (4) cuando $n = 2$. Deduzca que en este caso se tiene

$$v(t) = a\frac{f(t)+1}{f(t)-1},$$

donde $a = \sqrt{mg/k}$ y $f(t) = \mathrm{e}^{2(t+C)/a}$, siendo C una constante arbitraria. Pruebe que $\lim_{t\to\infty} v(t) = a$. Ésta es la razón de que los paracaidistas bajen con velocidad prácticamente constante. Explique físicamente el comportamiento estacionario de la velocidad cuando m ó k crecen.

También fueron identificadas las ecuaciones diferenciales de primer orden exactas, es decir, las ecuaciones $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ para las cuales existe una función $z = z(x,y)$ tal que $\mathrm{d}z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$. Clairaut en 1739 dió la condición $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, condición que fue dada de forma independiente por Euler en 1734. Si se tiene $\mathrm{d}z = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$, como remarcaron Euler y Clairaut, la solución es $z = \text{cte}$.

Cuando una ecuación de primer orden no es exacta, es posible muchas veces multiplicarla por una función, llamada *factor integrante*, que la convierta en exacta. Aunque se había usado esta técnica en algunas ecuaciones, fue Euler en 1734 quien se dió cuenta que este concepto proporcionaba un método de integración e introdujo las expresiones que actualmente se usan. Clairaut amplió la teoría poco más tarde. Hacia 1740 se conocían los métodos elementales de resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

2. Ecuaciones de 2º orden

En sus esfuerzos por tratar el problema de la cuerda vibrante, Jean Bernouilli en 1724, planteó y resolvió la ecuación $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = k^2y$. Anteriormente se dedujo la ecuación que debe satisfacer un péndulo simple: $\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t + mg \operatorname{sen}\theta = 0$.

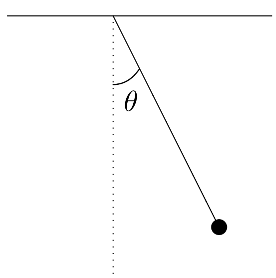

Figura 4: Un péndulo simple.

Problema 4: Deduzca la ecuación diferencial del péndulo simple. Ayuda: por medio de la ley de conservación de la energía debe probar que $\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta$, donde el punto denota la derivada respecto al tiempo. A continuación derive esta ecuación respecto a t.

Nota: No resuelva la ecuación $\ddot{\theta} = mg \operatorname{sen}\theta$, pues no se puede hallar la solución en términos de funciones elementales.

Es de destacar que antes de la solución de Jean Bernouilli, ni se conocía la solución del péndulo simple, ni la que se obtiene tras aproximar $\operatorname{sen}\theta$ por θ. Euler comenzó a considerar ecuaciones de orden superior a uno en 1728.

Desde el punto de vista de la concepción de función de la época, se disponía, a partir de Newton de un método general de integración de ecuaciones diferenciales mediante el desarrollo de funciones en forma de serie. Por ejemplo, en 1733 Daniel Bernouilli en un artículo cuyo título en castellano es "Teoremas sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de una cadena verticalmente suspendida", deduce que para una cadena de densidad constante en suspensión que oscila se tiene

$$\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + y = 0, \tag{5}$$

donde x e $y = y(x)$ tienen el significado que se muestra en la figura siguiente. Resolveremos la ecuación diferencial (5) como Daniel Bernouilli:

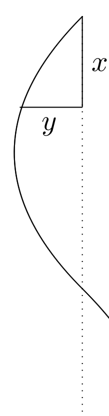

Figura 5: Una cadena verticalmente suspendida.

Por comodidad, supondremos $\alpha = 1$. Sea

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots, \tag{6}$$

la función que se pretende encontrar. Los siguientes cálculos son fáciles de entender si se supone que una serie de potencias se puede derivar término a término (operación que hasta el siglo XIX se suponía válida):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Bx + 2Cx^2 + 3Dx^3 + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = B + 4Cx + 9Dx^2 + \cdots \quad (7)$$

Igualando los coeficientes de (6) y (7) se tiene

$$A = B, \quad B = 4C, \quad C = 9D, ...$$

Todos los coeficientes se pueden poner en función del primero:

$$B = A, \quad C = \frac{A}{4}, \quad D = \frac{A}{4\cdot 9}, ...$$

Por tanto, la solución de (5) es

$$y = A + Ax + \frac{Ax^2}{4} + \frac{Ax^3}{4\cdot 9} + \cdots + \frac{Ax^n}{(n!)^2} + \cdots$$

En un artículo de 1739 "De novo genere oscillationum" (sobre un nuevo tipo de oscilación), Euler se ocupó de la ecuación diferencial

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + Ky = F\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

y descubrió el fenómeno de la *resonancia mecánica.*

En 1734, Euler afirmaba que podía resolver la ecuación

$$K^4\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = y, \quad (8)$$

que surgió tras estudiar el problema de desplazamiento tranversal de una barra elástica fijado un extremo y libre el otro. En 1734, el único método disponible por Euler fue la utilización de series y obtuvo cuatro series distintas.

Problema 5: Resuelva la ecuación (8). ¿Cuáles son las cuatro funciones obtenidas por Euler?

Euler desarrolla un método en 1743 para resolver las ecuaciones lineales de orden n de coeficientes constantes: Dada la ecuación

$$0 = a_0y + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}, \quad (9)$$

en donde los coeficientes $a_0, \dots, a_n$ son constantes, Euler indica que la solución ha de contener n constantes arbitrarias y que esta solución vendrá dada por la suma de n soluciones particulares, cada una de ellas multiplicada por una constante. Ahora hace el cambio $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, en donde λ es constante y obtiene la ecuación polinómica

$$0 = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n. \quad (10)$$

Trata por separado cuando esta ecuación tiene raíces simples, múltiples y complejas; con lo que Euler resuelve completamente las ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes.

Problema 6: Suponga que λ_0 es raíz doble de (10). Pruebe que $y(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ es una solución de (9).

D'Alembert observa que el conocimiento de una solución particular y de la solución general de la homogénea conduce, por adición, a la solución general de la no homogénea. Lagrange estudia cómo obtener soluciones particulares y a él se le debe también el método de variación de parámetros.

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgieron en la historia de las matemáticas con la misma intención que las ecuaciones diferenciales ordinarias: Analizar cuantitativamente determinados sistemas físicos, en particular los astronómicos. En el campo de la astronomía los principios físicos (las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación) estaban claros y los problemas matemáticos eran mucho más profundos. El problema matemático fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer éxito lo obtuvo Newton en los *Principia* al demostrar que a partir de sus leyes de movimiento y de la ley de gravitación universal se podían deducir las tres leyes planetarias de Kepler. El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción gravitatoria común fue estudiado intensamente por Euler, Laplace y Lagrange obteniendo sólo resultados parciales.

Al no obtener métodos generales para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, los matemáticos se volcaron con los sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. La primera vez que surgió este tipo de sistemas fue al estudiar sistemas de muelles acoplados, a partir de la ley de Hooke. La noción de polinomio característico aparece ya explícitamente en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales publicado en 1774 y en el trabajo de Laplace en 1775.

Por otra parte, Laplace desarrolló un método alternativo para hallar la solución de tales sistemas. En el famoso ensayo *Théorie analytique des probabilités*, publicado en 1812, Laplace presentó lo que ahora se conoce como la transformada de Laplace para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Esta transformada sirve también para encontrar la solución de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

4. Desarrollos posteriores

A principios del siglo XIX se desarrolló una fase en la que se trataba de demostrar algunos hechos dados por válidos en el siglo anterior. En 1820 Cauchy probó la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ bajo ciertas condiciones. En 1890 Picard estableció un método de aproximaciones sucesivas que permite establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden n.

Posteriormente, Cauchy, al tratar de demostrar el mismo teorema para los sistemas de ecuaciones diferenciales, introdujo la notación vectorial que todavía se utiliza hoy en día. Generalización que, utilizando los conceptos matriciales introducidos por Cayley a mediados del siglo XIX, ayudó a Jacobi a resolver completamente los sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes donde la matriz del sistema es diagonalizable. Posteriormente Jordan introdujo lo que hoy se conoce como la forma canónica de Jordan precisamente para resolver los sistemas lineales de ecuaciones donde la matriz no es diagonalizable.

Las investigaciones de Poincaré sobre la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar le condujeron al inicio de la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales. Obtuvo a finales del siglo XIX una serie de resultados de índole cualitativo que fueron mejorados por Bendixson y por Liapunov.

Referencias

[1] El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días. *Alianza Universidad.*

Julio Benítez López.
Universidad Politécnica de Valencia

7 de Febrero de 2008