La matriz de la aplicación lineal.

Sean $f : U \to V$ una aplicación lineal, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base de U y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de V. Obsérvese que $\dim U = n$ y $\dim V = m$.

Nuestro objetivo es calcular de forma cómoda $f(\mathbf{u})$, siendo $\mathbf{u} \in U$. Como $\mathbf{u}$ está en U y en U está la base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n,$$

o dicho de otro modo,

$$\text{Las coordenadas de } \mathbf{u} \text{ en la base inicial son } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ahora, como $f(\mathbf{u}_1)$ está en V y en V tenemos la base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, entonces $f(\mathbf{u}_1)$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$; es decir, existen escalares $a_{11}, \ldots, a_{1m}$ tales que

$$f(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{1m}\mathbf{v}_m.$$

Lo mismo se puede hacer para $f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n)$, encontrando que existen escalares a_{ij} tales que

$$f(\mathbf{u}_i) = a_{i1}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{im}\mathbf{v}_m, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

No perdamos de vista el objetivo: Calcular $f(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{u}_n) \\ &= \alpha_1 [a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{1m}\mathbf{v}_m] + \cdots + \alpha_n [a_{n1}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_m] \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{n1})\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{1m} + \cdots + \alpha_n a_{nm})\mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas de $f(\mathbf{u})$ en la base final son

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1m} + \cdots + \alpha_n a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Vamos a escribir esto último de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1m} + \cdots + \alpha_n a_{nm} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ & \vdots & \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto, (se sobreentiende que las coordenadas de un vector de U están dadas respecto a la base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y las de cualquier vector de V están dadas respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$)

$$\boxed{\text{Coordenadas de } f(\mathbf{u}) = A \cdot \text{Coordenadas de } \mathbf{u}}$$

¿Y cómo se construye la matriz A? La primera columna de A es

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix},$$

que son las coordenadas de $f(\mathbf{u}_1)$. Lo mismo vale en general para las otras columnas.

$$\boxed{\text{La } i\text{-ésima columna de } A \text{ son las coordenadas de } f(\mathbf{u}_i)}$$

Por último vale la pena observar que A tiene tantas columnas como vectores tiene la base de U (es decir, $\dim U$) y A tiene tantas filas como vectores tiene la base de V (es decir, $\dim V$).