El núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

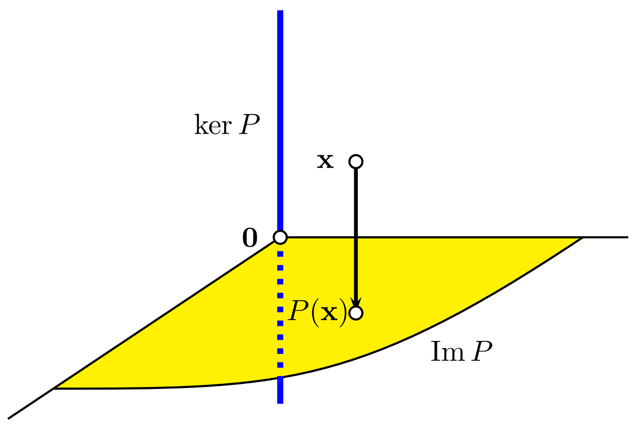
Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal (se sobreentiende que U y V son dos espacios vectoriales).

$$\boxed{\ker f = \{\mathbf{u} \in U : f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}} \qquad \boxed{\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}}$$

Observemos que $\ker f$ es subsepacio de U e $\operatorname{Im} f$ es subespacio de V.

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U}$$

Ejemplo: Proyección sobre el plano horizontal. $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



¿Cómo se calculan el núcleo y la imagen?

- $\mathbf{x} \in \ker f \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Pasar esta última ecuación a forma matricial (sistema homogéneo).
- $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \iff \exists \mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Pasar esta última ecuación a forma matricial (estudiar la compatibilidad).

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \iff \ker f = \{\mathbf{0}\}} \qquad \boxed{f \text{ es sobreyectiva} \iff \operatorname{Im} f = V}$$

Esta definición no es exhaustiva en el siguiente sentido: hay aplicaciones que son inyectivas y sobreyectivas a la vez, hay aplicaciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas, las hay que son inyectivas pero no sobreyectivas y al contrario.

¿Para qué sirve saber si una aplicación es inyectiva o sobreyectiva o no?

Imaginemos el siguiente problema: Conocemos $\mathbf{y} \in V$; y queremos saber cómo calcular (si existen o si son únicos) los vectores $\mathbf{x} \in U$ tales que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Si f es inyectiva, entonces sólo puede haber un vector $\mathbf{x}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. De hecho, si hubieran dos vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ tales que $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}$, entonces $f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, por lo que $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker f = \{\mathbf{0}\}$. Luego $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Luego la inyectividad de f implica que si el problema $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene solución, entonces esta solución es única.

Si f es sobreyectiva, como $\mathbf{y} \in V = \operatorname{Im} f$, existe un vector $\mathbf{x} \in U$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, o dicho de otro modo:

La sobreyectividad de f implica que el problema $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene al menos una solución.

¿Qué pasa cuando el problema $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene solución única?

Este tipo de aplicaciones se les llama biyectivas

$$\boxed{f \text{ es biyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ es inyectiva y sobreyectiva a la vez}}$$

Se pueden demostrar los dos siguientes teoremas:

Teorema 1 Sea f una aplicación lineal y A la matriz de f en cualquier par de bases

$$\boxed{f \text{ es biyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{la matriz de } f \text{ es invertible}}$$

Teorema 2 Sea f una aplicación lineal, donde $\dim U = \dim V$.

$$\boxed{f \text{ es biyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ es inyectiva} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ es sobreyectiva}}$$

Observe que del teorema 1 se deduce que sólo las aplicaciones lineales en donde $\dim U = \dim V$ pueden ser biyectivas (pero no todas lo son, piense en la proyección sobre el plano horizontal).