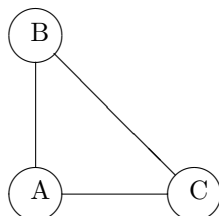


Dos procesos estocásticos

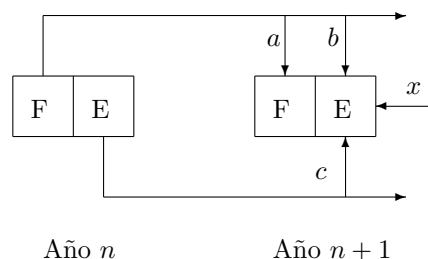
- 1** Una persona cambia de nodo en este gráfico



de la siguiente manera: decide al azar de modo equiprobable a dónde ir, sin permanecer dos veces seguidas en el mismo sitio. Sea $\mathbf{v} = (a_n, b_n, c_n)^t$ la probabilidad de que la persona esté respectivamente en A, B y C tras n pasos. Se tiene entonces que $a_{n+1} = (b_n + c_n)/2$, y similarmente para b_{n+1} y c_{n+1} .

- a) Halle una matriz M tal que $\mathbf{v}_{n+1} = M\mathbf{v}_n$. Observe que M es simétrica.
- b) Probablemente este apartado le resulte útil para los cálculos siguientes (aunque no sea estrictamente necesario). Sea A una matriz cuadrada arbitraria y α un número real no nulo. Halle una relación entre los valores propios de A y de αA .
- c) Halle una matriz S invertible y una matriz D diagonal tales que $M = SDS^{-1}$ (la matriz M es la obtenida en el apartado a). Trabaje sin usar decimales.
- d) Halle el término estacionario. Interpretelo.
- e) Si se permite que la persona pueda permanecer en el mismo nodo con probabilidad $p \in]0, 1[$, entonces hay que modificar el proceso: se debe cumplir $a_{n+1} = pa_n + q(b_n + c_n)$ y ecuaciones similares para b_{n+1} , c_{n+1} , en donde $p + 2q = 1$. Halle la matriz N tal que $\mathbf{v}_{n+1} = N\mathbf{v}_n$. Expresese N en función de M y pruébese $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \lim_{k \rightarrow \infty} N^k$. Interprete este último resultado.

- 2** Un modelo energético (muy simplificado) es el siguiente: hay dos tipos de energía, la fósil y la eléctrica. Tras cada año, las reservas energéticas se modifican, la fósil se puede transformar en eléctrica, mientras que al contrario no. Asimismo, debido a las reservas hidráulicas podemos suponer que hay un incremento constante de energía eléctrica. También suponemos que hay unos porcentajes que se pierden debido a que el rendimiento nunca es del 100 %. Las conversiones se muestran en la figura siguiente



Los números a , b y c son tantos por uno y están en $]0, 1[$. La cantidad x es fija y estrictamente positiva. Sean e_n y f_n las cantidades de energía eléctrica y fósil tras n años. Sea $\mathbf{v}_n = (e_n, f_n)^t$.

- a) Halle una matriz A y un vector \mathbf{u} tales que $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n + \mathbf{u}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - b) Pruebe que $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0 + (I - A^n)(I - A)^{-1}\mathbf{u}$.
 - c) Describa cuándo la matriz A es diagonalizable.
- A partir de ahora suponga que A es diagonalizable.
- d) Calcule A^n .
 - e) Dé una expresión para las cantidades de energía tras n años. Calcule el término estacionario. ¿Con este modelo, se agotará algún tipo de energía?