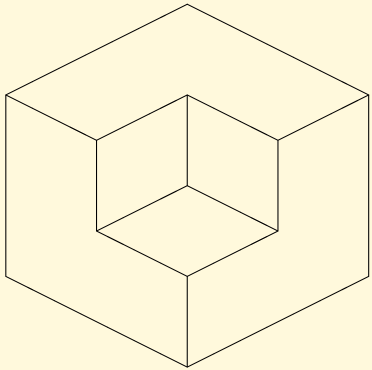
Matrices de proyecciones

J. Benítez, J. V. Romero, J. Izquierdo

Universidad Politécnica de Valencia

Problema

¿Cómo representar objetos 3-D en el plano?



Modelo matemático

$$\text{Objeto 3D} \quad \Longrightarrow \quad \text{Objeto 2D}$$

Modelo matemático

$$\text{Objeto 3D} \quad \Longrightarrow \quad \text{Objeto 2D}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

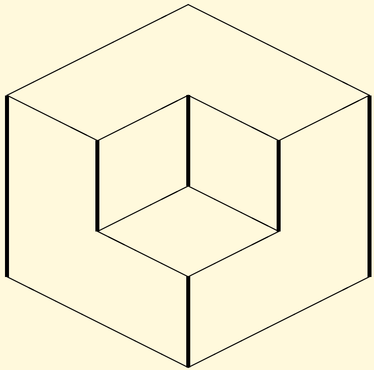
Modelo matemático

$$\text{Objeto 3D} \quad \Longrightarrow \quad \text{Objeto 2D}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

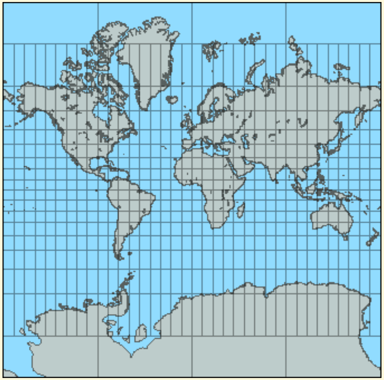
$$P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Propiedades de algunas proyecciones



- Proyecta rectas en rectas.
- Conserva el paralelismo.

No proyecta todo el espacio tridimensional



La Tierra y la proyección de Mercator

No conserva el paralelismo

La Academia de Atenas. Rafael

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal,

- Si r es una recta de $\mathbb{R}^m$, entonces $P(r)$ es una recta de $\mathbb{R}^n$
- Si r y s son rectas paralelas, entonces $P(r)$ y $P(s)$ son rectas paralelas.

Recuerde que

$P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal cuando

- $P(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P(\mathbf{v}) + P(\mathbf{w})$ para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$.
- $P(\alpha \mathbf{v}) = \alpha P(\mathbf{v})$ para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal.

Existe una matriz $\mathbf{A}$ (con n columnas y m filas) tal que

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineal.

Existe una matriz $\mathbf{A}$ (con n columnas y m filas) tal que

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

De hecho, $\mathbf{A}$ es la matriz de P en las canónicas. **¿Por qué?**

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal.

Existe una matriz $\mathbf{A}$ (con n columnas y m filas) tal que

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

¿Cómo se obtiene esta matriz $\mathbf{A}$?

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineal.

Existe una matriz $\mathbf{A}$ (con n columnas y m filas) tal que

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

La columna i-ésima de $\mathbf{A}$ es $P(\mathbf{e}_i)$, siendo $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Teorema

Sea $P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal.

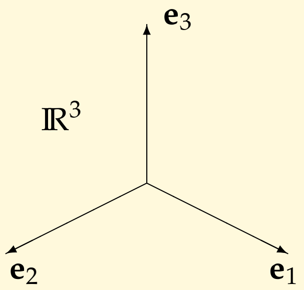
Existe una matriz $\mathbf{A}$ (con n columnas y m filas) tal que

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

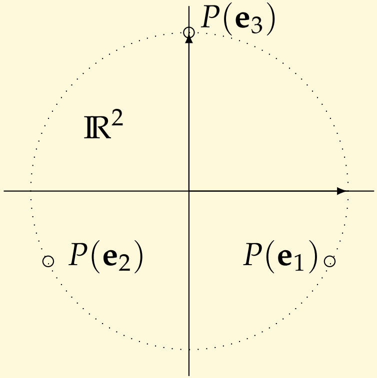
para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ P(\mathbf{e}_1) & \dots & P(\mathbf{e}_m) \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$$

En busca de la matriz de la proyección



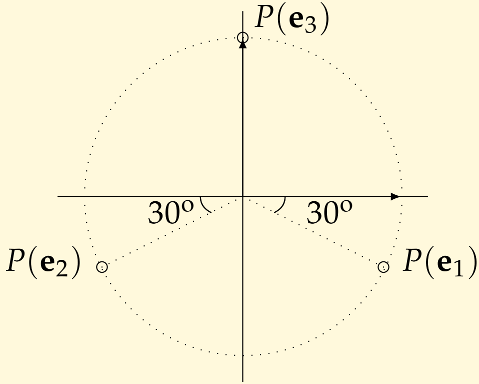
El espacio tridimensional



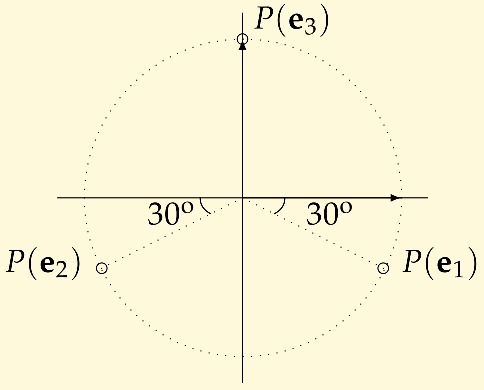
Donde dibujamos los puntos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ P(\mathbf{e}_1) & P(\mathbf{e}_2) & P(\mathbf{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

La proyección isométrica

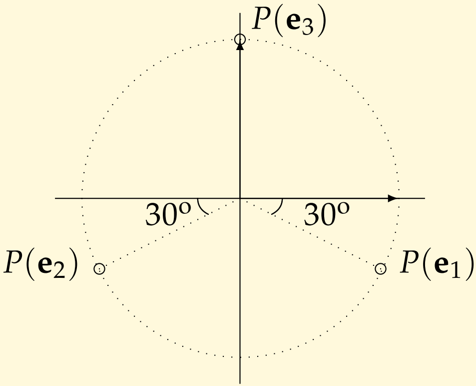


La proyección isométrica



$$\mathbf{A}_{Iso} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ P(\mathbf{e}_1) & P(\mathbf{e}_2) & P(\mathbf{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^{\mathrm{o}} & -\cos 30^{\mathrm{o}} & 0 \\ -\operatorname{sen} 30^{\mathrm{o}} & -\operatorname{sen} 30^{\mathrm{o}} & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección isométrica



$$\mathbf{A}_{Iso} = \left(\begin{array}{ccc} | & | & | \\ P(\mathbf{e}_1) & P(\mathbf{e}_2) & P(\mathbf{e}_3) \\ | & | & | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right)$$

¿Cómo se usa esta matriz?

Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
$\mathbf{A}_{Iso}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es donde tenemos que dibujarlo.

¿Cómo se usa esta matriz?

Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
$\mathbf{A}_{Iso}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es donde tenemos que dibujarlo.

Dibujamos el punto espacial $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \\ \\ -\dfrac{x+y}{2} + z \end{pmatrix}$$

¿Cómo se usa esta matriz?

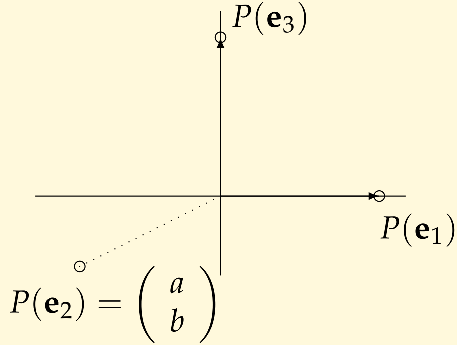
Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
$\mathbf{A}_{Iso}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es donde tenemos que dibujarlo.

Dibujamos el punto espacial $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en

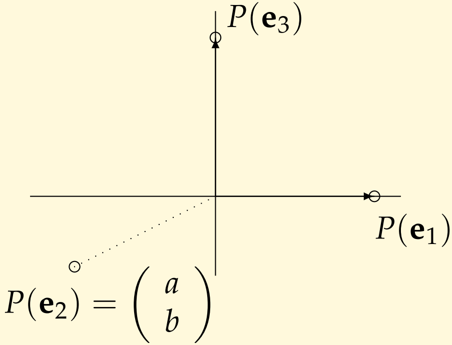
$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \\ \\ -\frac{x+y}{2} + z \end{pmatrix}$$

¿Qué objeto geométrico es la solución de $\mathbf{A}_{iso}\mathbf{x} = 0$?

La proyección caballera

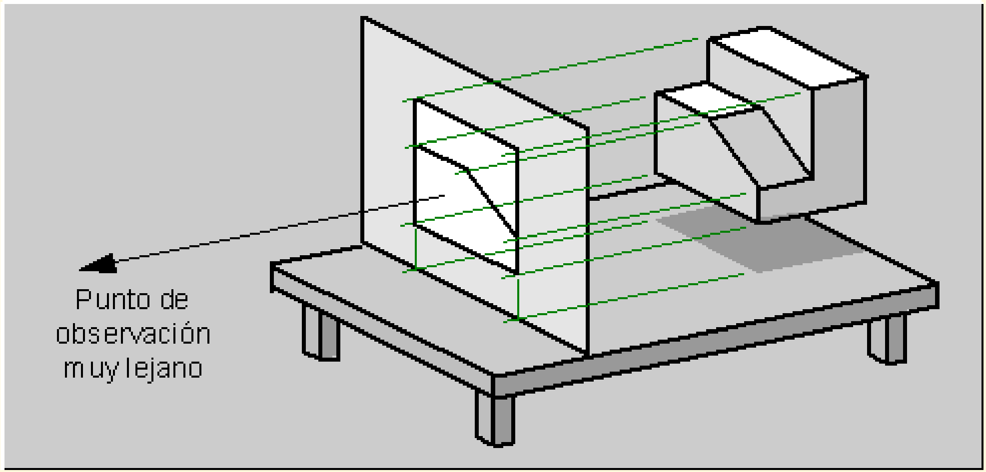


La proyección caballera

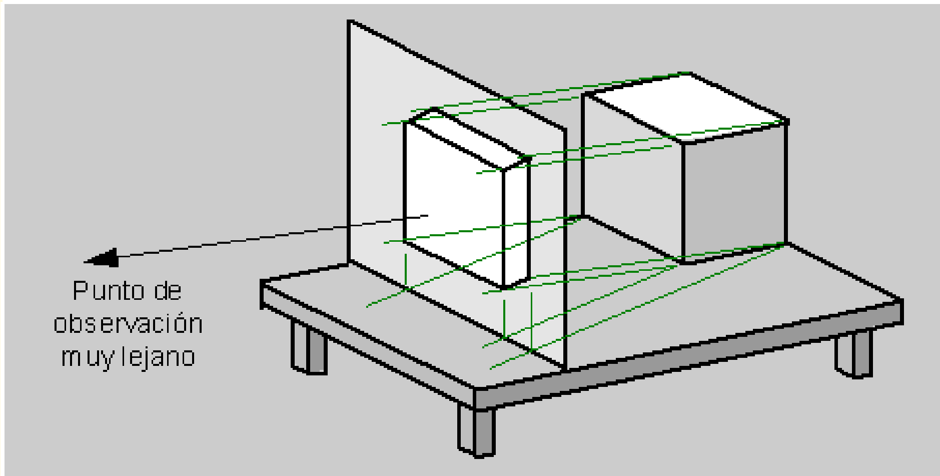


$$\mathbf{A}_{Cab} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ P(\mathbf{e}_1) & P(\mathbf{e}_2) & P(\mathbf{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Proyecciones ortográficas



Proyecciones oblicuas



¿Cuándo una proyección es ortográfica?

¿Cuándo una proyección es ortográfica?

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^t \text{ es múltiplo de la matriz identidad}}$$

(Gauss, Hadwiger)

¿Cuándo una proyección es ortográfica?

$$\boxed{\mathbf{AA}^{\mathrm{t}} \text{ es múltiplo de la matriz identidad}}$$

Ejemplo: La proyección isométrica:

$$\begin{aligned}\mathbf{AA}^{\mathrm{t}} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6/4 & 0 \\ 0 & 6/4 \end{pmatrix} = \frac{6}{4}\mathbf{I}.\end{aligned}$$

¿Cuándo una proyección es ortográfica?

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \text{ es múltiplo de la matriz identidad}}$$

Ejemplo: La proyección caballera:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & ab \\ ab & 1 + b^2 \end{pmatrix}.$$

¿Cuándo una proyección es ortográfica?

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \text{ es múltiplo de la matriz identidad}}$$

Ejemplo: La proyección caballera:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}.$$

Para que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ sea múltiplo de $\mathbf{I}$, se debe tener $a = b = 0$.

¿Cuándo una proyección es ortográfica?

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \text{ es múltiplo de la matriz identidad}}$$

Ejemplo: La proyección caballera:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}.$$

Para que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ sea múltiplo de $\mathbf{I}$, se debe tener $a = b = 0$.

¿Cuál es el significado geométrico de $a = b = 0$?