Factorización QR de una matriz.

Dada una matriz A (no necesariamente cuadrada), con columnas linealmente independientes, encontraremos matrices Q, R tales que

(i) $A = QR$.

(ii) Las columnas de Q son ortonormales.

(iii) Q es del mismo tamaño que A.

(iv) R es triangular superior invertible.

La forma de hacerlo es aplicar el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A.

> Proceso de Gram Schmidt.
> A partir de los vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ se construyen
>
> $$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j,\ \ j = 2, \ldots, k.$$
>
> Los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ son ortogonales.

Ejemplo. Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las columnas de A son

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)^{\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{v}_3 = (1,0,1,1)^{\mathrm{t}}.$$

Apliquemos el proceso de Gram-Schmidt a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

- $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{t}}$.
- $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{1}{1} \mathbf{u}_1 = (0,1,0,1)^{\mathrm{t}}$.
- $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \left[\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 \right] = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{1} \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{u}_2 = (0, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^{\mathrm{t}}$.

Ahora se tiene

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3) \\ &= (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \\ &= (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} | \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} | \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \right)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \|\mathbf{u}_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{u}_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|\mathbf{u}_3\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \end{aligned}$$