

# **PROYECTO DOCENTE**

**Julio Benítez López**



# PROYECTO DOCENTE

Presentado por Julio Benítez López

Asignaturas:

- Álgebra Lineal.
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Análisis Vectorial.
- Matemáticas.

Cuerpo de Profesores Titulares de Universidad.

Área de conocimiento: Matemática Aplicada.



La matemática es la puerta  
y llave de todas las ciencias

Roger Bacon



# Índice General

<b>0. Metodología Docente</b>	<b>1</b>
0.1. Matemática y matemática aplicada . . . . .	1
0.2. La enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas . . . . .	3
0.3. Métodos de enseñanza . . . . .	5
0.4. Desarrollo Teórico . . . . .	6
0.5. Desarrollo práctico . . . . .	7
0.6. Ubicación de las asignaturas . . . . .	7
0.7. Evaluación . . . . .	8
0.8. El uso de libros . . . . .	8
<b>I. Programa de Álgebra Lineal</b>	<b>11</b>
<b>1. Geometría de <math>\mathbb{R}^2</math> y <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>19</b>
1.1. La geometría y el álgebra de vectores . . . . .	19
1.2. El producto escalar . . . . .	22
1.3. Usos geométricos del producto escalar . . . . .	23
1.4. El producto vectorial . . . . .	25
1.5. Ecuaciones de rectas y planos . . . . .	26
1.5.1. Rectas en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	26
1.5.2. Rectas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
1.5.3. Planos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
<b>2. Matrices</b>	<b>29</b>
2.1. Primeras definiciones . . . . .	30
2.2. Potencias de matrices . . . . .	31
2.3. Determinante de una matriz cuadrada . . . . .	32
2.4. Inversa de una matriz cuadrada . . . . .	33
2.5. Matrices por bloques . . . . .	34
<b>3. Sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>37</b>
3.1. Sistemas lineales . . . . .	38

3.2. El método de eliminación de Gauss . . . . .	38
3.3. Factorización $LU$ de una matriz . . . . .	39
3.4. Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz . . . . .	40
3.5. Pivoteo parcial . . . . .	40
<b>4. Espacios vectoriales</b>	<b>43</b>
4.1. Definiciones y primeras propiedades . . . . .	43
4.2. Subespacios vectoriales . . . . .	44
4.3. Bases en un espacio vectorial . . . . .	45
4.4. Cálculo coordenado en un espacio vectorial de dimensión finita . . . . .	46
<b>5. Aplicaciones lineales</b>	<b>49</b>
5.1. Definición y ejemplos . . . . .	50
5.2. La matriz asociada a una aplicación lineal . . . . .	51
5.3. Aplicaciones afines . . . . .	53
5.4. El núcleo y la imagen de una aplicación lineal . . . . .	55
<b>6. Curvas de Bézier</b>	<b>57</b>
6.1. El algoritmo de De Casteljau . . . . .	57
6.2. Curvas de Bézier y polinomios de Bernstein . . . . .	59
6.3. Propiedades de las curvas de Bézier . . . . .	60
6.3.1. Invariancia afín . . . . .	60
6.3.2. La propiedad de la envoltura convexa . . . . .	61
6.3.3. Interpolación inicial y final . . . . .	61
6.3.4. Pseudocontrol local . . . . .	61
6.4. Vectores tangentes . . . . .	61
<b>7. Espacio vectorial euclídeo</b>	<b>65</b>
7.1. Producto escalar . . . . .	66
7.2. Norma y ángulo en un espacio euclídeo . . . . .	67
7.3. Proyecciones sobre subespacios . . . . .	67
7.4. Bases ortogonales y proceso de Gram-Schmidt . . . . .	69
7.5. Matrices ortogonales. Factorización $QR$ . . . . .	71
<b>8. Aproximación por mínimos cuadrados</b>	<b>73</b>
8.1. Método de los mínimos cuadrados . . . . .	73
8.2. Ajuste de datos . . . . .	74
8.3. Mínimos cuadrados ponderados . . . . .	78
8.4. Distancia entre variedades lineales . . . . .	78

---

<b>9. Teoría espectral</b>	<b>81</b>
9.1. Conceptos básicos . . . . .	82
9.2. Diagonalización de matrices . . . . .	82
9.3. Diagonalización de matrices hermíticas . . . . .	83
<b>10. Aplicaciones de la teoría espectral.</b>	<b>85</b>
10.1. Potencias de matrices . . . . .	85
10.2. Cálculo de sucesiones dadas por recurrencia lineal . . . . .	86
10.3. Cadenas de Márkov lineales . . . . .	86
10.4. Identificación de cónicas y cuádricas . . . . .	87
<b>II. Programa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>91</b>
<b>1. Ecuaciones diferenciales de primer orden</b>	<b>95</b>
1.1. Ecuaciones separables y reducibles a separables . . . . .	96
1.2. Ecuaciones exactas y reducibles a exactas . . . . .	97
1.3. Ecuaciones lineales de primer orden . . . . .	98
1.4. Algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . .	98
1.5. Trayectorias ortogonales y oblicuas . . . . .	101
<b>2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden <math>n</math></b>	<b>103</b>
2.1. La ecuación lineal de orden $n$ . . . . .	103
2.2. La ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes . . . . .	104
2.3. Búsqueda de soluciones particulares de la ecuación no homogénea . . . . .	105
2.4. Ecuación de Euler-Cauchy . . . . .	106
<b>3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales</b>	<b>109</b>
3.1. Vibraciones en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos . . . . .	109
<b>4. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales</b>	<b>113</b>
4.1. Introducción . . . . .	114
4.2. Propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	114
4.3. Sistemas homogéneos de coeficientes constantes . . . . .	115
4.4. Búsqueda de una solución particular en los sistemas no homogéneos . . . . .	116
4.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior . . . . .	117
<b>5. Cálculo variacional</b>	<b>119</b>
5.1. Introducción . . . . .	120
5.2. La ecuación de Euler . . . . .	121
5.3. Integrales con más de una función argumento . . . . .	122

5.4. Problemas condicionados . . . . .	122
<b>III. Programa de Análisis Vectorial</b>	<b>127</b>
<b>1. Curvas parametrizadas.</b>	<b>133</b>
1.1. Ejemplos . . . . .	134
1.2. Vectores tangentes . . . . .	136
1.3. Curvas regulares . . . . .	136
1.4. Longitud de arco . . . . .	137
1.5. Movimiento de una partícula . . . . .	138
<b>2. Integrales de línea</b>	<b>143</b>
2.1. Integrales curvilíneas de campos escalares . . . . .	143
2.2. Integral curvilínea de un campo vectorial . . . . .	143
2.3. El teorema de Green . . . . .	144
<b>3. Superficies parametrizadas</b>	<b>147</b>
3.1. Definición y ejemplos de superficies parametrizadas . . . . .	148
3.2. El plano tangente . . . . .	149
<b>4. Integrales de superficie</b>	<b>153</b>
4.1. Integrales de superficie de campos escalares . . . . .	154
4.2. Integrales de superficies de campos vectoriales. . . . .	155
4.3. El teorema de Gauss-Ostrogradsky . . . . .	157
4.4. El teorema de Stokes . . . . .	158
<b>5. Campos conservativos y solenoidales</b>	<b>163</b>
5.1. Campos conservativos . . . . .	164
5.2. Campos solenoidales . . . . .	166
<b>6. Coordenadas curvilíneas ortogonales</b>	<b>169</b>
6.1. Repaso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas . . . . .	169
6.2. Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .	170
6.3. Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .	171
6.3.1. El gradiente . . . . .	171
6.3.2. La divergencia . . . . .	172
6.3.3. El rotacional . . . . .	173
6.3.4. El Laplaciano . . . . .	173
<b>7. El campo gravitatorio y electrostático</b>	<b>175</b>

7.1. El potencial gravitatorio y electrostático . . . . .	175
7.2. La ley de Gauss . . . . .	178
<b>8. El campo magnético</b>	<b>181</b>
8.1. Fluidos . . . . .	181
8.2. La derivada material . . . . .	182
8.3. El teorema del transporte . . . . .	182
8.4. La ecuación de continuidad . . . . .	184
8.5. La ley de Lorentz y la ley de Biot y Savart . . . . .	185
8.6. Propiedades del campo magnético . . . . .	186
8.7. Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	188
<b>IV. PROGRAMA DE MATEMÁTICAS</b>	<b>191</b>
<b>1. Funciones de variable compleja</b>	<b>197</b>
1.1. Introducción y preliminares . . . . .	198
1.2. Funciones holomorfas . . . . .	199
1.3. La exponencial y el logaritmo complejo . . . . .	201
1.4. Integración en el plano complejo . . . . .	203
1.5. Singularidades aisladas, series de Laurent y cálculo de residuos . . . . .	204
1.6. El Teorema de los Residuos . . . . .	205
<b>2. La transformada de Fourier</b>	<b>211</b>
2.1. Transformada de Fourier y primeras propiedades . . . . .	211
2.2. Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita . . . . .	213
2.3. Convolución de funciones . . . . .	214
2.4. Transformadas de Fourier en senos y cosenos . . . . .	216
<b>3. La transformada de Laplace</b>	<b>219</b>
3.1. Primeras propiedades . . . . .	219
3.2. La Fórmula de inversión de Laplace . . . . .	221
3.3. Las ecuaciones integrales de Volterra . . . . .	222
3.4. La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales . . . . .	222
<b>4. Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias</b>	<b>225</b>
4.1. Soluciones mediante series alrededor de un punto regular . . . . .	226
4.2. Soluciones mediante series alrededor de un punto singular-regular . . . . .	227
4.3. Funciones de Bessel . . . . .	228

<b>5. Series de Fourier</b>	<b>231</b>
5.1. Primeras propiedades de las series de Fourier . . . . .	232
5.2. Método de separación de variables. . . . .	233
<b>6. Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones</b>	<b>237</b>
6.1. Introducción al método de autofunciones . . . . .	237
6.2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos . . . . .	238
6.3. Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos . . . . .	240
6.4. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones	241
<b>A. Examen de Álgebra Lineal</b>	<b>243</b>
<b>B. Examen de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>245</b>
<b>C. Examen de Análisis Vectorial</b>	<b>247</b>
<b>D. Examen de Matemáticas</b>	<b>249</b>

# 0. Metodología Docente

## 0.1. Matemática y matemática aplicada

¿Cuáles son las cualidades fundamentales de las matemáticas?: Abstracción, rigor lógico, el ineludible carácter de sus conclusiones y, finalmente, el amplio campo de sus aplicaciones.

En relación con la abstracción, podemos decir que es un rasgo fundamental de toda ciencia. Sin embargo, en las ciencias de la naturaleza se realizan representaciones directas de fenómenos de la realidad y posteriormente una generalización experimental, por lo que los conceptos o teorías abstraídas pueden ser rechazadas en cuanto una nueva observación así lo exija. Por el contrario en matemáticas, los conceptos tienen sentido por sí mismos, únicamente dejan de ser aceptados si se demuestra su inconsistencia y las teorías sólo son rechazadas si se descubre algún error en los razonamientos. Por tanto, la abstracción va más allá que en ninguna otra ciencia, pues aunque sus bases surgen de analogías directas con la realidad, su desarrollo formal es totalmente independiente de ésta siguiendo su propio camino. Podemos decir que las ideas matemáticas se originan en la experiencia. Sin embargo, una vez axiomatizadas, comienzan una vida propia.

La construcción del edificio matemático, aunque guiada por la intuición, se realiza con total rigor lógico. Si alguna observación de la realidad modifica los cimientos sobre los que se asienta, no por ello la teoría matemática dejará de tener validez, únicamente su aplicación a ese caso concreto habrá dejado de tener valor. Por todo esto, las matemáticas van creciendo, al mismo tiempo que crece el grado de abstracción. Este rigor lógico hace que los razonamientos matemáticos sean incontestables. Citando a J. Hadamard: “*El objetivo del rigor matemático es confirmar y legitimar las conquistas de la intuición y nunca ha tenido otra finalidad.*” Gracias a esto, el rigor matemático es el responsable de que las matemáticas ocupen un lugar insustituible en las restantes ciencias en las que la creación de modelos o abstracciones de la realidad resultan imprescindibles.

Debemos resaltar la amplitud de aplicaciones de las matemáticas en la industria, tecnología moderna, mecánica, física, economía,... bien en procesos técnicos, bien en expresión de leyes, influyendo de forma decisiva en su desarrollo. Sirva como ejemplo las importantes contribuciones a estas disciplinas por muchos matemáticos ilustres como Arquímedes, Newton, Euler, Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier, Gauss, Hamilton, Poincaré, Minkowski, Weyl, Morgenstein, von Neumann, Nash, ...

Partiendo de la observación, las ciencias producen una formulación de leyes y expresiones matemáticas de éstas. De estas leyes vienen las deducciones y, finalmente, la teoría es llevada a la práctica que a su vez proporciona nuevos y poderosos impulsos al desarrollo de la teoría. Como dos ejemplos destacados podemos citar los siguientes:

El estudio de los fenómenos electromagnéticos obligó a Maxwell a desarrollar las ecuaciones

de Maxwell, para a partir de estas ecuaciones deducir, por métodos puramente matemáticos, la existencia de las ondas electromagnéticas y que su velocidad de propagación debía de ser la de la luz. Tras este resultado propuso la teoría electromagnética de la luz que motivó la búsqueda de ondas electromagnéticas. Estas ondas fueron descubiertas de manera empírica por Hertz poco después.

Otro ejemplo es el descubrimiento del planeta Neptuno. Es una de las más fascinantes historias de la astronomía y muestra la precisión de la teoría matemática de movimientos planetarios. En 1820 el astrónomo Bouvard construyó tablas de los movimientos de Júpiter, Saturno y Urano. Las posiciones de Júpiter y Saturno fueron satisfactorias; pero encontró que era imposible cuadrar las de Urano. En 1845 el astrónomo Le Verrier propuso la existencia de un planeta exterior para explicar las irregularidades del movimiento de Urano. El 31 de Agosto de 1846 presentó una memoria en la Academia de las Ciencias francesa, escribió el 18 de Septiembre al astrónomo Galle y el 23 de Septiembre el planeta fue descubierto en un primer intento separándose tan sólo 1° del lugar predicho por Le Verrier.

Un buen desarrollo matemático permite obtener resultados potentes al investigador científico. Pero también recíprocamente, una ciencia y técnica ambiciosa en sus proyectos empujan las matemáticas hacia cotas superiores de desarrollo a través de los problemas que obligan a plantearse al matemático.

¿Dónde está la frontera entre la matemática pura y la aplicada? Tenemos que decir que esta frontera es muy difusa puesto que es imposible afirmar a priori si unos resultados determinados, aunque dentro de un marco de total abstracción y sin ninguna conexión con la realidad, podrían aplicarse o no. La investigación matemática va alejándose de la realidad empírica; pero a la vez tiene posibilidades totalmente insospechadas de actuar en un nivel teórico superior.

Podemos citar el ejemplo de la geometría euclídea. Cuando los griegos axiomatizaron la geometría partieron de una serie de resultados empíricos obtenidos de los egipcios y babilonios. La culminación fueron los *Elementos* de Euclides donde todo el saber estaba rigorizado al máximo permitido por la época, al tiempo que aparentemente inútil. Podemos citar la siguiente anécdota atribuida a Euclides: Una vez un alumno le interrumpió su explicación sobre geometría preguntándole qué se podría ganar con aquellas elucubraciones tan extrañas. Euclides se dirigió a su esclavo allí presente: “*Dale una moneda y que se vaya, pues necesita sacar ganancias de lo que aprenden*”. Así llegamos hasta el siglo XVI, cuando se descubrió que las órbitas de los planetas son elipses, las trayectorias de la balística son paráolas, los telescopios han de ser paraboloides, ... Más aún la geometría euclídea fue hecha álgebra por medio de la geometría analítica de Descartes, a continuación la generalización del estudio de las cónicas llevó al estudio de la diagonalización de matrices simétricas, y posteriormente al estudio de diagonalización de endomorfismos en espacios de infinitas dimensiones, que ayudó a resolver las ecuaciones integro-diferenciales a principios del siglo XX que aparecen en multitud de campos de la física. Asimismo el estudio de los operadores diagonalizables en los espacios de Hilbert llevó al formalismo matemático de la mecánica cuántica.

Otro ejemplo sacado de la historia nos lo proporciona el imperio romano. Los romanos eran un pueblo práctico y hacían alarde de su practicismo. Diseñaron y completaron grandes proyectos de ingeniería; pero se negaron a considerar cualquier idea que no pudiera venir de las aplicaciones prácticas. La actividad romana acerca de las matemáticas viene dada por Cicerón: “*Los griegos dieron al geómetra el más alto honor. Pero nosotros hemos establecido*

*como límite de este arte su utilidad para medir y contar*”. La incapacidad de los romanos para desarrollar las matemáticas era notoria. La lección que se puede aprender es que los pueblos que desdeñan los trabajos de matemáticos y científicos altamente teóricos y desacreditan su utilidad ignoran la forma en la que se han presentado importantes desarrollos prácticos.

## 0.2. La enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas

La enseñanza de las matemáticas en una escuela técnica plantea el problema de elegir qué matemáticas hay que impartir y cómo hacerlo.

Todo esto nos lleva a distinguir entre las necesidades externas de las matemáticas, originadas por las demás ciencias y las necesidades internas relativas a unificación, generalización, ... Son las primeras las que deben estudiarse en las escuelas técnicas, adecuando los planes de estudio a tal fin. Estos planes deben proporcionar al estudiante la capacidad de atacar los problemas que se plantearán en el ejercicio de su profesión.

Uno de los principales problemas que surgen en la enseñanza de las matemáticas en una universidad tecnológica es el siguiente:

### ¿Cómo motivar al alumno en las clases de matemáticas?

Es un error frecuente suponer que un estudiante de una carrera tecnológica está interesado en las matemáticas como un fin en sí mismas. En un curso demasiado formalista el alumno ve hasta la saciedad el siguiente modelo secuencial de exposición de la teoría:

Definición  $\Rightarrow$  Ejemplos  $\Rightarrow$  Teorema  $\Rightarrow$  Demostración  $\Rightarrow$  Corolarios

La imponente sucesión de teoremas frustra al alumno, especialmente en los primeros años de universidad. El resultado inmediato es la falta de motivación y la insatisfacción del alumno, lo que provoca un alto porcentaje de abandonos y la sensación de que las matemáticas son demasiado abstractas y carentes de utilidad.

Una de las preguntas que se formulan los alumnos al ver contenidos matemáticos en sus planes de estudio es

### ¿Para qué sirven las matemáticas?

Creemos que no hay mejor manera de motivar al alumno que la conexión con otras asignaturas de la carrera. No debemos olvidar que la mayor parte de las teorías matemáticas surgieron de ejemplos físicos concretos. Citamos a M. Kline [44]:

Mathematics is the key to our understanding of the physical world... Should such uses and values of mathematics be taught in mathematics courses? Certainly! Knowledge is a whole and mathematics is part of that whole... To teach mathematics as a separate discipline is a perversion, a corruption and a distortion of true knowledge. Each subject is an approach to knowledge and any mixing or overlap where convenient and pedagogically useful, is desirable and to be welcomed. Some of these relationships can serve as motivation; others would be applications; and still others would supply interesting reading and discussion material that would vary and enliven the content of our mathematics courses.

Mathematics is not an isolated, self-sufficient body of knowledge. It exists primarily to help man understand and master the physical, the economic and the social worlds... This is also the primary reason for the presence of mathematics in the curriculum. We are therefore obliged to present this value of mathematics. Anything less is cheating the student out of the fruit of his learning

The natural motivation is the study of real, largely physical, problems. Practically all the major branches of mathematics arose in response to such problems and certainly on the elementary level this motivation is genuine. It may perhaps seem strange that the great significance of mathematics lies outside of mathematics but this fact be reckoned with. For most people, including the great mathematician, the richness and values that do attach to mathematics derive from its use in studying the real world. Mathematics is a means to an end. One uses the concepts and reasoning to achieve results about real things.

Plutarch said, “The mind is not a vessel to be filled but a fire to be kindled.” Motivation kindles the fire. The use of real and especially physical problems serves not only to motivate mathematics but to give meaning to it... Mathematical concepts arose from such physical situations or phenomena and their meanings were physical for those who created mathematics in the first place. To rob the concepts of their meaning is to keep the rind and to throw away the fruit.

Así pues, surge una pregunta:

### **¿Debe un profesor de matemáticas enseñar contenidos no matemáticos?**

En nuestra opinión la respuesta debe ser **no**. Pero, también, el profesor de matemáticas debe tener conocimientos de otras disciplinas para apoyar la docencia de las herramientas matemáticas que el alumno necesita a lo largo de sus estudios. Es importante mostrar la interactividad entre las matemáticas y las diferentes disciplinas científicas [54, 67]. Por tanto, creemos adecuado, en la medida de lo posible, seguir el siguiente esquema:

Problema real  $\Rightarrow$  Formulación matemática  $\Rightarrow$  Teoría  $\Rightarrow$  Validación  $\Rightarrow$  Predicciones

La teoría introducida puede alcanzar toda su amplitud generalizadora e incluso puede finalmente construirse la teoría axiomática de la que se deducen como casos particulares los problemas concretos que hicieron introducir el tema.

La tendencia a tratar sólo el problema concreto puede conducir a que los cursos de matemáticas se conviertan en recetarios. Esta desviación se ha dado a lo largo del tiempo como reacción ante la enseñanza viciada de teoricismo que en algunos casos se ha producido. La reacción antiteórica provocó la proliferación de “ingenieros de manual”, técnicos excesivamente habituados a resolver los problemas mediante los numerosos manuales que proliferaron por entonces. El constante ensanchamiento de la técnica y la creciente complejidad de los problemas hacen inútil el esfuerzo de dominar toda la casuística. Las técnicas concretas envejecen rápidamente, lo que hace más patente aún la necesidad de dar una formación abierta, dinámica y polivalente que capacite al titulado profundizar posteriormente en otras áreas.

Como ya comentábamos, una gran parte del desarrollo tecnológico se basa en la aplicación de los resultados obtenidos en investigación básica. Desdeñar la teoría frente a la práctica nos

parece imponer una limitación en la formación de nuestros alumnos que puede tener graves consecuencias a la hora de abordar una especialización seria.

De todo ello se desprende que durante su estancia en los primeros años de universidad, el futuro ingeniero debe adquirir una formación básica sin pretender altas especializaciones. Sobre esta base el estudiante podrá construir posteriormente una estructura sólida y cursar la especialidad de modo adecuado.

Creemos que debemos aspirar a alcanzar un equilibrio: Definiendo los términos técnicos claramente. Enunciando todos los teoremas. Demostrando todos salvo los que por limitación temporal sean excesivamente largos o los que la demostración no aporte algo significativo. Establecer teoremas tan generales como sea posible, exceptuando los casos en los que una generalización obligue a complicar sustancialmente la demostración de un resultado sencillo o si no se utiliza efectivamente en la práctica.

### 0.3. Métodos de enseñanza

Son múltiples los métodos de enseñanza. Debemos tener presente que la enseñanza no debe olvidar sus objetivos; por lo que una excesiva erudición no es el conducto óptimo. Como se ha dicho, el arte de enseñar consiste en callar lo que no es necesario decir.

Comencemos por examinar las dos técnicas pedagógicas más extendidas y en cierto modo más antagónicas.

**Lección magistral.** El profesor expone un tema relacionándolo con los temas anteriores. Caben diversas posibilidades: exposición ordenada de los temas (de acuerdo con el esquema lógico definición-proposición-demostración) o el planteamiento por el profesor de un problema práctico cuya discusión origine el desarrollo de toda una teoría.

**Método heurístico.** El trabajo personal del alumno es fundamental. Se trata que el estudiante analice por su cuenta la materia bajo la supervisión del profesor que indica los objetivos y ayuda con sus puntualizaciones y explicaciones (véase [53]).

Ambos métodos deben ser complementarios y un buen profesor ha de extraer lo mejor de ambos. Desgraciadamente, el método heurístico es muy lento, por lo que sólo es aplicable a grupos reducidos.

Hemos intentado construir un proyecto docente flexible que ocupa una posición intermedia entre los anteriormente descritos. No distinguiremos entre clases teóricas y de problemas, plantearemos problemas para interpretar el significado de un teorema o una definición o para introducir una determinada parte de la teoría y al final de cada tema para asentar todos aquellos resultados que se acaban de explicar y así como sus aplicaciones.

Aconseja el matemático Puig Adam recurrir a la intuición. Como homenaje a su figura reproducimos su famoso *decálogo de la didáctica*, donde cada precepto queda resumido en una sola palabra:

**I - Adaptación.** No adoptar una didáctica rígida, sino acomodarla en cada caso al alumno, observándole atentamente.

**II - Genetismo.** No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución.

**III - Vitalismo.** Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

**IV - Graduación.** Graduar cuidadosamente los planos de abstracción

**V - Heurismo.** Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno

**VI - Interés.** Estimular la actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

**VII - Autocrítica.** Promover en todo momento la autocorrección.

**VIII - Maestría.** Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

**IX - Expresión.** Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

**X - Éxito.** Procurar a todos los alumnos éxitos que eviten su desaliento.

## 0.4. Desarrollo Teórico

Hemos optado por la lección magistral a la hora de comunicar al alumno los conocimientos que necesita y que hemos fijado en nuestros objetivos. No significa esto que las clases teóricas deban ser un monólogo. El profesor debe estimular la participación de los alumnos, por ejemplo, mediante la intercalación de preguntas que les obliguen a pensar. Es tarea del profesor aprovechar estas preguntas para hacer más dinámica su explicación, distinguiendo cuáles son interesantes para ser contestadas en ese momento y cuáles son preferibles declinar la respuesta e invitar al alumno a seguir su intuición y buscar dicha respuesta por sí mismo. Este diálogo permite al profesor conocer mejor a los alumnos, corregir errores, explicar con mayor fluidez los puntos que a los alumnos les resulten fáciles, insistiendo en los más difíciles e incluso alterar el ritmo de la clase a fin de adecuarlo más a las características del grupo en ese momento.

Por otra parte, siempre que el tema lo permita, podremos cambiar el sistema de conferencia por el heurístico, guiando al alumno mediante algunas sugerencias que le ayuden a superar los pasos difíciles. Es provechoso seguir su razonamiento hasta el final, aunque haya escogido un camino equivocado o excesivamente largo, ya que de los errores también se aprende. También creemos conveniente dejar al alumno la demostración de alguna cuestión teórica que le sea accesible, con lo que fomentaremos el hábito de la deducción y la práctica en el uso de los conceptos adquiridos. Al mismo tiempo adquirirá práctica en abordar problemas nuevos, buscando un modelo conocido que se ajuste a la cuestión planteada.

Otro sistema para favorecer la presencia activa del alumno es entregar apuntes por anticipado. La distribución de apuntes tiene puntos a favor y en contra. Entre los aspectos positivos el alumno no distrae su atención con la necesidad de tomar notas. En contrapartida este sistema puede degenerar en que los alumnos dejen de asistir a clase, no consulten bibliografía, distraigan su atención al tener la seguridad de poseer de antemano por escrito la información necesaria, ... El método de apuntes es ideal en situaciones más bien utópicas, pocos alumnos por grupo, muy trabajadores e interesados en el tema; situación que no es con mucho la actual en nuestras aulas.

Los ejemplos pueden utilizarse como comprobación de la teoría permitiendo en ocasiones encontrar la técnica necesaria para la demostración del caso general. Es indudable que dan mayor valor a la teoría, pudiendo emplearse para generar y mejorar la intuición. Asimismo, no sólo deben mostrar porqué funcionan los métodos, sino también cuando no. Aprendemos

mucho de problemas cuya solución no corresponde con lo que esperábamos. A menudo se desarrollan nuevas ideas al investigar las razones por las que algunos métodos fallan.

Por otra parte, los ejemplos no se referirán a las matemáticas, sino también a otras ciencias para captar por un lado la atención del estudiante y por otro abrirle posibilidades de aplicación de los nuevos conceptos. Es por todo ello que los ejemplos irán intercalados, precediendo en unos casos y complementando en otros el desarrollo teórico. Éste es un objetivo para perseguir en todos los temas y creemos que el programa que proponemos se presta a ello.

Es conocido que las demostraciones matemáticas contribuyen a formar la mentalidad crítica del alumno y a hacerle despreciar argumentos falsos. Sin embargo, en ocasiones, cuando la prueba no aporta nada nuevo de interés es recomendable suprimirla. En estos casos es preferible la delimitación, mediante ejemplos y contraejemplos de la validez del teorema.

## 0.5. Desarrollo práctico

El desarrollo práctico es un complemento imprescindible del desarrollo teórico ya que en ocasiones un problema resuelto inmediatamente después de un resultado teórico sirve para su comprensión definitiva, y en otras un problema puede generalizarse dando lugar a una interesante propiedad.

A grandes rasgos, los objetivos del desarrollo práctico son los siguientes:

1. Aclarar los resultados teóricos ya conocidos.
2. Aplicar la teoría en la resolución de problemas de naturaleza real, físicos, técnicos, ...
3. Adquirir habilidad tanto en el manejo de las técnicas de resolución, como en reducir problemas a modelos ya conocidos.

Creemos que el salto de la teoría a una aplicación concreta es enorme. Exige estar muy familiarizado con los factores que intervienen en la modelización del problema y podemos decir que no se comprende bien un concepto hasta que no se aplica en numerosas situaciones concretas, lo que permite asimilar el concepto probando su potencia y limitaciones. Es por todo ello que las clases de problemas no pueden ser suprimidas en aras de una mayor información teórica.

Es importante no limitarnos a resolver una serie de problemas concretos en la pizarra; sino que la participación del alumno en el desarrollo práctico debe ser totalmente activa. El profesor también debe explicar porqué otros métodos no funcionan, resaltar la importancia de algunas de las hipótesis, corregir errores de concepto, etc.

## 0.6. Ubicación de las asignaturas

La asignatura de **Álgebra Lineal** es troncal, está en el primer curso de la carrera de ingeniero industrial tiene 6 créditos y es anual.

La asignatura de **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** es troncal, está en el segundo curso de la carrera de ingeniero industrial tiene 3 créditos y es del primer cuatrimestre.

La asignatura de **Análisis Vectorial** es troncal, está en el primer curso de la carrera de ingeniero de telecomunicación tiene 4'5 créditos y es del segundo cuatrimestre.

La asignatura de **Matemáticas** es troncal, está en el segundo curso de la carrera de ingeniero de telecomunicación tiene 6 créditos y es del primer cuatrimestre.

## 0.7. Evaluación

La última etapa de la enseñanza es la evaluación. El profesor ha de determinar de algún modo cuándo un alumno ha alcanzado los objetivos del programa. El método ideal consistiría evidentemente en un conocimiento personal y profundo de las capacidades y aptitudes de cada uno de los alumnos. El elevado número de alumnos en las aulas hace imposible llevar a la práctica este método en la mayoría de los casos.

Optaremos por el clásico examen con dos convocatorias por matrícula. En cuanto a las características generales de estas pruebas debemos observar algunos criterios generales:

1. Cada prueba será amplia, intentando evitar el factor suerte, y consistirá de cuestiones teóricas y de problemas. En cualquier caso deberán evitarse los exámenes de naturaleza puramente memorística.
2. Se debe exigir al alumno la correcta utilización del lenguaje y terminología propios de la asignatura.
3. Es necesario valorar la exposición lógica, deducción e intuición de las cuestiones en la resolución de los problemas.
4. Las pruebas se harán simultáneamente a todos los alumnos del mismo curso, para evitar los agravios comparativos que podrían surgir entre exámenes distintos. Por otra parte, un mismo profesor debe corregir la misma pregunta a todos los alumnos, incluso a los de grupos a los cuales el profesor no imparte clase, de forma que la tendencia personal afecte por igual a todos los alumnos del curso.

En los apéndices A, B, C y D hemos incluido un modelo de examen final de cada asignatura.

## 0.8. El uso de libros

El libro de texto ha extremado posiciones como medio didáctico, exagerando unas veces, hasta hacerlo imperar en la enseñanza como exclusiva fuente del saber, negando otras su eficacia.

En la enseñanza media la mayoría de los alumnos han tenido a su disposición uno de estos libros por cada asignatura. No ha habido consulta bibliográfica adicional por el estudiante. Llega, pues, a la universidad con el mal hábito de consultar una única fuente de información. Es ésta una costumbre que debemos ayudarle a olvidar.

Los contenidos de la asignaturas de las que consta este proyecto docente se encuentran básicamente en un libro para cada asignatura: Para las asignaturas de *Álgebra Lineal* y

*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* proponemos [37], para la de *Análisis Vectorial* usaremos [50] y para la de *Matemáticas* ofrecemos [40].

Pero esto no significa que nos debamos restringir a un sólo libro para cada asignatura. Como bibliografía suplementaria incluimos los siguientes libros: Para *Álgebra Lineal*: [51, 55, 68]. Para *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*: [11, 13, 45, 62, 75]. Para *Análisis Vectorial*: [12, 17, 61]. Puesto que los alumnos de la asignatura de *Matemáticas* ya son de segundo curso, podemos dar una bibliografía más abundante; para cada tema proponemos varios libros, que se detallarán cuando se exponga el proyecto docente más adelante. Podemos decir que los contenidos de las asignaturas se encuentran dispersos en varios libros, aunque concentrados en uno sólo. Es tarea del profesor conseguir un todo homogéneo. No se trata, obviamente, de elaborar una asignatura a base de “pegar” trozos de distintos libros.

Es conveniente señalar al alumno que, aunque la asignatura consiste en la materia expuesta en clase, no se debe limitar a estudiar esta materia, ya que malas interpretaciones de lo dicho en clase o errores no percibidos pueden crearle gran confusión. El alumno debe tomar apuntes en clase y consultar con el profesor aquello que no entienda; pero al mismo tiempo debe acostumbrarse a manejar libros de consulta que complementen la explicación del profesor.

Pero la conveniencia de manejar libros de consulta se convierte en necesidad en las clases prácticas. Los alumnos no deben resolver sólo los problemas planteados en clase, sino que han de usar la bibliografía que el profesor les ha suministrado, sobre todo de libros donde se combinen los problemas resueltos con los propuestos, para conseguir la habilidad suficiente en el manejo de los métodos y técnicas de resolución.



**Parte I.**

**Programa de Álgebra Lineal**



# Introducción

La finalidad de este curso es presentar la teoría básica y los métodos propios del álgebra lineal, en vista a posteriores estudios o aplicaciones.

Creemos que los ejemplos concretos han de preceder a la abstracción. Sin embargo, en el temario no hemos incluido las matrices y sistemas de ecuaciones lineales en primer lugar. El álgebra lineal trata de vectores y creemos que los estudiantes necesitan ver los vectores (en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  con el fin de adquirir percepción geométrica.

El programa no es parco en aplicaciones. Es importante que los alumnos puedan apreciar la gran variedad de problemas en los que puede aplicarse el álgebra lineal.

Hemos distribuido la asignatura en estas unidades:

**Capítulo 1** GEOMETRÍA DE  $\mathbb{R}^2$  Y  $\mathbb{R}^3$ .

**Capítulo 2** MATRICES.

**Capítulo 3** SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

**Capítulo 4** ESPACIOS VECTORIALES.

**Capítulo 5** APLICACIONES LINEALES.

**Capítulo 6** CURVAS DE BÉZIER.

**Capítulo 7** ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO.

**Capítulo 8** APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS.

**Capítulo 9** TEORÍA ESPECTRAL.

**Capítulo 10** APLICACIONES DE LA TEORÍA ESPECTRAL.

Comentamos brevemente el contenido de cada uno de los capítulo.

El CAPÍTULO 1 trata de vectores de  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  y desarrolla muchos conceptos que se repiten a lo largo del curso haciendo hincapié en la intuición geométrica. En primer lugar desarrollamos las operaciones elementales (suma y producto por escalares) e introducimos los conceptos de independencia lineal, sistemas generadores y bases. A continuación introducimos el producto escalar usual y el producto vectorial. Aplicamos estas operaciones a problemas geométricos concretos. Por último se estudian algunas formas de las ecuaciones de rectas y planos.

El CAPÍTULO 2 estudia las matrices. Introducimos las matrices para mostrar cómo escribir sistemas de ecuaciones de manera compacta. Por medio de esta introducción definimos las

operaciones básicas: suma, multiplicación por escalares, multiplicación de matrices y potenciación de matrices. Estudiamos sus propiedades elementales, así como aplicaciones a modelos concretos, como los procesos estocásticos o la teoría de grafos. El tema se completa con la introducción del determinante, la inversión de matrices y las operaciones por bloques.

En el CAPÍTULO 3 estudiamos los métodos directos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. De todos los métodos disponibles utilizamos el *algoritmo de eliminación de Gauss* por ser el que menos operaciones necesita. Hacemos énfasis en la representación matricial del método de Gauss que permiten las factorizaciones *LU* y de Choleski. Explicamos el algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa y el rango de una matriz. Aplicamos la teoría desarrollada para resolver problemas concretos de otras ramas de la ciencia, como son el modelo de tráfico en una red de calles o el cálculo de las intensidades en determinados circuitos eléctricos.

En el CAPÍTULO 4 estudiamos la noción de espacio vectorial, explicando los ejemplos más importantes y en especial los espacios de funciones. Definimos las ideas básicas del álgebra lineal: subespacios, dependencia lineal, sistemas generadores, bases, dimensión y cálculo coordenado.

El CAPÍTULO 5 estudia las aplicaciones lineales. Damos numerosos ejemplos geométricos. Estudiamos las propiedades de las aplicaciones lineales y el núcleo y la imagen. El punto más importante del tema es el estudio de la matriz asociada a una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita. Se procede a la construcción y se considera la relación entre la matriz de una aplicación lineal y ésta. Se usan las aplicaciones lineales en muchos campos diversos: encontrar soluciones polinómicas de determinadas ecuaciones diferenciales, estudio de proyecciones en el diseño gráfico, las fórmulas de cuadratura de Newton y de Gauss, calcular la primitiva de algunas funciones, ...

En el CAPÍTULO 6 se introducen las curvas de Bézier. Creemos conveniente la inclusión de este tema por dos motivos: Estas curvas son muy usadas en el diseño industrial y una introducción a este tipo de curvas no requiere herramientas matemáticas muy sofisticadas. El algoritmo de de Casteljau (en forma matricial) es el elegido para implementar las curvas de Bézier.

El CAPÍTULO 7 trata los espacios vectoriales euclídeos. Podemos hablar de longitudes y ángulos entre vectores, de modo que la geometría que obtenemos es esencialmente idéntica a la de  $\mathbb{R}^3$ . Dos son los conceptos que, por su importancia y aplicación, están presentes a lo largo del tema: el de la proyección ortogonal y el de sistema ortogonal de vectores. El primero de ellos juega un papel clave en el método de los mínimos cuadrados. Como una aplicación aproximamos funciones mediante las proyecciones de éstas sobre ciertos subespacios obteniendo entre otras cosas, aproximaciones de Fourier.

En el CAPÍTULO 8 desarrollamos el método de los mínimos cuadrados utilizado para ajustar una recta a una nube de puntos obtenidos experimentalmente. Pero no nos detenemos en rectas, sino que aproximamos mediante paráolas, cúbicas o incluso por una clase más amplia. También ajustamos mediante un modelo no lineal importante: el exponencial. Asimismo, vemos un método sencillo para calcular la distancia entre variedades lineales de  $\mathbb{R}^n$ .

En el CAPÍTULO 9 estudiamos los conceptos de valor propio y vector propio así como sus propiedades más importantes. Este estudio nos permite descomponer una cierta clase de matrices (las diagonalizables) como  $SDS^{-1}$ , siendo  $S$  una matriz invertible y  $D$  una matriz

diagonal. También estudiamos los valores y vectores propios de matrices simétricas, lo que nos permite encontrar una factorización del tipo  $SDS^t$ , siendo  $S$  una matriz ortogonal y  $D$  una matriz diagonal.

En el CAPÍTULO 10 aplicamos la teoría desarrollada en el tema anterior. Vemos cómo calcular de potencias de matrices diagonalizables, estudiamos las sucesiones dadas por una recurrencia lineal, los procesos de Márkov y las ecuaciones de cónicas y cuádricas.

El libro básico que seguimos es [37], aunque en cada tema indicamos bibliografía suplementaria donde el alumno puede ampliar temas o encontrar problemas propuestos y resueltos.

## Índice del programa

### **Capítulo 1** Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ .

- 1.1. La geometría y el álgebra de vectores.
- 1.2. El producto escalar.
- 1.3. Usos geométricos del producto escalar.
- 1.4. El producto vectorial.
- 1.5. Ecuaciones de rectas y planos.

### **Capítulo 2** Matrices.

- 2.1. Primeras definiciones.
- 2.2. Potenciación de matrices.
- 2.3. Determinante de una matriz cuadrada.
- 2.4. Inversa de una matriz cuadrada.
- 2.5. Matrices por bloques.

### **Capítulo 3** Sistemas de ecuaciones lineales.

- 3.1. Sistemas lineales.
- 3.2. El método de eliminación de Gauss.
- 3.3. Factorizaciones  $LU$  y de Choleski.
- 3.4. Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz.
- 3.5. Pivotación parcial.

### **Capítulo 4** Espacios vectoriales.

- 4.1. Definiciones y primeras propiedades.
- 4.2. Subespacios vectoriales.
- 4.3. Bases en un espacio vectorial.
- 4.4. Cálculo coordenado en un espacio vectorial de dimensión finita.

### **Capítulo 5** Aplicaciones lineales.

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. La matriz asociada a una aplicación lineal.
- 5.3. Aplicaciones afines.
- 5.4. El núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

### **Capítulo 6** Curvas de Bézier.

- 6.1. El algoritmo de de Casteljau.
- 6.2. Curvas de Bézier y polinomios de Bernstein.
- 6.3. Propiedades de las curvas de Bézier.

**Capítulo 7** Espacio vectorial euclídeo.

- 7.1. Producto escalar.
- 7.2. Norma y ángulo en un espacio euclídeo.
- 7.3. Proyecciones sobre subespacios.
- 7.4. Bases ortogonales y proceso de Gram-Schmidt.
- 7.5. Matrices ortogonales y unitarias. Factorización  $QR$ .

**Capítulo 8** Aproximación por mínimos cuadrados.

- 8.1. Método de los mínimos cuadrados.
- 8.2. Ajuste de datos.
- 8.3. Mínimos cuadrados ponderados.
- 8.4. Distancia entre variedades lineales.

**Capítulo 9** Teoría espectral.

- 9.1. Conceptos básicos.
- 9.2. Diagonalización de matrices.
- 9.3. Diagonalización de matrices hermíticas.

**Capítulo 10** Aplicaciones de la teoría espectral.

- 10.1. Potencias de matrices.
- 10.2. Cálculo de sucesiones dadas por recurrencia lineal.
- 10.3. Cadenas de Márkov lineales.
- 10.4. Identificación de cónicas y cuádricas.



# 1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

## OBJETIVOS:

Saber las operaciones básicas en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ : suma, producto por escalares, producto escalar y producto vectorial. Empezar a que se intuyan conceptos más abstractos como independencia lineal, sistema generador o base. Aplicar todo lo anterior a problemas geométricos concretos. Reconocer las ecuaciones más importantes de rectas y planos.

Los<sup>1</sup> antecedentes históricos del estudio de la geometría plana y espacial se remontan a la introducción por Descartes (1596–1650) en el siglo XVII de la geometría analítica que lleva su nombre. La idea de vector entró en las matemáticas calladamente. Stevin (1548–1620) empleó la ley del paralelogramo en problemas de estática y Galileo (1564–1642) enunció esta ley de forma explícita.

Después de la representación geométrica de los números complejos proporcionada por Wessel (1745–1818), Argand (1768–1822) y Gauss (1777–1855) fuera algo familiar, los matemáticos se percataron de que los números complejos podían usarse para trabajar los vectores en el plano. Sin embargo, la utilidad de los números complejos está limitada a problemas planos. La creación de un análogo tridimensional útil de los números complejos se debe a Hamilton (1805–1865) cuando descubrió los cuaterniones en 1843.

Mientras Hamilton trabajaba con sus cuaterniones, Grassmann (1809–1877) estaba desarrollando la idea moderna de vector. En este sentido, Grassmann definió de forma moderna la suma y el producto por escalares de vectores de  $\mathbb{R}^n$  e introdujo dos clases de productos: el interior (véase la introducción al Capítulo 7) y el exterior. Aplicó estos productos para resolver problemas geométricos concretos (el producto exterior de vectores no es hoy una herramienta estándar en la matemática moderna, véase [33] para un tratamiento moderno).

La formulación final se debe a Gibbs (1839–1903) en un panfleto de circulación privada entre sus alumnos y por Heaviside (1850–1925) en el libro *Electromagnetic Theory* publicado en 1893. En ambos libros se introdujeron el producto escalar y el vectorial de forma moderna.

## 1.1. La geometría y el álgebra de vectores

Comenzamos por definir

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

---

<sup>1</sup>La mayor parte de las notas históricas de este proyecto docente están sacadas de [43].

## 1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

---

e interpretamos geométricamente lo que es un vector<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^2$  y de  $\mathbb{R}^3$  para a continuación definir de forma algebraica la suma de vectores y el producto por escalares. Al mismo tiempo damos la idea geométrica de estas operaciones (para la suma, la regla del paralelogramos; y para el producto por escalares, hablaremos de elongaciones, contracciones y sentido de vectores). Véase la figura 1.1.

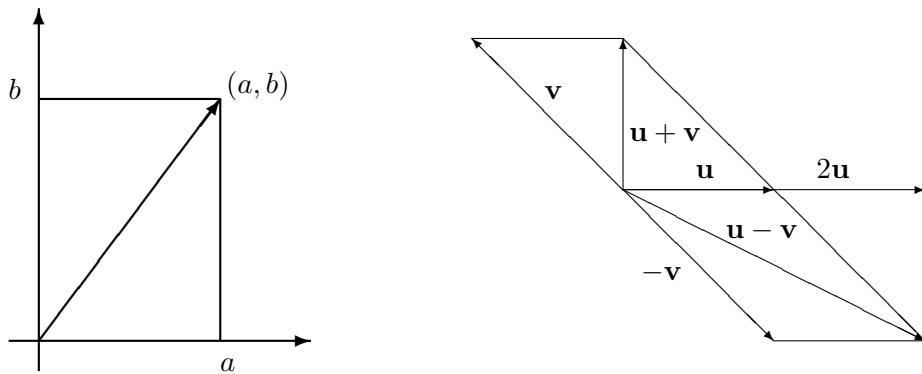


Figura 1.1.: Un vector de  $\mathbb{R}^2$ . Explicación geométrica de la suma, resta y multiplicación por escalares.

Estas operaciones se generalizan fácilmente a  $\mathbb{R}^n$  y a  $\mathbb{C}^n$ . Las ideas de **combinación lineal**, **independencia lineal** y **sistema generador** se comprenden fácilmente mediante ejemplos geométricos.

Con esta álgebra rudimentaria de vectores podemos calcular el vector que une dos puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . De  $\mathbf{a} + \overrightarrow{\mathbf{ab}} = \mathbf{b}$  deducimos que  $\overrightarrow{\mathbf{ab}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Véase la figura 1.2.

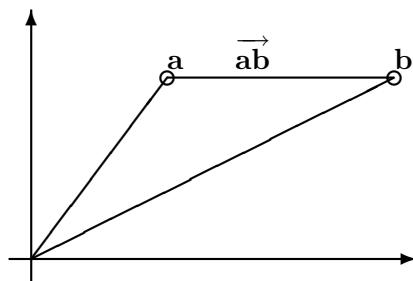


Figura 1.2.: Vector que une dos puntos.

En realidad no es demasiado preciso lo que se ha hecho, pues hablando con rigor, no es lo mismo un espacio de puntos (**espacio afín**) que un espacio de vectores (**espacio vectorial**) o dicho de un modo más coloquial: no es lo mismo saber dónde estamos que saber hacia dónde

<sup>2</sup>En todo el proyecto docente usaremos el convenio de representar a los vectores con letras minúsculas en negrita:  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ . Debido a la imposibilidad de diferenciar las negritas en pizarra, creemos oportuno (tal como se hace en el resto de asignaturas) representar a los vectores con una flechita encima:  $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ . Creemos oportuno desde el punto de vista pedagógico representar a los vectores y a los escalares de distinta manera, aunque por el contexto sea claro.

vamos<sup>3</sup>. Sin embargo, ya que como los puntos y vectores serán representados de la misma manera (mediante elementos de  $\mathbb{R}^n$ ), los vamos a tratar de la misma manera. Creemos que la introducción prematura de estructuras algebraicas perjudican, ya que el alumno no entiende la razón de definir un nuevo concepto más general sin encontrar aplicaciones concretas.

Pensamos oportuno incluir como ejemplos o problemas guiados una serie de teoremas geométricos en donde el alumno pueda convencerse de la potencia de los métodos vectoriales. Entre estos podemos incluir:

- Si se unen los puntos medios de un cuadrilátero arbitrario se obtiene un paralelogramo.
- Las tres medianas de un triángulo son concurrentes.
- Si  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son tres puntos no alineados y  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  son puntos que cumplen  $\overrightarrow{\mathbf{ax}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{ab}}$  y  $\overrightarrow{\mathbf{ay}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{ac}}$ , entonces  $\overrightarrow{\mathbf{xy}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{bc}}$  (teorema de Tales).

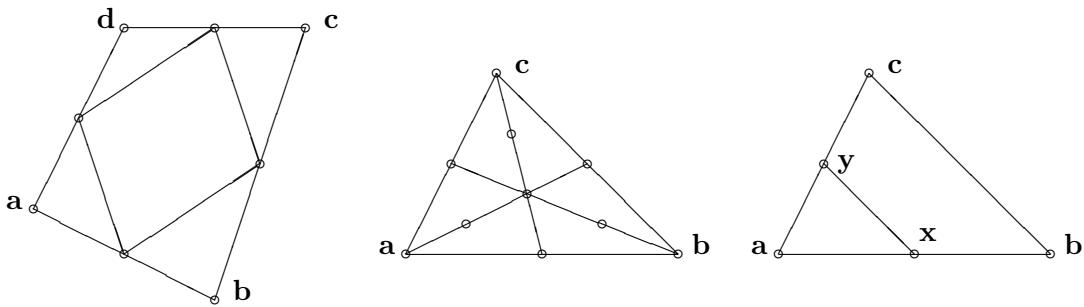


Figura 1.3.: Tres teoremas de geometría afín.

Las demostraciones siguientes muestran con claridad la ventaja de usar vectores como entidades fundamentales frente al cálculo coordenada a coordenada:

- Sean  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  los cuatro puntos. Hay que probar que el vector que une los puntos  $(\mathbf{a} + \mathbf{d})/2$  y  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$  coincide con el vector que une los puntos  $(\mathbf{d} + \mathbf{c})/2$  y  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})/2$ .
- Sea  $\mathbf{p}$  el punto medio del segmento  $\mathbf{bc}$  y sea  $\mathbf{g}$  el punto del segmento  $\mathbf{ap}$  tal que  $\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{ap}} = \overrightarrow{\mathbf{ag}}$ . Poco cuesta probar que  $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ . De aquí ya se puede deducir que las tres medianas concurren en  $\mathbf{g}$ . Además se ha probado que la distancia entre el baricentro y el pie de la mediana es la tercera parte de la longitud de la mediana.
- Es trivial a partir de  $\overrightarrow{\mathbf{xy}} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (\mathbf{a} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{ac}}) - (\mathbf{a} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{ab}})$ .

Las pruebas coordenada a coordenada no hacen más que obscurecer la situación. Por ejemplo, en la demostración de la concurrencia de las tres medianas, aún tomando un sistema adecuado,  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (b, 0)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ , habría que probar que si  $r$  es la recta que pasa por  $(0, 0)$  y por  $((b + c_1)/2, c_2)$ ; si  $s$  es la recta que pasa por  $(b, 0)$  y por  $(c_1/2, c_2/2)$  y si  $t$  es la recta que pasa por  $(c_1, c_2)$  y por  $(b/2, 0)$ ; entonces  $r$ ,  $s$  y  $t$  son concurrentes<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Esta distinción es clara en geometría diferencial, en donde hay una clara diferencia entre los puntos de una variedad y los vectores tangentes a ésta.

<sup>4</sup>La introducción de un sistema de coordenadas oblicuo hace la demostración un poco más sencilla: basta

## 1.2. El producto escalar

Se define el producto escalar de los vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  de la forma siguiente:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

La definición abstracta de producto escalar en espacios vectoriales se dejará para más adelante. De momento hacemos énfasis que el resultado es un número real.

A continuación damos las propiedades algebraicas más importantes: Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  y si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

- a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ .
- b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ .
- c)  $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .
- d)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  si y sólo si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Las demostraciones son muy rutinarias y sólo hacemos alguna de éstas. Recordamos cómo se calculan longitudes en el plano y en el espacio. En  $\mathbb{R}^2$ , la longitud del vector  $\mathbf{u} = (a, b)$  es  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , como se aprecia en la figura 1.4. Observamos que  $a^2 + b^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ .

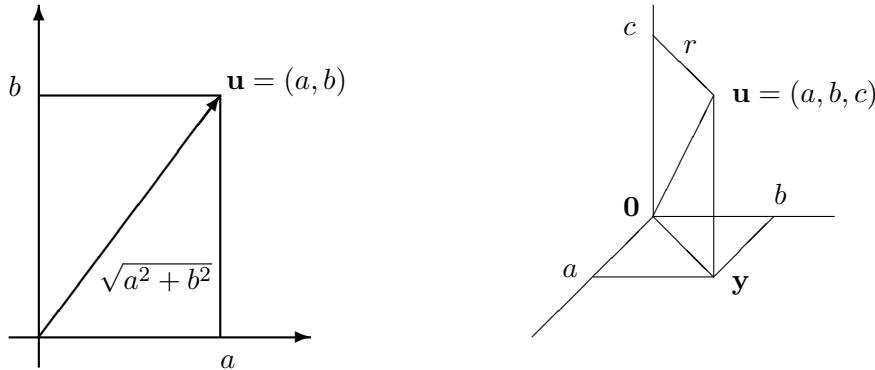


Figura 1.4.: Longitud de vectores en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ .

En  $\mathbb{R}^3$ , si nos fijamos en la figura 1.4, la longitud del vector  $\mathbf{u} = (a, b, c)$  (aplicando el teorema de Pitágoras dos veces consecutivas) vale  $\sqrt{r^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . De nuevo tenemos  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = a^2 + b^2 + c^2$ . Lo que motiva la siguiente definición:

La **longitud** o **norma** de un vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  se define como  $\|\mathbf{u}\| = +\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ . Las propiedades básicas son las siguientes: Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , entonces

- a)  $\|\mathbf{u}\| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- b)  $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$ .

tomar  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0)$  y  $\mathbf{c} = (0, 1)$ . Pero a un nivel temprano, un alumno medio no comprende bien la diferencia entre conceptos afines y euclídeos. Claramente, aquí se ha usado que los conceptos de concurrencia y mediana son afines.

Dividiendo un vector no nulo por su norma se obtiene otro vector de norma 1 con la misma dirección y sentido. Este proceso se suele llamar **normalización**.

El producto escalar también sirve para medir ángulos. Para motivar la definición de ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^n$ , primero vemos cómo se usa el producto escalar para calcular ángulos entre vectores de  $\mathbb{R}^2$ . La herramienta básica es ahora el teorema del coseno de trigonometría plana. Vamos a calcular el ángulo  $\theta$  entre los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

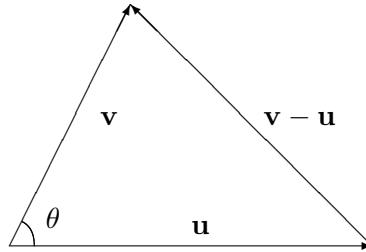


Figura 1.5.: Ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^2$ .

Tras aplicar el teorema del coseno obtenemos  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta$ . Por otra parte, desarrollando de forma algebraica,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Luego, en  $\mathbb{R}^2$  se cumple que si  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  entonces  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta$ . Esto motiva la definición general de ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, hemos de demostrar previamente la **desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunjakowski** para que la definición general de ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^n$  sea rigurosa. Con esta desigualdad podemos definir el ángulo entre dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no nulos de  $\mathbb{R}^n$  como el único valor de  $\theta \in [0, \pi]$  de modo que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Decimos que dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son **perpendiculares** o **ortogonales** si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Podemos enunciar y probar el **teorema de Pitágoras** en  $\mathbb{R}^n$ : sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$  si y sólo si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

La desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunjakowski permite además demostrar la desigualdad triangular.

### 1.3. Usos geométricos del producto escalar

La noción de norma de vectores permite hablar de la **distancia**  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  entre dos puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

Hacemos algunos ejemplos de problemas geométricos concretos relativos a distancia y ángulos en  $\mathbb{R}^3$ , en donde el uso del producto escalar mecaniza los cálculos (la mayoría están sacados del primer capítulo de [55]). Al igual que hemos hecho con la geometría afín, podemos incluir, si el nivel de la clase lo permitiera, algunos ejemplos o problemas guiados sobre algunos teoremas de la geometría euclídea. Por ejemplo, los siguientes (véase la figura 1.6):

## 1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

---

- a) Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores, entonces  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$  (La ley del paralelogramo).
- b) Las tres alturas de un triángulo son concurrentes (en un punto llamado **ortocentro**).
- c) Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes (en un punto llamado **circuncentro**).
- d) El baricentro  $\mathbf{g}$ , el ortocentro  $\mathbf{h}$  y el circuncentro  $\mathbf{q}$  están alineados (en la llamada **recta de Euler**). Además, se cumple  $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{h} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$ .

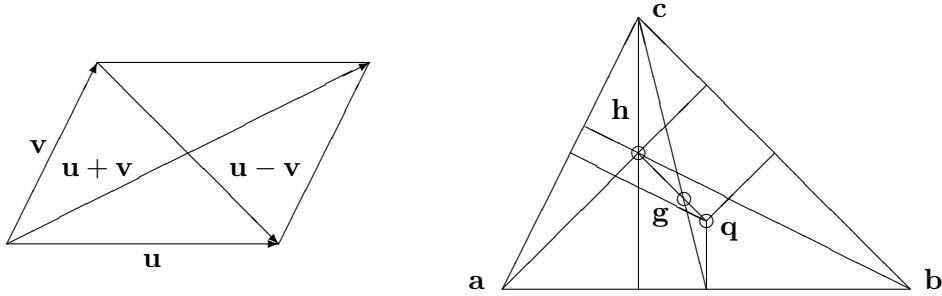


Figura 1.6.: Algunos teoremas de la geometría euclídea.

Las demostraciones son casi triviales usando vectores como entidades fundamentales (las demostraciones de b) y d) se han obtenido de [33]).

- a) Basta desarrollar y simplificar  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$ .
- b) Basta comprobar que para todo  $\mathbf{h}$  se cumple

$$\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{h} \rangle = 0,$$

y observar que si se anulan dos sumandos, entonces se anula el tercero.

- c) Si  $\mathbf{q}$  está en la mediatrix del lado  $\mathbf{ab}$  entonces  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \mathbf{q} \rangle = 0$ . Esta igualdad equivale a  $d(\mathbf{a}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{q})$ .
- d) Sumando  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{h} \rangle = 0$  y  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{q} \rangle = 0$  se tiene  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{h} - 2\mathbf{q} \rangle = 0$ , es decir,  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, 3\mathbf{g} - \mathbf{h} - 2\mathbf{q} \rangle = 0$ , luego  $3\mathbf{g} - \mathbf{h} - 2\mathbf{q}$  es perpendicular al lado  $\mathbf{ab}$ . Razonando de forma análoga para los otros lados,  $3\mathbf{g} - \mathbf{h} - 2\mathbf{q}$  es perpendicular a todos los lados, luego  $3\mathbf{g} - \mathbf{h} - 2\mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

Quienquiera que haya intentado probar d) usando coordenadas se dará cuenta de la elegancia del método vectorial. También podemos citar algunos teoremas sobre circunferencias (véase la figura 1.7):

- a) Si  $\mathbf{ab}$  es un diámetro de una circunferencia, entonces el ángulo  $\mathbf{acb}$  es recto para cualquier punto  $\mathbf{c}$  de la circunferencia.

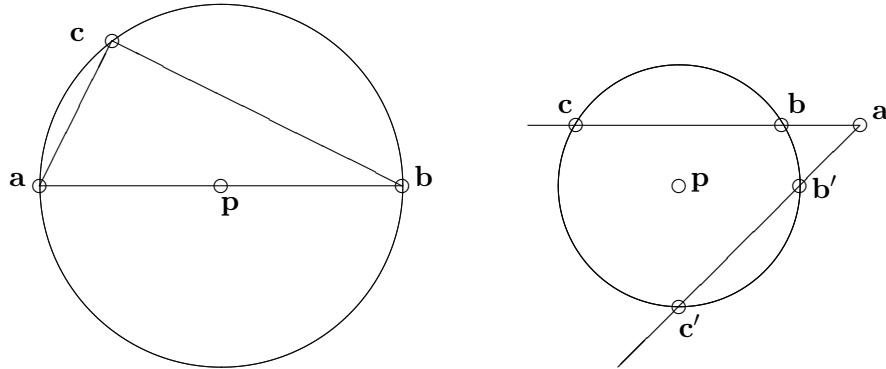


Figura 1.7.: Dos teoremas sobre circunferencias.

- b) Sea  $r$  una recta que pasa por un punto  $\mathbf{a}$  y sean  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  los dos puntos de corte de  $r$  con una circunferencia de centro  $\mathbf{p}$  y radio  $R$ . Entonces  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = |d(\mathbf{a}, \mathbf{p})^2 - R^2|$ . En particular se sigue que  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})d(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  no depende de la recta trazada por  $\mathbf{a}$ .

Las demostraciones son de nuevo muy fáciles:

- a) Basta observar  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{b} \rangle = \langle (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{c}), (\mathbf{p} - \mathbf{b}) - (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \rangle$  y  $\mathbf{a} - \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{b}$ .
- b) La ecuación de la circunferencia es  $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 = R^2$ . Sea  $\hat{\mathbf{v}}$  un vector de norma 1 y  $\lambda, \mu$  tales que  $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \lambda\hat{\mathbf{v}}$  y  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu\hat{\mathbf{v}}$ . Puesto que  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  están en la circunferencia, es fácil ver que  $\lambda$  y  $\mu$  son raíces de la ecuación  $R^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{p}\|^2 + 2x\langle \mathbf{a} - \mathbf{p}, \hat{\mathbf{v}} \rangle + x^2$ . Luego  $\lambda\mu = \|\mathbf{a} - \mathbf{p}\|^2 - R^2$ . Ahora la conclusión es trivial de obtener.

## 1.4. El producto vectorial

Definimos (sólo en  $\mathbb{R}^3$ ) el **producto vectorial** de los vectores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Decimos que una forma de acordarse de la definición es usando el siguiente determinante simbólico:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$ . Aunque en este momento no se haya definido el concepto de determinante, la mayor parte de los alumnos sí que lo saben (aunque no la supieran, la definición es totalmente independiente del concepto de determinante). Asimismo, observamos que la expresión (1.1) no es rigurosa, puesto que las entradas del determinante deben ser números y no vectores.

Enunciamos las propiedades básicas: Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$  y si  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces

- a)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ .

- b)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ .
- c)  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- d)  $(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ .
- e)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$ .
- f)  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$ . De donde se deduce que  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

No demostramos ninguna propiedad pues son absolutamente rutinarias y no aportan mucho.

Aplicamos el producto vectorial para hacer algunos problemas geométricos, como calcular un vector perpendicular a dos vectores dados o calcular el área de un triángulo. También se puede demostrar o poner como ejercicio no rutinario demostrar el teorema de los senos de trigonometría: si en la figura 1.5 llamamos  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  y si multiplicacmos vectorialmente por  $\mathbf{u}$  tenemos  $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ . Aplicando las propiedades anteriores del producto vectorial debería ser fácil probar este teorema.

## 1.5. Ecuaciones de rectas y planos

La experiencia docente nos muestra que si bien un alumno medio sabe manejar algunas ecuaciones de rectas en el plano el conocimiento de las rectas y planos en el espacio es prácticamente nulo. Por esta razón incluimos este punto en el temario dando un breve repaso.

### 1.5.1. Rectas en $\mathbb{R}^2$

Un dibujo muestra bastante bien la deducción de la **ecuación paramétrica** (o **ecuación vectorial**). Si la recta pasa por  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  y tiene un vector director  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , entonces

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u}, \quad (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2), \quad (1.2)$$

para  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

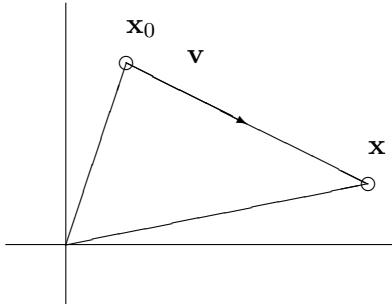


Figura 1.8.: Una recta en  $\mathbb{R}^2$ .

De (1.2) se obtiene fácilmente la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: basta hacer  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ . Observamos que de esta manera se puede parametrizar el segmento orientado  $\mathbf{ab}$  de la forma siguiente:  $\mathbf{x}(\lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  para  $\lambda \in [0, 1]$ .

Si en (1.2) se multiplica escalarmente por un vector normal a la recta, sea  $\mathbf{n}$ , se tiene que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{n} \rangle$  o desarrollando,  $ax + by = c$ , de donde se sigue que  $(a, b)$  es perpendicular a la recta. Otra forma de obtener esta última forma es a partir de (1.2) despejar  $\lambda$  (siempre que  $u_1 \neq 0 \neq u_2$ ).

### 1.5.2. Rectas en $\mathbb{R}^3$

La forma más útil es la paramétrica. La ecuación de rectas como intersecciones de planos la vemos más adelante cuando estudiemos los planos en  $\mathbb{R}^3$  (puesto que si  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  son vectores normales a los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  respectivamente, entonces un vector normal a  $\pi_1 \cap \pi_2$  es  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ).

### 1.5.3. Planos en $\mathbb{R}^3$

El tratamiento es muy similar a las rectas en  $\mathbb{R}^2$ : si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  son dos vectores directores del plano linealmente independientes y  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es un punto del plano, entonces la ecuación paramétrica o vectorial del plano es (véase la figura 1.9)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3). \quad (1.3)$$

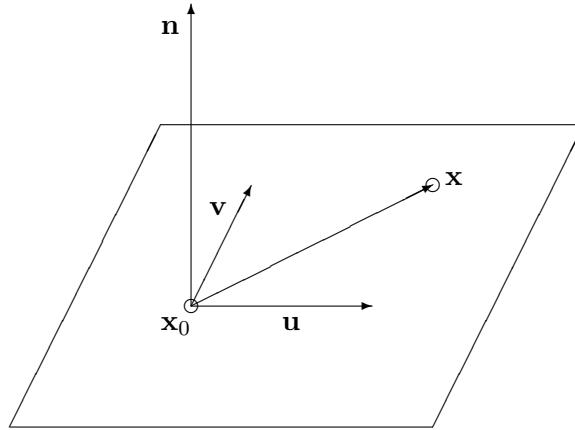


Figura 1.9.: Un plano en  $\mathbb{R}^3$ .

Multiplicando escalarmente (1.3) por un vector perpendicular a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , digamos  $\mathbf{n}$  (se puede calcular por medio de  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ), se tiene  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{n} \rangle$ , o de otro modo,  $ax + by + cz = d$ , de donde  $(a, b, c)$  es un vector normal al plano. Si se observa la figura 1.9 se ve que los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  son linealmente dependientes, por lo que los alumnos que conozcan los determinantes pueden comprender que otra ecuación del plano es  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ .

Hacemos algunos problemas (hay miles de libros llenos de problemas de esta clase). El cálculo de la distancia entre las variedades lineales vistas hasta el momento preferimos dejarlo hasta cuando estudiemos mínimos cuadrados, ya que en ese momento se verá una forma general de calcular estas distancias.

# Contenido del Capítulo 1

## 1. La geometría y el álgebra de vectores.

- Definición de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .
- Suma de vectores, producto por escalares. Combinación lineal, independencia lineal, sistemas generadores, bases.
- Vector que une dos puntos. Ejemplos geométricos.

## 2. El producto escalar.

- Definición. Propiedades elementales.
- Norma de vectores. Propiedades.
- Ángulo de vectores en  $\mathbb{R}^2$ . Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunjakowsky. Desigualdad triangular. Perpendicularidad. Teorema de Pitágoras.

## 3. Usos geométricos del producto escalar.

- Problemas geométricos.
- Algunos teoremas de la geometría euclídea.

## 4. El producto vectorial.

- Definición y propiedades elementales.
- Ejemplos geométricos.

## 5. Ecuaciones de rectas y planos.

- Rectas en  $\mathbb{R}^2$ .
- Rectas en  $\mathbb{R}^3$ .
- Planos en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2. Matrices

### OBJETIVOS:

Efectuar con fluidez las operaciones básicas entre matrices. Estudiar las principales propiedades de las matrices y sus operaciones. Conocer el concepto de determinante y su relación con el problema de la invertibilidad matricial. Saber pasar de un sistema de ecuaciones lineales a una ecuación matricial. Modelar matricialmente algunos problemas extraídos de otras asignaturas.

Los determinantes surgieron cuando se empezaron a resolver los sistemas de ecuaciones lineales. En 1693, Leibniz (1646–1716) usó un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas obteniendo un determinante. La solución de ecuaciones lineales fue obtenida por MacLaurin (1698–1746) publicada en 1748 en su *Treatise of algebra*. Cramer (1704–1752) publicó en 1750 el libro *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* la regla para determinar los coeficientes de una cónica general pasando por 5 puntos dados utilizando determinantes. En 1776 Bezout (1730–1783) demostró que la anulación del determinante de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas homogéneo es una condición necesaria y suficiente para que haya soluciones no nulas. Vandermonde (1735–1796), en 1776, fue el primero en dar una exposición coherente y lógica de la teoría de los determinantes como tales, aplicándolos a los sistemas de ecuaciones lineales. Se le considera como fundador de la teoría.

La palabra *determinante*, usada por primera vez por Gauss, la aplicó Cauchy (1789–1857) a los determinantes ya aparecidos en el siglo XVIII en un artículo publicado en 1815. La disposición de los elementos en tabla y la notación de subíndices dobles se le debe a él. Binet (1786–1856), en 1812, enunció el teorema de multiplicación, demostrado correctamente por Cauchy, que en notación moderna es  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Diríamos que el campo de las matrices estuvo bien formado aún antes de crearse. Los determinantes fueron estudiados a mediados del siglo XVIII. Un determinante contiene un cuadro de números y parecía deducirse de la inmensa cantidad de trabajos sobre los determinantes que el cuadro podía ser estudiado en sí mismo y manipulado para muchos propósitos. Quedaba por reconocer que al cuadro como tal se le podía proporcionar una identidad independiente de la del determinante. El cuadro por sí mismo es llamado *matriz*. La palabra matriz fue usada por primera vez por Sylvester (1814–1897) en 1850.

Es cierto, como dice Cayley (1821–1895), que la idea de matriz es lógicamente anterior a la de determinante, pero históricamente el orden fue el inverso. Cayley fue el primero en desarrollar de modo independiente el concepto de matriz en un artículo publicado en 1855, *A memoir on the theory of matrices*. Definió las matrices nula y unidad, la suma de matrices y señala que esta operación es asociativa y conmutativa. Cayley toma directamente de la representación del efecto de dos transformaciones sucesivas la definición de multiplicación de

dos matrices. Cayley señala que una matriz  $m \times n$  puede ser multiplicada solamente por una matriz  $n \times p$ . En este mismo artículo establece la fórmula de la inversa de una matriz y que una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es nulo.

A partir de este momento los trabajos sobre matrices se disparan. Debemos citar los trabajos de Jordan (1838–1922), Rouché (1832–1910) y a Frobenius (1849–1917). En el siglo XX es rara la rama de la matemática aplicada que no use la teoría de matrices. Podemos citar una afirmación profética hecha por el físico Tait (1831–1901) a mediados del siglo XIX: “*Cayley está forjando las armas para las futuras generaciones de físicos*”.

## 2.1. Primeras definiciones

Definimos **matriz** como un conjunto de  $n \times m$  elementos de  $\mathbb{R}$  o de  $\mathbb{C}$  (en lo sucesivo el cuerpo base se denotará  $\mathbb{K}$ ) dispuestos en una tabla que denotaremos usualmente con letras mayúsculas y sus entradas con letras minúsculas con dos subíndices denotando la fila y la columna. Definimos los tipos más importantes de matrices: cuadrada, vector fila, vector columna, diagonal, triangular superior y triangular inferior.

La introducción del significado de matriz se hace señalando desde el principio la relación de éstas con los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo los sistemas

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & 3y = 5 \\ 5x & - & 2y = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rcl} 2u & + & 3v = 5 \\ 5u & - & 2v = 3 \end{array} \right\}$$

tienen evidentemente las mismas propiedades y deben ser considerados los mismos.

El siguiente paso es definir la suma y la multiplicación por escalares. Introducimos la matriz nula de orden  $n \times m$  denotada por  $O_{n \times m}$  (en lo sucesivo se denotará simplemente  $O$  cuando el orden sea evidente por el contexto). Enunciamos las propiedades básicas de estas dos operaciones que se pueden resumir diciendo que el conjunto de matrices  $n \times m$  es un espacio vectorial<sup>1</sup>.

Para hacer más intuitiva la definición, a primera vista extraña, de la multiplicación matricial explicamos el siguiente ejemplo: Consideremos los dos sistemas siguientes:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 = z_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 = z_2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rcl} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = y_1 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = y_2 \end{array} \right\}$$

Al substituir los valores de  $y_i$  en el primer sistema vemos que las  $z_i$  se pueden expresar en función de las  $x_i$  obteniendo

$$\left. \begin{array}{rcl} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = z_1 \\ c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = z_2 \end{array} \right\}$$

tras hallar explícitamente los coeficientes  $c_{ij}$ . Definimos el producto de dos matrices de modo que  $(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$ . Indicamos que en este caso particular hemos obtenido que esta matriz  $(c_{ij})$  se ha obtenido “multiplicando las filas de  $(a_{ij})$  por las columnas de  $(b_{ij})$ ”. A continuación definimos el producto de una matriz  $A$  de orden  $n \times m$  por otra matriz  $B$  de orden  $m \times p$ , obteniendo una matriz  $AB = C$  de orden  $n \times p$  como sigue

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}.$$

---

<sup>1</sup>Aunque no se menciona el tecnicismo *espacio vectorial* ya que su definición se posterga al Capítulo 4.

A continuación escribimos un sistema de ecuaciones lineales como  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , siendo  $A$  una matriz  $n \times m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ . Siendo ésta una conversión muy importante.

Algunas propiedades de las operaciones matriciales son análogas a las correspondientes de las operaciones escalares: si  $A, B, C$  son matrices de órdenes apropiados y  $\lambda$  es un escalar entonces

- $A(BC) = (AB)C$ .
- $(A + B)C = AC + BC$ .
- $A(B + C) = AB + AC$ .
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .
- Si  $I_n$  es la matriz cuadrada de orden  $n$  formada por ceros salvo por unos en la diagonal principal (en lo sucesivo se denotará simplemente  $I$  cuando el orden sea evidente por el contexto), entonces  $AI = A$ ,  $IB = B$ .

Señalamos tres propiedades, dando ejemplos, válidas para escalares y no para matrices:

- $AB$  no es siempre igual a  $BA$ .
- $AB = O$  no implica que alguna de las matrices sea nula.
- Si  $AB = AC$  y  $A \neq O$  no implica que  $B = C$ .

Definimos la **transposición de matrices** y la **conjugación de matrices**, enunciamos las propiedades más importantes y definimos las **matrices simétricas y antisimétricas**. Y si consideramos las matrices complejas definimos las matrices **hermíticas y antihermíticas**. Dos ejemplos importantes son los siguientes: si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  son dos vectores columna de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \mathbf{u}$  es un escalar y  $\mathbf{u} \mathbf{v}^t$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ .

A parte de [37], aunque el álgebra matricial aparece en todos los libros de álgebra lineal, recomendamos [46, 51, 55].

## 2.2. Potencias de matrices

La potenciación matricial se define de manera obvia. Hacemos notar que las siguientes propiedades no son ciertas, dando ejemplos:

- Si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A^n = O$  entonces  $A = O$ .
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  (en general la fórmula del binomio de Newton no es válida, a no ser que  $A$  y  $B$  commuten).

Usamos la potenciación matricial en los dos ejemplos siguientes extraídos de la práctica:

## 2. Matrices

---

1. Aunque no mencionamos el tecnicismo *procesos de Márkov*, enunciamos el siguiente problema:

Supongamos que los  $N$  habitantes de una cierta ciudad realizan sus compras en una de las tres cadenas de alimentación existentes X, Y, Z. Se observa un movimiento de clientes de una cadena a otra. Concretamente, cada mes la cadena X conserva el 80% de sus clientes, atrae el 20% de los de Y y el 10% de los de Z. Análogamente, Y conserva el 70% de sus clientes, atrae el 10% de X y el 30% de Z. Finalmente Z atrae el 10% de los clientes de X y el 10% de los de Y. Encontrar el número de habitantes que compran en cada una de las cadenas tras el mes  $n$ -ésimo.

En este momento definimos las matrices **estocásticas** y proponemos como ejercicio la propiedad más importante: Si  $A$  y  $B$  son estocásticas, entonces  $AB$  también es estocástica. Como consecuencia de este hecho se tiene que si  $A$  es estocástica, entonces  $A^k$  lo es también.

2. Introducimos muy brevemente al alumno en la teoría de grafos definiendo lo que es un grafo dirigido y la **matriz de adyacencia de un grafo**. Enunciamos el siguiente teorema. Si  $A = (a_{ij})$  es la matriz de adyacencia de un grafo dirigido y  $a_{ij}^{(k)}$  es el elemento  $(i, j)$  de  $A^k$ , entonces  $a_{ij}^{(k)}$  es el número de caminos de longitud  $k$  que hay entre  $P_i$  y  $P_j$ . A continuación vemos un ejemplo sencillo que aclara este teorema.

Unos libros donde se pueden encontrar ejemplos y problemas resueltos son [41, 68].

### 2.3. Determinante de una matriz cuadrada

Son varias las formas de introducir el concepto de determinante. Algunos libros, como [31], lo hacen desde el concepto de aplicación multilineal. La definición más extendida es usando permutaciones. Son formas rigurosa de hacerlo, pero si tenemos en cuenta el enfoque de la asignatura, nos parece más pedagógico ofrecer la definición de **determinante** en forma recursiva tal como aparece en [37]. Esta definición es incómoda si se pretende a partir de ella calcular determinantes. Hay que esperar al algoritmo de eliminación de Gauss para ver un modo efectivo. Enunciamos la regla de Sarrus para el cálculo de determinantes de órdenes 2 y 3.

A continuación enunciamos sin demostrar las principales propiedades de los determinantes:

- El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta. A partir de ahora todas las propiedades que se refieran a filas, son válidas para columnas.
- Si  $B$  se obtiene de  $A$  multiplicando una fila por  $\lambda$ , entonces  $\det(B) = \lambda \det(A)$ . En general  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ , siendo  $n$  el orden de la matriz  $A$ .
- Si la matriz  $B$  se obtiene intercambiando dos filas de la matriz  $A$ , entonces  $\det(B) = -\det(A)$ .
- Si una matriz tiene dos filas iguales, entonces su determinante es nulo.

- El determinante de una matriz que tenga una de sus filas como suma de dos se puede descomponer como suma de dos determinantes del modo siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El alumno no tiene que confundir esta propiedad con la siguiente igualdad, que es falsa en general:  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

- Si una matriz tiene una fila de ceros, entonces su determinante es nulo.
- Si  $B$  se obtiene de  $A$  sumándole o restándole una fila de  $A$  un múltiplo de otra fila, entonces  $\det(A) = \det(B)$ .
- Si  $A$  es una matriz triangular entonces el determinante de  $A$  es el producto de los términos de su diagonal principal. En particular el determinante de  $I$  es 1.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

## 2.4. Inversa de una matriz cuadrada

Motivamos al alumno el concepto de matriz inversa con el caso escalar: Para resolver  $ax = b$ , donde  $a, x, b \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$ , despejamos  $x = a^{-1}b$ , siendo  $a^{-1}$  un número tal que  $a^{-1}a = 1$ .

Desgraciadamente, el producto de matrices no es conmutativo, por lo que debemos tener cuidado con la definición. Decimos que una matriz  $A$  es **invertible** si existe otra matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I$ . Observamos que de la definición se deduce que sólo las matrices cuadradas pueden ser invertibles (pero no todas las matrices cuadradas son invertibles como veremos a continuación). Asimismo, demostramos que la inversa de una matriz invertible  $A$  es única, esta matriz única se denotará  $A^{-1}$ . Debido a la no conmutatividad del producto, hacemos énfasis en que la división matricial no tiene sentido: ¿qué es  $A/B$ ? ¿es  $B^{-1}A$  ó  $AB^{-1}$ ? Enunciamos el resultado central que une los determinantes con el cálculo matricial: Una matriz  $A$  es invertible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

Observamos que la fórmula clásica que han visto los alumnos en años anteriores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A^t), \quad (2.1)$$

siendo  $\text{Adj}(B)$  la matriz cuadrada del mismo orden que  $B$  cuyo elemento  $(i, j)$  es el determinante de la submatriz que resulta de quitar la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $B$ , es altamente costosa en número de operaciones y en la práctica resulta altamente inoperativa. Señalamos al alumno que ha de esperar al Capítulo 3 para ver un método eficaz de calcular inversas de matrices. Vamos comentando que siempre que se pueda, se ha evitar este cálculo prefiriendo otras alternativas.

Las siguientes propiedades que demostramos son:

## 2. Matrices

---

- Si  $A$  y  $B$  son invertibles entonces  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Si  $A$  y  $B$  son invertibles entonces  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Si  $A$  es invertible y  $\lambda \neq 0$  entonces  $\lambda A$  es invertible y  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$ .
- Si  $A$  es invertible, entonces  $A^t$  es invertible y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

Demostramos la llamada fórmula de **Sherman-Morrison**: Si  $A$  es una matriz invertible de orden  $n$  y  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  son vectores columna de orden  $n$  tales que  $1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c} \neq 0$  entonces  $A + \mathbf{c}\mathbf{d}^t$  es invertible y

$$(A + \mathbf{c}\mathbf{d}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}} (A^{-1} \mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1}).$$

Antes de hacer la demostración, resaltamos la utilidad práctica de la fórmula: Supongamos que  $A^{-1}$  es conocido; pero ahora una entrada de  $A$  debe ser actualizada. No es necesario calcular la nueva inversa de nuevo, basta aplicar la fórmula de Sherman - Morrison. Sean  $\mathbf{c} = \mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{e}_j$ , donde  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}_j$  son los  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo vectores (columna) de la base canónica<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^n$ . La matriz  $\mathbf{c}\mathbf{d}^t$  tiene  $\alpha$  en la posición  $(i, j)$  y ceros en el resto. Luego  $B = A + \mathbf{c}\mathbf{d}^t$  es la matriz actualizada.

Para la demostración observamos que  $\mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}$  es un escalar y commuta con cualquier matriz:

$$\begin{aligned} (A + \mathbf{c}\mathbf{d}^t) \left( A^{-1} - \frac{A^{-1} \mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}} \right) &= I + \mathbf{c}\mathbf{d}^t A^{-1} - \frac{\mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1} + \mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}} \\ &= I + \mathbf{c}\mathbf{d}^t A^{-1} - \frac{(1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}) \mathbf{c} \mathbf{d}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{d}^t A^{-1} \mathbf{c}} \\ &= I. \end{aligned}$$

Aunque la bibliografía existente es muy extensa (prácticamente cualquier libro de álgebra lineal podría servir) y los libros mencionados en las secciones anteriores podrían valer perfectamente, creemos que la bibliografía que consideramos más ajustada para esta sección es [37, 46, 51, 55, 68].

## 2.5. Matrices por bloques

Enseñamos a los alumnos que el procedimiento de partir una matriz en **bloques** puede ser de gran utilidad y permite en ocasiones operar cómodamente con matrices de orden considerablemente grande. Para esto desarrollamos con claridad este ejemplo. Calcular la potencia  $n$ -ésima de la siguiente matriz de orden  $n + 1$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix},$$

en donde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (fila),  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  (columna) y  $A$  es una matriz de orden  $n$ . Si además  $A$  es invertible, proponemos hallar la inversa de  $B$ .

<sup>2</sup>Aunque no se haya definido lo que es una base en  $\mathbb{R}^n$ , simplemente decimos que  $\mathbf{e}_i$  es el vector de  $\mathbb{R}^n$  con un uno en la posición  $i$  y ceros en el resto de sus componentes. A partir de ahora, siempre denotaremos por  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , en donde cada vector  $\mathbf{e}_i$  es una columna.

Para mostrar la utilidad de trabajar con matrices por bloques demostramos el siguiente teorema: *Sea  $A$  una matriz triangular con elementos no nulos en la diagonal, entonces la inversa de  $A$  es triangular.*

## Contenido del Capítulo 2

### 1. Primeras definiciones.

- Definición de matriz. Orden de una matriz.
- Tipos básicos de matrices: cuadrada, vector fila, vector columna, diagonal, triangular.
- Definición de suma de matrices y producto por escalares. Propiedades.
- Introducción al producto matricial. Definición de producto matricial. Propiedades. Propiedades que son ciertas en  $\mathbb{K}$  y que con matrices no son ciertas. Matriz identidad. Conversión de un sistema de ecuaciones lineales en un producto matricial.
- Definición de la transposición y conjugación matricial. Propiedades. Matrices simétricas, antisimétricas, hermíticas y antihermíticas.

### 2. Potenciación de matrices.

- Definición y ejemplos.
- Dos problemas donde surge la potencia de una matriz: procesos de Márkov (matrices estocásticas), introducción a la teoría de grafos.

### 3. Determinante de una matriz cuadrada.

- Definición. Reglas de Sarrus para calcular determinantes de órdenes 2 y 3.
- Propiedades de los determinantes. Ejemplos.

### 4. Inversa de una matriz cuadrada.

- Introducción al concepto de matriz inversa. Definición.
- Una matriz es invertible si y sólo si su determinante no es nulo.
- Propiedades de la inversión matricial.
- Fórmula de Sherman-Morrison.

### 5. Matrices por bloques.

- Introducción a las matrices de bloques.
- Ejemplos.

### 3. Sistemas de ecuaciones lineales

#### OBJETIVOS:

Saber resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss. Entender que el número de operaciones es un factor esencial a la hora de evaluar la eficacia de un algoritmo. Saber hallar la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan. Modelar problemas en forma de sistemas de ecuaciones. Conocer el mecanismo de la pivotación parcial para minimizar los errores de redondeo.

Como ya mencionamos en la introducción del Capítulo 2, los sistemas de ecuaciones lineales comenzaron a ser estudiados sistemáticamente por Leibniz y Cramer a mediados del siglo XVIII. Este último matemático, expuso lo que hoy conocemos como regla de Cramer para los sistemas de orden 3. A mediados del siglo XIX fue Cayley, al estudiar las matrices, quien dedujo la fórmula general de la regla de Cramer y quien expuso claramente la condición necesaria y suficiente para que un sistema cuadrado de ecuaciones lineales tuviera solución única, a saber, que la matriz de los coeficientes del sistema fuera invertible.

Frobenius introdujo la noción de rango de una matriz en 1879, aunque en relación con los determinantes. Esta definición permitió generalizar el teorema que hoy conocemos como teorema de Rouché-Frobenius.

Gauss dedujo a principios del siglo XIX un método que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. Este método cayó en el olvido pues es más engorroso que la presentación matricial hecha por Cayley y por Frobenius. Jordan<sup>1</sup> dedujo un algoritmo alternativo a la fórmula presentada por Cayley para calcular la inversa de una matriz. Hoy conocemos este método como el algoritmo de Gauss-Jordan.

A medida que en otras disciplinas científicas se iba encontrando que los problemas se podían plantear en términos de sistemas de ecuaciones lineales los matemáticos se empezaron a preocupar de aspectos como el número de operaciones en un algoritmo. Pronto se dieron cuenta que la fórmula (2.1) para el cálculo de la inversa es muy costosa por el número de operaciones, mientras que el método de Gauss exigía un número considerablemente menor.

Un problema muy complicado es el siguiente: ¿De qué forma contribuyen los errores de redondeo individuales al error total? Fue atacado por primera vez por Von Neumann, si bien sólo encontró estimaciones muy complicadas. Actualmente se utiliza el método de la pivotación parcial, una ligera variante del método de Gauss, para intentar que los errores parciales sean los menores posibles.

---

<sup>1</sup>Aunque ha habido confusión sobre qué Jordan debe recibir el mérito por este algoritmo, ahora parece claro que este método fue introducido por Wilhem Jordan (1842–1899) y no por el más conocido Marie Ennemond Camile Jordan.

### 3.1. Sistemas lineales

Como introducción señalamos las diferentes formas de soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas basándonos en el modelo geométrico. Estudiaremos esta clasificación más rigurosamente en breve; pero conviene que el alumno se vaya familiarizando con los sistemas incompatibles, compatibles determinados e indeterminados.

Vemos tres ejemplos que muestran la utilidad de los sistemas de ecuaciones y en donde aparecen sistemas de gran tamaño: Un modelo de red de tráfico, la distribución de la temperatura estacionaria en una placa metálica y un circuito eléctrico.

Introducimos las definiciones preliminares: Un **sistema de ecuaciones lineales** con  $n$  incógnitas y  $m$  ecuaciones es

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

donde  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ . Cuando  $b_1 = \cdots = b_n = 0$  el sistema se llama **homogéneo**. Enfatizamos la forma matricial del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde  $A$  es una matriz  $m \times n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ .

Enunciamos la clasificación de los sistemas en base a las soluciones.

- El sistema no tiene solución. El sistema es **incompatible**.
- El sistema tiene una única solución. El sistema es **compatible determinado**.
- El sistema tiene infinitas soluciones. El sistema es **compatible indeterminado**.

Si un sistema tiene más de una solución diferente, entonces tiene infinitas. En efecto, si  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son dos soluciones del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  con  $\lambda \in \mathbb{K}$  también es solución. La demostración muestra la potencia del cálculo matricial y la utilidad de razonar geométricamente.

Al escribir el sistema como  $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  son las columnas de  $A$  observamos inmediatamente que el sistema es compatible si y sólo si  $\mathbf{b}$  es combinación lineal de las columnas de  $A$ .

### 3.2. El método de eliminación de Gauss

Empezamos explicando cómo se resuelven los sistemas triangulares superiores: por **substitución regresiva**.

A continuación planteamos la pregunta si cualquier sistema se puede expresar como un sistema triangular. La respuesta es afirmativa y la forma de hacerlo es eliminar la primera variable de todas las ecuaciones excepto de la primera, la segunda variable de todas excepto la primera y segunda ecuación y así sucesivamente. Este método se le conoce como **algoritmo de eliminación de Gauss**. Hacemos un ejemplo concreto.

Indicamos qué hacer cuando algún término de la diagonal principal es nulo y no se puede hacer ceros por debajo de este elemento. En este caso hay que recurrir a intercambiar filas.

Si no se pudiese intercambiar filas porque debajo de este pivote todas las entradas son nulas, entonces seguimos en la misma fila y nos ocupamos de la siguiente variable.

Una vez reducido el sistema es fácil investigar si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, simplemente mirando las ecuaciones del sistema reducido. Hacemos varios ejemplos de estos tipos y también uno con variables simbólicas para resaltar la supremacía de este método frente al teorema de Rouché-Frobenius, ya que permite clasificar el sistema en un número óptimo de operaciones y además hallar las soluciones. También podemos definir el **rango** de una matriz como el número de filas no nulas de la matriz reducida; sin embargo preferimos no hacerlo, ya que el concepto de rango tiene poca utilidad dentro del proyecto que se presenta.

### 3.3. Factorización $LU$ de una matriz

Haciendo un estudio detallado de las operaciones hechas en los ejemplos observamos que sólo hacemos dos tipos de operaciones sobre las matrices:

- Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar.
- Intercambiar dos filas.

La representación matricial de estas dos operaciones permite encontrar una forma útil de factorización de matrices, la llamada **factorización  $LU$** . A partir de ahora  $\mathbf{e}_i$  denotará el  $i$ -ésimo vector columna de  $\mathbb{K}^n$

En vez de demostrar lo siguiente para una matriz de orden arbitrario, lo haremos con una matriz de orden fijo, para que el alumno no se pierda con los muchos subíndices y puntos suspensivos que aparecen. Pensamos que con una  $2 \times 3$  es suficiente

- La substitución de la fila  $i$  de una matriz por la fila  $i$  más  $\lambda$  veces la fila  $j \neq i$  equivale a multiplicar por la izquierda por la matriz  $I + \lambda \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^t$ .
- El intercambio de las filas  $i, j$  de una matriz equivale a multiplicar por la izquierda la matriz  $I - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^t$  (llamadas matrices **permutaciones**).

Si en una matriz  $A$  (que por simplicidad la supondremos cuadrada) hacemos ceros por debajo de la entrada  $(1, 1)$  obtenemos la matriz

$$(I + \lambda_{21} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^t) \cdots (I + \lambda_{n1} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1^t) A = (I + (\lambda_{21} \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_{n1} \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_1^t) A = (I + \mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1^t) A.$$

Si triangularizamos  $A$  hasta obtener  $U$  tenemos

$$(I + \mathbf{c}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}^t) (I + \mathbf{c}_{n-2} \mathbf{e}_{n-2}^t) \cdots (I + \mathbf{c}_2 \mathbf{e}_2^t) (I + \mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1^t) A = U,$$

en donde  $\mathbf{c}_2 = \lambda_{32} \mathbf{e}_3 + \cdots + \lambda_{n2} \mathbf{e}_n$ , ...,  $\mathbf{c}_{n-1} = \lambda_{n,n-1} \mathbf{e}_n$ . Ahora por la fórmula de Sherman-Morrison, cada matriz  $I + \mathbf{c}_k \mathbf{e}_k^t$  es invertible y  $(I + \mathbf{c}_k \mathbf{e}_k^t)^{-1} = I - \mathbf{c}_k \mathbf{e}_k^t$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= (I - \mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1^t) (I - \mathbf{c}_2 \mathbf{e}_2^t) \cdots (I - \mathbf{c}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}^t) U \\ &= (I - \mathbf{c}_1 \mathbf{e}_1^t - \cdots - \mathbf{c}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}^t) U. \end{aligned}$$

### 3. Sistemas de ecuaciones lineales

---

Puesto que la matriz  $I - \mathbf{c}_1\mathbf{e}_1^t - \cdots - \mathbf{c}_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}^t$  es triangular inferior, hemos obtenido la factorización  $LU$  siempre que no se necesiten permutaciones de filas en el proceso de triangularización. Enseñamos un ejemplo en donde se ve cómo se construye la matriz  $L$ . Indicamos que el coste de cálculo de la matriz  $L$  es nulo si se ha efectuado el proceso de Gauss.

Si se necesitan permutaciones de filas, es posible dar una factorización similar aunque creamos que no es necesario en este curso introductorio. Aunque vemos como un simple ejercicio (por la fórmula de Sherman-Morrison) el cálculo de la inversa de una matriz permutación.

Explicamos la utilidad de la factorización  $LU$  cuando se resuelven varios sistemas  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$ . Si ya hemos factorizado  $A = LU$ , estos  $k$  sistemas se reducen a  $2k$  sistemas triangulares rápidos de resolver:  $L\mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i, U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

Insistimos que la regla de Cramer no es eficaz. Esta regla permite resolver un sistema de orden  $n$  mediante  $n + 1$  determinantes de orden  $n$  y  $n$  divisiones, número excesivamente grande.

El desarrollo de esta sección se ha obtenido de [51].

### 3.4. Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz

Una **operación fundamental** es una de las siguientes operaciones

- Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar.
- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

Vemos que la tercera operación equivale a multiplicar por la izquierda por  $I + (\alpha - 1)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^t$  (de nuevo la fórmula de Sherman-Morrison permite calcular la inversa de esta matriz). A continuación demostramos que si  $A$  es una matriz cuadrada y si con operaciones elementales transformamos  $A$  en  $I$ , entonces estas mismas operaciones aplicadas a  $I$  proporcionan  $A^{-1}$ . En la práctica se trabaja con la matriz  $[A|I]$ . La diferencia con el método de Gauss estriba en que hemos de intentar hacer ceros por debajo y por encima de la diagonal principal. Hacemos dos ejemplos para ilustrar el método, uno donde la matriz sea invertible y otro donde no lo sea.

También señalamos que el número de operaciones es menor con este método de que si se aplica (2.1) para calcular la inversa.

### 3.5. Pivoteo parcial

Ahora consideraremos factores que afectan a la precisión de la solución del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . El siguiente ejemplo aclara la situación. Si

$$A = \begin{pmatrix} 3.021 & 2.714 & 6.913 \\ 1.013 & -4.273 & 1.121 \\ 5.084 & -5.832 & 9.155 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12.648 \\ -2.121 \\ 8.407 \end{pmatrix},$$

entonces el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene por solución  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^t$ . Si se cambia la entrada  $(2, 2)$  de la matriz  $A$  al valor  $-4.275$ , la solución del sistema perturbado es  $\mathbf{x} = (-1.7403, 0.6851, 2.3212)^t$ . Es decir, se trata de un sistema donde se cambia en un  $0.1\%$  el valor de un coeficiente y las soluciones que aparecen son totalmente diferentes.

Al mostrar este ejemplo vemos cómo pueden aparecer soluciones muy poco parecidas si modificamos ligeramente la matriz. Un sistema de ecuaciones lineales se dice que está **mal condicionado** si un pequeño cambio en las componentes de la matriz causa un gran cambio en la solución. En caso contrario se dice que está **bien condicionado**.

Es fácil ver lo que provoca que un sistema  $2 \times 2$  sea mal condicionado. Las dos ecuaciones con dos incógnitas representan dos rectas y el punto de corte es la solución. Un sistema mal condicionado representa dos rectas casi paralelas. Véase la figura 3.1.

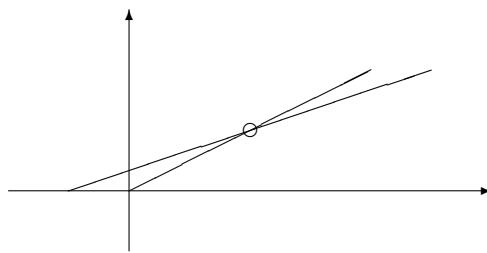


Figura 3.1.: Un pequeño cambio en las rectas provoca un gran movimiento en el punto de corte.

Se puede demostrar que para que un sistema esté bien o mal condicionado es indiferente el valor que tome el vector  $\mathbf{b}$  (en el caso de sistemas de orden 2 esto debería ser intuitivo). Así pues, se habla en realidad de matrices mal o bien condicionadas.

La **pivotación parcial** resuelve parte de este problema. Como la aparición en el proceso de eliminación un elemento  $a_{k,k}$  nulo obliga a intercambiar las ecuaciones, en la práctica un pivote muy pequeño va a producir una considerable inestabilidad numérica en el sistema. La pivotación parcial es la variante del método de eliminación en la cual se elige el pivote como el mayor, en valor absoluto, de todos los coeficientes de una columna. Explicamos un ejemplo concreto. También mostramos como ejemplo la matriz de Hilbert, que es el ejemplo típico de matriz mal condicionada. Con este ejemplo vemos que la pivotación parcial no arregla el problema del mal condicionamiento inherente a las matrices de Hilbert.

Todo lo mencionado en este capítulo puede verse con todo detalle en [37, 51, 68]. En cuanto a consultar colecciones de problemas extras, aparte de los mencionados, podemos citar [41], en donde se tratan todas las aplicaciones mencionadas en este tema y otras que por cuestiones de tiempo no hemos incluido.

## Contenido del Capítulo 3

### 1. Sistemas lineales.

- Introducción. Ejemplos. Definición. Sistemas homogéneos.
- Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.

### 2. El método de eliminación de Gauss.

- Substitución regresiva.
- Triangularización. Ejemplos.

### 3. Factorización $LU$ de una matriz.

- Operaciones elementales.
- Representación matricial de las operaciones elementales. Matrices elementales.
- Propiedades de las matrices elementales.
- Obtención de las matrices  $L$  y  $U$  en la descomposición  $LU$  de una matriz.
- Utilidad de la factorización  $LU$ . Resolución simultánea de ecuaciones lineales. Ejemplos.

### 4. Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz.

- Descripción. Ejemplo.

### 5. Pivotación parcial.

- Un ejemplo de una matriz donde una ligera perturbación de sus entradas produce soluciones muy diferentes. Matrices mal y bien condicionadas.
- Descripción de la pivotación parcial. Ejemplo.

## 4. Espacios vectoriales

### OBJETIVOS:

Entender las propiedades básicas de los espacios vectoriales. Conocer los ejemplos más importantes de espacios vectoriales:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{C}([a, b])$ . Manejar con fluidez la idea de dependencia e independencia lineal, sistemas generadores y bases. Comprender la noción de dimensión y saber diferenciar los espacios vectoriales de dimensión finita de los de infinita. Comprender el significado del cálculo coordenado.

Como ya se vió en el Capítulo 1, la idea de vector de  $\mathbb{R}^n$  entró en las matemáticas de forma callada. Más aún, podemos decir que la idea de vector abstracto fue introducida por Euler (1707–1783) sin que éste se diera cuenta: al resolver la ecuación diferencial que hoy llamamos lineal de orden  $n$  homogénea de coeficientes constantes, Euler indica que la solución general ha de contener  $n$  constantes arbitrarias y que dicha solución vendría dada por la suma de  $n$  soluciones particulares *independientes*. Euler no aclara lo que para él son funciones independientes. En trabajos posteriores, Lagrange (1736–1813) extendió este resultado a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes variables. Fue Cauchy quien aisló la noción de *independencia lineal* y la aplicó al estudio de ecuaciones diferenciales. Curiosamente se desarrollaron los conceptos básicos en el espacio de las funciones continuas antes que en  $\mathbb{R}^n$ .

En 1844 Grassmann, en el libro *Die lineale ausdehnungslehre*, axiomatizó el concepto de independencia lineal aplicándolo a los elementos de  $\mathbb{R}^n$ . La exposición de Grassmann estaba ligada con ideas geométricas, pero a él se le deben los conceptos claves de la teoría de espacios vectoriales. El primero en dar la definición axiomática actual de espacio vectorial fue Peano (1858–1932) en su libro *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* publicado en 1888.

### 4.1. Definiciones y primeras propiedades

Damos la definición de **espacio vectorial** sobre un conjunto de **escalares**  $\mathbb{K}$  (que señalamos que es  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ): Es un conjunto  $V$  que cumple

1. Existe una regla que asocia dos elementos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  de  $V$  (su **suma**) y se denota  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , que es también un elemento de  $V$ , que cumple las siguientes propiedades:
  - a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
  - b)  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

#### 4. Espacios vectoriales

---

- c) Existe un elemento de  $V$  denotado **0 (vector cero)** que cumple  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$ .
- d) Para todo  $\mathbf{v} \in V$  existe  $\mathbf{v}' \in V$  (**opuesto de  $\mathbf{v}$** , que se denota  $-\mathbf{v}$ ) tal que  $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ .
2. Existe una regla que asocia a un escalar  $\alpha$  y a un vector  $\mathbf{v} \in V$  (su **producto**) y se denota  $\alpha\mathbf{v}$ , que es también un elemento de  $V$ , que verifica
- a)  $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in V$ .
- b)  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in V$ .
- c)  $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in V$ .
- d)  $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

A continuación damos ejemplos para afianzar la idea de espacio vectorial. Entre ellos los más conocidos por los alumnos:  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$ , pero también hacemos énfasis en otros menos conocidos como  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{C}([a, b])$ . Creemos que tenemos que detallar estos ejemplos, ya que el alumno frecuentemente encuentra éstos más complicados de entender.

Enunciamos y demostramos las propiedades inmediatas que se deducen de la definición y que resultan absolutamente imprescindibles:

- En cada espacio vectorial existe un único vector cero.
- Todo elemento de un espacio vectorial posee un único elemento opuesto.
- $0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{v} \in V$ . <sup>1</sup>
- $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in V$ .

#### 4.2. Subespacios vectoriales

Tras comentar la idea geométrica de que un plano de  $\mathbb{R}^3$  pueda tener “estructura de  $\mathbb{R}^2$ ”, definimos un **subespacio vectorial** de un espacio vectorial como un subconjunto de éste que por sí mismo es un espacio vectorial (véase la figura 4.1).

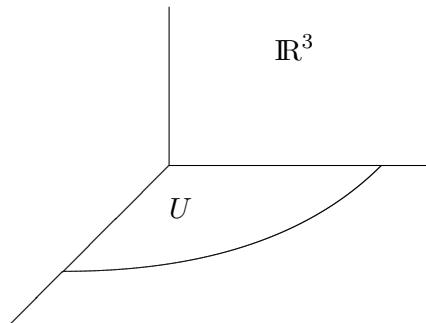


Figura 4.1.: Un plano  $U$  en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $U$  pasa por el origen, entonces  $U$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>1</sup>Es interesante hacer notar que el 0 de la izquierda es un escalar y el **0** de la derecha es un vector.

En un principio damos ejemplos geométricos hablando de planos, rectas, etc. A continuación explicamos la siguiente cadena:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty([a, b]) \subset \mathcal{C}^n([a, b]) \subset \mathcal{C}^1([a, b]) \subset \mathcal{C}([a, b]).$$

Caracterizamos los subespacios: Para que un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  sea subespacio es necesario y suficiente que dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , entonces  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$ . Utilizamos esta caracterización para demostrar que la intersección de subespacios es un subespacio vectorial. Creemos que la noción de **suma** de subespacios no tiene cabida en este curso, ya que el objetivo de este capítulo es introducir el lenguaje apropiado de la asignatura y no despistar al alumno con unos conceptos que en una ingeniería tienen poca utilidad.

### 4.3. Bases en un espacio vectorial

El concepto de combinación lineal es básico en la teoría de espacios vectoriales. Decimos que  $\mathbf{v}$  es **combinación lineal** de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  si existen escalares  $\alpha_i$  tales que  $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ . Damos ejemplos y decimos que la suma ha de ser finita. Definimos la **envoltura lineal** de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , denotada por  $L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\})$ , como el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Utilizamos la caracterización de subespacio para probar que este conjunto es un subespacio vectorial. Ahora es fácil definir el concepto de **sistema generador**:  $S$  es un conjunto generador del subespacio  $U$  si  $L(S) = U$ . Mostramos varios ejemplos.

Mediante varios ejemplos geométricos definimos el concepto de dependencia lineal: Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal no trivial de éstos igual a  $\mathbf{0}$ . Es **linealmente independiente** en caso contrario. Hacemos varios ejemplos en  $\mathbb{K}^n$  y en el espacio de las funciones continuas.

El criterio de invertibilidad permite demostrar el siguiente teorema: Si existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) & \cdots & f'_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces las funciones  $f_i$  (derivables hasta orden  $n-1$  en  $]a, b[$ ) son linealmente independientes. El determinante que aparece en este teorema se llama **wronskiano** de las funciones  $f_1, \dots, f_n$  evaluado en  $x_0$ .

La definición de base de un espacio vectorial es una de las nociones más importantes del álgebra lineal. Una **base** de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independiente y sistema generador. Damos los ejemplos más importantes en  $\mathbb{K}^n$  y en  $\mathcal{P}_n$ : las bases canónicas de estos espacios. Hacemos énfasis también en un hecho que a veces olvida el alumno: en un espacio vectorial hay infinitas bases diferentes.

Enunciamos, dependiendo del nivel de la clase, el tiempo disponible u otros factores se demuestra o no (una demostración sencilla se puede encontrar en [37]), que si una base de un espacio vectorial tiene  $n$  elementos, entonces todas las bases de este espacio vectorial también poseen  $n$  elementos. Este número, que es una característica intrínseca de cada espacio vectorial, se llama **dimensión**. Explicamos los ejemplos clásicos:  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{P}_n$ . También

demostramos y explicamos la utilidad del siguiente teorema: si en un espacio de dimensión  $n$  hay  $n$  vectores linealmente independientes, entonces estos vectores forman base (también hay un resultado análogo que resulta de substituir linealmente independiente por sistema generador; pero esto no es tan útil y no lo mencionamos).

También señalamos que hay espacios que no tienen dimensión finita, dando como ejemplos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{C}([a, b])$ . La teoría de los espacios vectoriales de dimensión infinita es sutil y delicada. Advertimos a los alumnos que haremos incursiones en los espacios de dimensión infinita para poder apreciar la riqueza de las aplicaciones del álgebra lineal.

#### 4.4. Cálculo coordenado en un espacio vectorial de dimensión finita

Finalizamos este tema con un concepto práctico. Si  $\mathbf{v}$  es un vector de un espacio vectorial  $V$  con una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , entonces existen escalares únicos  $\alpha_i$  tales que  $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ . El vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$  de  $\mathbb{K}^n$  se llama **coordenadas** de  $\mathbf{v}$  en la base  $\mathcal{B}$ . Lo denotamos  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ .

Enunciamos (la demostración se puede dejar como ejercicio) las siguientes propiedades:

- Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  cumplen  $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$  entonces  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .
- Dado  $\mathbf{x}$  vector de  $\mathbb{K}^n$ , existe un único vector  $\mathbf{v} \in V$  tal que  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$ .
- $[\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \alpha[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} + \beta[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ .

Explicamos la utilidad que tienen estas propiedades. Se pueden resolver problemas y deducir propiedades de los espacios vectoriales de dimensión finita simplemente trabajando con las coordenadas de los vectores, es decir en  $\mathbb{K}^n$ .

El libro [37] contiene un capítulo dedicado a los espacios vectoriales, si bien el tratamiento es rápido. Dos libros interesantes son [2, 32], que poseen ejemplos prácticos y ejercicios. En cuanto a la bibliografía de problemas, aparte de los anteriores conviene mencionar [56].

Somos conscientes que hemos dejado sin explicar cierto número de resultados importantes dese el punto de vista teórico, como por ejemplo el teorema de equicardinalidad de bases en espacios de dimensión infinita, el teorema de la base incompleta o la matriz cambio de base; pero se ha sacrificado algo de contenido teórico en aras de contenidos más aplicados en capítulos posteriores.

## Contenido del Capítulo 4

### 1. Definiciones y primeras propiedades.

- Definición de espacio vectorial. Ejemplos:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathcal{P}_n$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}^n([a, b])$ .
- Propiedades elementales.

### 2. Subespacios vectoriales.

- Definición de subespacios vectoriales. Ejemplos.  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}([a, b])$ .
- Caracterización de subespacios vectoriales.
- Intersección de subespacios vectoriales.

### 3. Bases en un espacio vectorial.

- Definición de combinación lineal. Ejemplos.
- Definición de envoltura lineal. Ejemplos. Toda envoltura lineal es un subespacio vectorial. Definición de sistemas generadores.
- Dependencia e independencia lineal.
- Definición de wronskiano. Relación del wronskiano con la independencia lineal de funciones.
- Bases en un espacio vectorial. Ejemplos. Bases canónicas de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{P}_n$ .
- Si una base de un espacio vectorial tiene  $n$  elementos, entonces todas las bases tienen  $n$  elementos. Dimensión de un espacio vectorial.
- Introducción a los espacios vectoriales de dimensión infinita.

### 4. Cálculo coordenado en un espacio vectorial de dimensión finita.

- Coordenadas de un vector respecto de una base en espacios vectoriales de dimensión finita.
- Propiedades. Consecuencias.

#### 4. Espacios vectoriales

---

## 5. Aplicaciones lineales

### OBJETIVOS:

Saber hallar y operar con la matriz asociada a una aplicación lineal. Relacionar los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad con el núcleo e imagen de una aplicación lineal. Modelar distintos tipos de problemas mediante aplicaciones lineales.

Descartes, en uno de sus intentos por algebrizar la geometría plana estudió la relación entre  $(x, y)$  y  $(x', y')$  si el segundo se obtiene girando un ángulo  $\alpha$  el primer punto. Jean Bernouilli (1667–1748) en una carta a Leibniz en 1715 introdujo los planos coordenados en  $\mathbb{R}^3$  tal como los conocemos hoy en día. Rápidamente se empezaron a estudiar las ecuaciones de las principales transformaciones geométricas en el espacio: proyecciones, simetrías y giros.

Los siguientes pasos los dieron Euler y Lagrange desde dos puntos de vista: el geométrico y el analítico. Euler, al estudiar la ecuación general de segundo grado en tres coordenadas cambió los ejes para que la expresión resulte lo más sencilla posible, de esta manera, fue capaz de clasificar todas las cuádricas<sup>1</sup>. Lagrange, en un ensayo sobre la atracción de los esferoides, proporcionó la forma general de los movimientos que conservan distancias:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  verifican

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La relación entre matriz y aplicación lineal se hizo más patente cuando Cayley escribió de forma matricial las ecuaciones de los diferentes tipos de transformaciones geométricas. También escribió de forma matricial las ecuaciones obtenidas por Lagrange obteniendo un tipo particular de matrices: las ortogonales. El concepto de aplicación lineal en su forma actual se le debe a Peano cuando axiomatizó la definición de espacio vectorial.

Hoy en día las aplicaciones lineales son importantes en las matemáticas y en las ciencias aplicadas. Las aplicaciones lineales modelan las transformaciones geométricas así como las ecuaciones lineales. Muchos problemas de la ingeniería se plantean usando matrices, y por tanto, de las aplicaciones lineales. Muchos problemas complicados se aproximan mediante la linealización prefiriendo estudiar los problemas lineales que surgen. Incluso en la mecánica cuántica un observable es un operador lineal hermítico en un espacio vectorial complejo.

<sup>1</sup>Al hacer esta clasificación Euler descubrió el paraboloide hiperbólico, superficie desconocida para los griegos.

## 5.1. Definición y ejemplos

Sean  $U$  y  $V$  espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ . Una **aplicación lineal**  $f : U \rightarrow V$  es una aplicación que satisface:

- $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)$ ,  $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ .
- $f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{u} \in U$ .

Entre los ejemplos de aplicaciones lineales citamos los siguientes:

1. Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  con coeficientes en un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Definimos  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  por medio de  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ . Este ejemplo muestra que si podemos representar una aplicación de esta manera, entonces es lineal. Aplicaremos este ejemplo en adelante.
2. La proyección  $P$  en  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $z = 0$ . Geométricamente es evidente (véase la figura 5.1, en donde sólo se muestra la propiedad  $P(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = P(\mathbf{u}) + P(\mathbf{v})$ ). Pero usamos además el primer ejemplo al tener  $P((x, y, z)^t) = (x, y, 0)^t$ .
3. El giro en  $\mathbb{R}^2$  de ángulo  $\alpha$  y centro el origen. También debe ser evidente observando la figura 5.1; pero además demostramos que

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es el vector que se obtiene tras girar  $(x, y)^t$  un ángulo  $\alpha$  respecto al origen.

4. Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\mathcal{B}$  una base de  $V$ , definimos  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  dada por  $\Phi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ .
5.  $T : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(f) = \int_a^b f(x) dx$ .
6.  $D : \mathcal{C}^1([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$  dada por  $D(f) = f'$ .

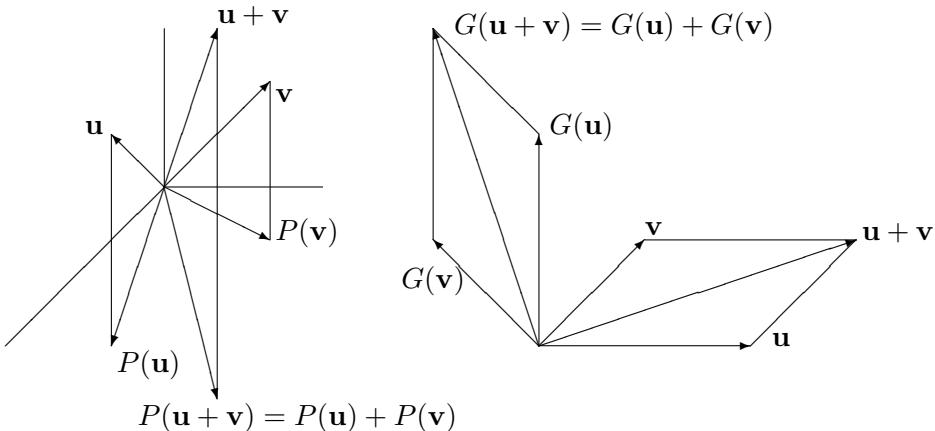


Figura 5.1.: Izquierda: La proyección  $P$  sobre el plano horizontal. Derecha: El giro  $G$  de ángulo  $\alpha$  (en este dibujo se ha tomado  $\alpha = \pi/2$ ).

Si el alumno conoce algo de cálculo vectorial se puede decir que otros ejemplos importantes son los siguientes operadores: el gradiente, el rotacional y la divergencia.

Vemos las propiedades básicas de las aplicaciones lineales: Si  $f : U \rightarrow V$  es una aplicación lineal, entonces

- $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
- Si  $A \subset U$ , entonces  $f(\mathbf{L}(A)) = \mathbf{L}(f(A))$ .

## 5.2. La matriz asociada a una aplicación lineal

A veces, operar directamente con aplicaciones lineales puede resultar complicado. Hay un mecanismo que permite trabajar en  $\mathbb{K}^n$  y matrices en vez de en espacios vectoriales “complicados” y aplicaciones lineales “complicadas”.

En esta sección construimos la **matriz de una aplicación lineal**  $f : U \rightarrow V$  entre espacios vectoriales de dimensión finita fijadas dos bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $U$  y  $V$  respectivamente. Indicamos como se construye y la relación fundamental:

$$[f(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}'} = M(f)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}. \quad (5.1)$$

Mostramos que la matriz  $M(f)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  juega el mismo papel que la aplicación  $f$ , con la salvedad que mientras  $f$  actúa sobre vectores abstractos, la matriz actúa sobre elementos de  $\mathbb{K}^n$ , de aquí la utilidad de esta matriz. Incluimos varios ejemplos concretos. Desde luego, que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal entonces la matriz de  $f$  en las bases canónicas es  $A = [f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)]$  y se cumple que  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .

Creemos importante hacer los siguientes ejemplos por dos motivos: muestran la utilidad de las aplicaciones lineales y explican el uso de la matriz de una aplicación lineal.

1. La **proyección isométrica** es muy usada en el diseño gráfico (véase la figura 5.2). Geométricamente es evidente que es una aplicación lineal (en la sección siguiente se demostrará de forma rigurosa). Esta aplicación  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cumple  $P(\mathbf{e}_1) = (-\sqrt{3}/2, -1/2)^t$ ,  $P(\mathbf{e}_2) = (\sqrt{3}/2, -1/2)^t$  y  $P(\mathbf{e}_3) = (0, 1)^t$ . Ahora, usando (5.1) debe ser trivial calcular  $P((x, y, z)^t)$ , es decir, dónde debe ser dibujado en el plano el punto  $(x, y, z)^t$ . En [10] se puede encontrar más información.

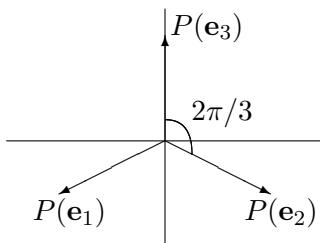


Figura 5.2.: La proyección isométrica.

## 5. Aplicaciones lineales

---

2. Hallar la proyección  $P$  sobre un plano concreto que pasa por el origen. Puesto que calcular  $P(\mathbf{e}_i)$  es complicado, en este caso es más fácil utilizar la base de  $\mathbb{R}^3$  formada por  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$ , siendo  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  una base del plano y  $\mathbf{n}$  un vector normal al plano. Este problema es fácil si se usan matrices por bloques, puesto que si  $A$  es la matriz de  $P$  en las canónicas, y como  $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,  $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$  y  $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , entonces  $A[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}] = [A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{n}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}]$ . De aquí no tenemos más que despejar  $A$ . Obsérvese que planteado de esta manera, resulta ahora trivial calcular, por ejemplo, la simetría respecto a este plano.

Si se hubiesen cogido los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  perpendiculares entre sí y de norma 1, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{v}^t \\ \mathbf{n}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

entonces

$$A = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}] [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}]^{-1} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{v}^t \\ \mathbf{n}^t \end{bmatrix} = \mathbf{u}\mathbf{u}^t + \mathbf{v}\mathbf{v}^t,$$

lo que aparte de su elegancia, es mucho más rápido de calcular que si la base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  no fuera ortonormal, al evitar calcular de forma explícita  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}]^{-1}$ . De esta manera comenzamos a introducir la importancia de las bases ortonormales desde el punto de vista del análisis numérico.

3. Hallar todos los polinomios  $p \in \mathcal{P}_2$  que cumplen  $p''(x) - 2xp'(x) + 4p(x) = x^2 - 1$  (el planteamiento, como se verá, permite substituir  $x^2 - 1$  por cualquier otro polinomio de  $\mathcal{P}_2$ ). Este problema se plantea de la forma siguiente: se define  $\Phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  como  $\Phi(y) = y''(x) - 2xy'(x) + 4y(x)$ . Si  $A$  es la matriz de  $\Phi$  en las canónicas, y si  $p(x) = a + bx + cx^2$  es el (o los) polinomio buscado, entonces  $A(a, b, c)^t = (-1, 0, 1)^t$  es un sistema lineal cuya solución proporciona la incógnita.
4. ¿Qué debe verificar  $q \in \mathcal{P}_2$  para que exista  $p \in \mathcal{P}_2$  tal que  $p''(x) - 2xp'(x) + 4p(x) = q(x)$ ? Claramente, si las coordenadas de  $q$  en la canónica son  $\mathbf{b} = (a, b, c)^t$  y si  $A$  es la matriz del ejemplo previo, el problema se reduce a investigar cuándo el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es compatible.
5. Hallar todos los polinomios  $p \in \mathcal{P}_2$  tales que  $p(1) = y_1$ ,  $p(2) = y_2$  y  $p(3) = y_3$  para  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$  dados. Si se define  $\Phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , como  $\Phi(q) = (q(1), q(2), q(3))^t$ , el problema equivale a resolver  $\Phi(p) = (y_1, y_2, y_3)^t$ . De nuevo usando técnicas matriciales, el problema debería ser fácil. En este ejemplo, la base  $\{1, x - 1, (x - 1)(x - 2)\}$  es más cómoda de usar que la base canónica de  $\mathcal{P}_2$ .
6. Se definen

$$L_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_n(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx, \quad T_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_n(p) = w_0 p(x_0) + \cdots + w_k p(x_k),$$

donde  $w_0, \dots, w_k \in \mathbb{R}$  y  $x_0, \dots, x_k \in [-1, 1]$ . Se hallan las matrices de  $L_n$  y  $T_n$  en las canónicas y denotadas respectivamente por  $M(L_n)$  y  $M(T_n)$ . En los casos

- a)  $n = 2, k = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ ,

b)  $n = 3, k = 1$ ,

si se fuerza  $M(L_n) = M(T_n)$  se obtienen, respectivamente, las fórmulas de cuadratura de Simpson y Gauss.

### 5.3. Aplicaciones afines

Las aplicaciones lineales no cubren todas las transformaciones geométricas interesantes, puesto que éstas fijan el punto  $\mathbf{0}$ . Un tipo más general de aplicaciones son las que conservan la razón simple. Una aplicación  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es **afín** cuando  $T((1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = (1-\lambda)T\mathbf{x}+\lambda T\mathbf{y}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  (los casos más importantes son, desde luego  $n, m \in \{2, 3\}$ ).

El siguiente teorema clasifica las aplicaciones afines y muestra la relación con las aplicaciones lineales: Sean  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $f(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{0})$ , entonces  $T$  es afín si y sólomente si  $f$  es lineal. De esta manera si  $T$  es afín observamos que  $T$  es “la aplicación lineal  $f$  seguida de la traslación de vector  $T(\mathbf{0})$ ”.

La demostración es como sigue: si  $f$  es lineal es prácticamente trivial demostrar que  $T$  es afín. El recíproco es un poco más complicado e ilustra la conveniencia de razonar con figuras (véase la figura 5.3): Si se desarrollan las expresiones

$$T((1-\lambda)\mathbf{0} + \lambda\mathbf{v}) = (1-\lambda)T(\mathbf{0}) + \lambda T(\mathbf{v}), \quad T\left(\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}T(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}T(\mathbf{v})$$

se obtienen respectivamente  $f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$  y  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ .

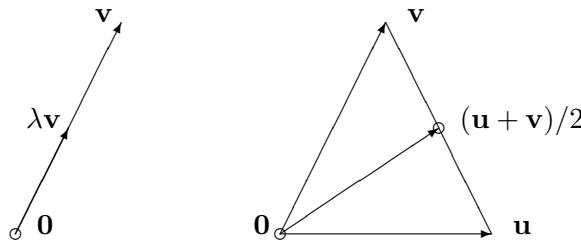


Figura 5.3.: Demostración del teorema fundamental de las aplicaciones afines.

Como ejemplos de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  citamos los siguientes:

- La traslación de vector  $\mathbf{v}_0$  es  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}_0$ .
- El giro de ángulo  $\alpha$  y centro  $\mathbf{p}$  es  $T(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$ , en donde  $G$  es el giro de ángulo  $\alpha$  centrado en el origen (véase la figura 5.4).
- Un *shear* de factor  $k$  se define mediante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esta aplicación se usa cuando se “italiza” una letra (por ejemplo  $A \rightarrow \mathcal{A}$ ).

## 5. Aplicaciones lineales

---

- d) La simetría axial respecto de la recta  $r$  de ecuación  $\mathbf{n}^t \mathbf{x} = c$  se construye como sigue (véase la figura 5.4). Como  $S(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  es perpendicular a  $r$  entonces  $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{n}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como el punto medio de  $\mathbf{x}$  y  $S(\mathbf{x})$  está en  $r$  entonces  $\mathbf{n}^t(S(\mathbf{x}) + \mathbf{x}) = 2c$ . De aquí se sigue que  $\lambda = 2(c - \mathbf{n}^t \mathbf{x}) / (\mathbf{n}^t \mathbf{n})$ . Operando de forma matricial y observando que  $\mathbf{n}^t \mathbf{x} \mathbf{n} = \mathbf{n} \mathbf{n}^t \mathbf{x}$  ya que  $\mathbf{n}^t \mathbf{x}$  es un escalar y por tanto commuta con todas las matrices:

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{2(c - \mathbf{n}^t \mathbf{x})}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{n} = \mathbf{x} + \frac{2c}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{n} - \frac{2\mathbf{n} \mathbf{n}^t}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{x} = \left( I - \frac{2\mathbf{n} \mathbf{n}^t}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \right) \mathbf{x} + \frac{2c}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

Fácilmente el alumno comprende que puede modificar este ejemplo para tratar la proyección sobre una recta. Asimismo se pueden demostrar muy fácilmente propiedades a partir de la expresión matricial sin usar coordenadas.

- e) La homotecia de razón  $k \neq 0$  centrada en  $\mathbf{p}$  se define como  $H(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + k(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ .

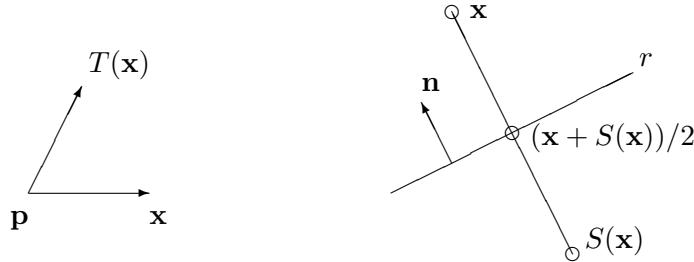


Figura 5.4.: El giro centrado en  $\mathbf{p}$  y la simetría respecto a la recta  $r$ .

En  $\mathbb{R}^3$  la teoría es análoga y no insistimos.

Las transformaciones geométricas pueden servir también para demostrar resultados geométricos. Como problema guiado incluimos el siguiente teorema (de Von Aubel): Si sobre los lados de un cuadrilátero se levantan cuadrados y se unen los centros correspondientes a los lados no adyacentes se obtienen dos segmentos perpendiculares y de la misma longitud (véase la figura 5.5). Sea  $J$  el giro de ángulo  $\pi/2$  centrado en el origen y sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  los vértices

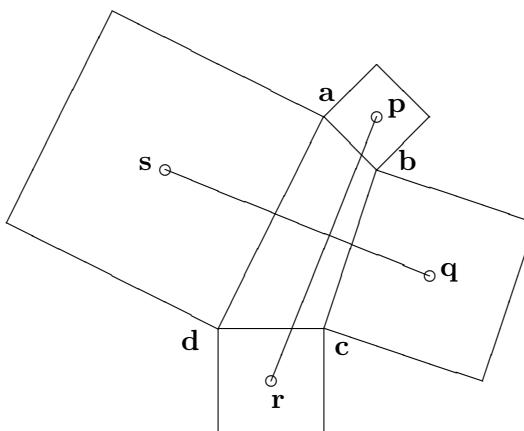


Figura 5.5.: El teorema de Von Aubel.

del cuadrilátero. Los centros de los cuadrados son

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{a} + J(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{2}, \mathbf{q} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{b} + J(\mathbf{c} - \mathbf{b})}{2}, \mathbf{r} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{c} + J(\mathbf{d} - \mathbf{c})}{2}, \mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{d} + J(\mathbf{a} - \mathbf{d})}{2}. \quad (5.2)$$

Basta probar  $J(\mathbf{q} - \mathbf{s}) = \mathbf{p} - \mathbf{r}$ . Pero esto es fácil si se usa (5.2) y  $J^2 = -I$ .

## 5.4. El núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Introducimos dos conjuntos importantes en el estudio de las aplicaciones lineales. Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal.

- Llamamos **núcleo** de  $f$ , denotado por  $\ker f$ , al subconjunto de  $U$  formado por todos los vectores cuya imagen es el vector nulo de  $V$ .
- Llamamos **imagen** de  $f$ , denotado por  $\text{Im } f$ , al subconjunto de  $V$  formada por todos los vectores que tienen antiimagen.

Observamos que estos conjuntos nunca son vacíos pues el vector nulo pertenece a ambos. Damos ejemplos geométricos en  $\mathbb{R}^3$  y en espacios menos familiares al alumno como el de los polinomios o el de las funciones continuas.

A continuación demostramos que si  $f : U \rightarrow V$  es una aplicación lineal entonces

- $f$  es inyectiva si y solamente si  $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ .
- $f$  es sobreyectiva si y solamente si  $\text{Im } f = V$ .

Enunciamos, sin demostrar, la fórmula de las dimensiones<sup>2</sup>: Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal y  $U$  un espacio de dimensión finita, entonces

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim U.$$

Como corolario importante dejamos como ejercicio el siguiente resultado: Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación lineal, si  $\dim U = \dim V < \infty$ , entonces

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

Asimismo demostramos que una aplicación lineal  $f$  es biyectiva si y sólo si la matriz de  $f$  en cualquier par de bases es invertible. Como conclusión resolvemos el siguiente ejercicio: Hallar los valores de  $\alpha$  de modo que la ecuación (de Hermite)  $y''(x) - 2xy'(x) + \alpha y(x) = 0$  admita soluciones polinómicas no nulas.

El libro principal de consulta en todo el capítulo es [37], aunque como referencia extra se puede consultar los textos [2, 46]. En cuanto a los libros de problemas, además de los citados en capítulos previos, podemos añadir [41] en el que se combinan las matrices y aplicaciones lineales para plantear problemas.

---

<sup>2</sup>La demostración rigurosa requiere haber demostrado, por lo menos, el teorema de completación de la base.

## Contenido del Capítulo 5

### 1. Definición y ejemplos.

- Definición de aplicación lineal.
- Ejemplos:  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , proyección en  $\mathbb{R}^3$ , giro en  $\mathbb{R}^2$ , cálculo coordenado, integración y derivación.
- Propiedades básicas.

### 2. La matriz asociada a una aplicación lineal.

- Definición. Construcción.
- Ejemplos.

### 3. Aplicaciones afines.

- Definición y caracterización.
- Ejemplos en  $\mathbb{R}^2$ .

### 4. El núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

- Definición del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal.
- Relación del núcleo y de la imagen con los conceptos de inyectividad y sobreyectividad.
- Fórmula que relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen.
- Caracterización de las aplicaciones lineales biyectivas.

# 6. Curvas de Bézier

La representación de curvas más usada en el diseño por ordenador fue descubierta de manera independiente por Bézier (1910–1999) y por de Casteljau (quienes trabajaron para las empresas automovilísticas de Renault y Citroën respectivamente). En 1959 de Casteljau redactó un informe confidencial en donde apareció un algoritmo con el fin de generar por ordenador curvas sencillas e intuitivas de manipular. Bézier en el principio de la década de los 60 derivó de forma diferente el mismo tipo de curvas.

Los trabajos de Bézier y de Casteljau estaban orientados a la industria automovilística. Ahora las curvas de Bézier (en su versión plana) son la base de muchos programas informáticos de diseño gráfico (como *Adobe Illustrator* o *Corel Draw*) y del diseño de tipos de fuentes de letras (como *PostScript* o *TrueType*).

Las ideas fundamentales de este capítulo han sido extraídas de [24, 30].

## 6.1. El algoritmo de De Casteljau

Comencemos con el siguiente algoritmo que genera una curva: Sean  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  tres puntos en  $\mathbb{R}^3$  y  $t \in [0, 1]$ . Construimos los siguientes dos puntos:

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1 - t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{b}_1^1(t) = (1 - t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2.$$

A continuación construimos un último punto más:

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

Véase la parte izquierda de la figura 6.1. A medida que  $t$  varía entre 0 y 1, el punto  $\mathbf{b}_0^2(t)$  describe una curva, como se puede ver en la parte derecha de la figura 6.1. La curva  $\mathbf{b}_0^2(t)$  se llama **curva de Bézier** asociada a los puntos  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ .

Escribimos este algoritmo de forma matricial: si  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  son filas, entonces

$$\begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

lo que proporciona

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1 - t)^2\mathbf{p}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2.$$

Las paráolas son curvas planas; sin embargo es interesante en las aplicaciones construir curvas tridimensionales. Esto se logra modificando el algoritmo anterior:

Dados los  $n + 1$  puntos  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  y  $t \in [0, 1]$ , en primer lugar se calculan  $n$  puntos

$$\mathbf{b}_i^1(t) = (1 - t)\mathbf{p}_i + t\mathbf{p}_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

## 6. Curvas de Bézier

---

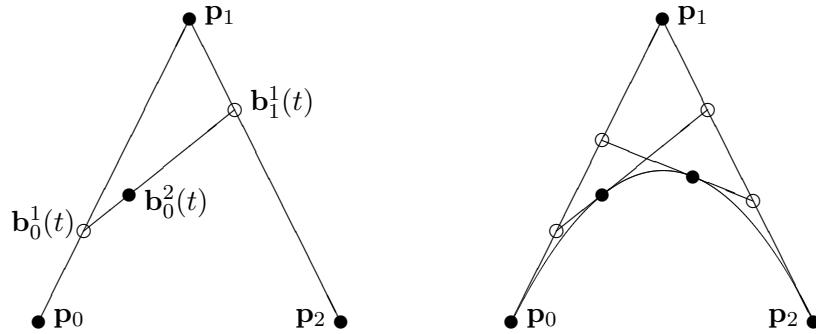


Figura 6.1.: Se muestra a la izquierda el algoritmo de de Casteljau. A la derecha se muestra la curva de Bézier que resulta tras aplicar el algoritmo.

A continuación se calculan  $n - 1$  puntos

$$\mathbf{b}_i^2(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^1(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^1(t), \quad i = 0, \dots, n - 2.$$

Y así progresivamente hasta calcular

$$\mathbf{b}_0^n(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0^{n-1}(t) + t\mathbf{b}_1^{n-1}(t).$$

Este algoritmo se ve mejor si se pone en forma triangular, como se ve en la tabla siguiente con cuatro puntos iniciales en donde se ha escrito  $\mathbf{b}_i^r$  por  $\mathbf{b}_i^r(t)$ .

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{p}_0 & \\
 \searrow & \\
 \mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{b}_0^1 = (1 - t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1 & \\
 \searrow & \\
 \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{b}_1^1 = (1 - t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{b}_0^2 = (1 - t)\mathbf{b}_0^1 + t\mathbf{b}_1^1 & \\
 \searrow & \searrow \\
 \mathbf{p}_3 \rightarrow \mathbf{b}_2^1 = (1 - t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3 \rightarrow \mathbf{b}_1^2 = (1 - t)\mathbf{b}_1^1 + t\mathbf{b}_2^1 \rightarrow \mathbf{b}_0^3 = (1 - t)\mathbf{b}_0^2 + t\mathbf{b}_1^2 &
 \end{array}$$

Los puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  se llaman **puntos de control** y la curva final se llama **curva de Bézier** asociada a los puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ , la cual será denotada en lo sucesivo por  $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t)$ .

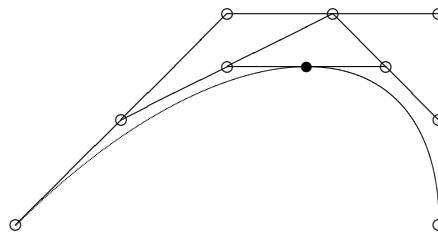


Figura 6.2.: Una cúbica de Bézier.

La representación matricial es análoga a (6.1). Escribimos sólo cuando hay tres puntos

iniciales y el alumno comprende fácilmente la generalización.

$$\begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Si el alumno conoce algo de programación, se puede mostrar un código que permite dibujar las curvas de Bézier: el siguiente programa es una función de Matlab:

```
function cast(P)
[m,n]=size(P);
for t=0:0.05:1
B=P;
for k=m-1:-1:1
ceros = zeros(k,1);
C=[(1-t)*eye(k),ceros] + [ceros,t*eye(k)];
B=C*B;
end
plot(B(1),B(2), 'o')
hold on
end
```

## 6.2. Curvas de Bézier y polinomios de Bernstein

Como hemos visto, las curvas de Bézier se dibujan de forma recursiva mediante el algoritmo de de Casteljau; sin embargo es conveniente tener una forma explícita para estudiar las propiedades de estas curvas. Esta forma no recursiva fue descubierta por Bézier independientemente de de Casteljau.

Aunque en (6.1) y en (6.2) se ha visto una representación matricial, desde el punto de vista teórico, la aparición de matrices no cuadradas hace difícil el estudio. Sea  $t \in [0, 1]$  y se definen las siguientes matrices:

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-t \end{bmatrix} = tU + (1-t)I, \quad P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix},$$

en donde la matriz  $I$  es la identidad de orden  $n + 1$  y  $U$  es la matriz cuadrada de orden  $n + 1$  con unos en la diagonal superior a la principal y el resto de sus entradas nulas. Las  $n$  primeras filas de  $CP$  producen los  $n$  puntos tras la primera etapa en el algoritmo de de Casteljau. Las  $n - 1$  primeras filas de  $C(CP) = C^2P$  producen los  $n - 1$  puntos tras dos etapas del algoritmo. Y así sucesivamente. Por tanto la primera fila de  $C^n P$  es el punto final. Pero ahora

$$C^n P = (tU + (1-t)I)^n P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k U^k (1-t)^{n-k} I^{n-k} P = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) U^k P.$$

## 6. Curvas de Bézier

---

en donde se ha denotado  $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ . Pero es fácil comprobar que la primera fila de  $U^k P$  es justamente  $\mathbf{p}_k$  para todo  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Esto permite probar que la curva generada por el algoritmo de De Casteljau con puntos de control  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  es

$$\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \mathbf{p}_k.$$

Emplear que  $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t)$  es la primera fila de  $C^n P$  no es computacionalmente adecuado, pues es preferible el uso de matrices no cuadradas como en (6.1) y en (6.2).

Los polinomios  $B_k^n(t)$  que han aparecido han sido muy estudiados y se llaman **polinomios de Bernstein**<sup>1</sup>. Dos propiedades importantes de estos polinomios son

- a)  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ .
- b)  $\{B_0^n, \dots, B_n^n\}$  es una base de  $\mathcal{P}_n$ .

Las demostraciones son fáciles: la primera se logra aplicando el binomio de Newton a  $1 = (t + (1-t))^n$ . La segunda es más fácil aún.

### 6.3. Propiedades de las curvas de Bézier

Vamos a ver por qué son importantes las curvas de Bézier desde el punto de vista del diseño por ordenador.

#### 6.3.1. Invarianza afín

Las aplicaciones afines juegan un papel importante en el diseño de objetos, pues a menudo, éstos deben ser trasladados, girados, escalados, ...

Supongamos que hemos dibujado la curva de Bézier  $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$ . A continuación nos piden que dibujemos la imagen de esta curva mediante una aplicación afín  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; es decir, tenemos que dibujar la curva  $T(\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n])$ . La invarianza afín permite resolver este problema de dos modos:

1. Calcular la imagen por  $T$  de los puntos de la curva ya dibujada.
2. Primero calcular  $T(\mathbf{p}_0), \dots, T(\mathbf{p}_n)$  y luego dibujar la curva de Bézier asociada a los puntos de control  $T(\mathbf{p}_0), \dots, T(\mathbf{p}_n)$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathbf{p}_0), \dots, T(\mathbf{p}_n) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & T(\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]) = \\ & & = \mathcal{B}[T(\mathbf{p}_0), \dots, T(\mathbf{p}_n)] \end{array}$$

Probar la invarianza afín es fácil.

<sup>1</sup>Estos polinomios fueron introducidos por Bernstein (1880–1968) en 1913 al demostrar el Teorema de aproximación de Weierstrass.

### 6.3.2. La propiedad de la envoltura convexa

La curva de Bézier siempre está contenida en el polígono cuyos vértices son los puntos de control (como se ve en las figuras 6.1 y 6.2). No damos una demostración formal de esta propiedad, sino que de manera intuitiva decimos que el algoritmo de de Casteljau produce puntos que están entre los puntos de control.

Esta propiedad es útil por lo siguiente: en muchas ocasiones es deseable saber si dos curvas de Bézier se cortan o no. Esto computacionalmente es costoso (hay que decidir si existen  $t, s \in [0, 1]$  tales que  $\alpha(t) = \beta(s)$ ). Si comprobamos que los polígonos no se solapan, que es menos costoso, entonces seguro que las curvas no se cortan (sin embargo, si los polígonos se solapan, no podemos concluir nada).

### 6.3.3. Interpolación inicial y final

La curva de Bézier pasa por el primer y último punto de control.

### 6.3.4. Pseudoccontrol local

¿Qué tenemos que hacer para modificar una curva de Bézier? ¿Qué ocurre si se mueve un punto de control? Sean las curvas

$$\alpha(t) = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n](t), \quad \beta(t) = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n](t).$$

Es muy fácil probar que  $\alpha(t) - \beta(t) = B_k^n(t)(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ .

Por tanto, si movemos un punto de control, la variación de la curva se hace máxima cuando  $t = k/n$  y esto ocurre aproximadamente alrededor del punto de control que movemos. Además la curva modificada se diferencia de la curva original en la dirección  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ .

## 6.4. Vectores tangentes

En el diseño gráfico es importante saber calcular tangentes a las curvas de Bézier, es decir hemos de saber simplificar

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t)$$

Si nos fijamos en la figura 6.1 observamos que el segmento que une  $\mathbf{b}_0^1(t)$  con  $\mathbf{b}_1^1(t)$  es tangente a la parábola en  $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2](t)$ . Algo similar ocurría para cúbicas (véase la figura 6.2). Explicamos que por esta razón, el propio algoritmo de de Casteljau calcula la tangente sin coste adicional. La demostración es fácil e instructiva si se usan matrices. Recordamos que

$$\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t) = \mathbf{e}_1^t C^n(t) P = [B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)] P.$$

Por lo que hay que mostrar previamente cómo se derivan matrices. En concreto mostramos que  $(A^n)' = \sum_{k=1}^n A^{k-1} A' A^{n-k}$  y en particular si  $A$  y  $A'$  comutan entonces  $(A^n)' = nA^{n-1}A'$ . Como  $C(t) = tU + (1-t)I$ , entonces  $C$  comuta con  $C' = U - I$ , por lo que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n](t) = \mathbf{e}_1^t (nC^{n-1}(U - I)P) = n[\mathbf{e}_1^t C^{n-1} U P - \mathbf{e}_1^t C^{n-1} P],$$

## 6. Curvas de Bézier

---

que prueba lo afirmado previamente.

Éste no es momento para profundizar más en esta teoría, ya que el objetivo de la asignatura es mostrar alguna aplicación sencilla del álgebra matricial. Lo único que hacemos es señalar algunos defectos de la teoría expuesta y cómo se han resuelto para indicar algunos esbozos de una teoría más avanzada.

- Si una curva tiene un trozo recto, entonces toda la curva debe ser recta. Por tanto, es imposible diseñar una curva que contenga partes rectas y no rectas. La solución es sencilla: diseñar por separado trozos de curvas que se unen de manera adecuada.
- Si se desea generar curvas complicadas, el grado del polinomio debe ser elevado y por tanto los cálculos se ralentizan. La solución es la misma que la del punto previo: diseñar curvas de grado bajo que se ensamblan de forma adecuada.
- Es imposible usar curvas de Bézier para dibujar circunferencias o hipérbolas. Hay dos posibles soluciones: una es aproximar un trozo de circunferencia mediante una cúbica y la otra solución es usar las **curvas racionales de Bézier**.

Proponemos el siguiente problema:

En este ejercicio se buscará una cónica de Bézier para aproximar un cuarto de circunferencia. Por simplicidad se supondrá que la circunferencia está centrada en el origen y que el cuarto de la circunferencia esté en el primer cuadrante. Sea  $r$  el radio de la circunferencia. El objetivo es hallar los puntos  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  tales que  $\mathbf{r}(t) = \mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3](t)$  sea la cónica buscada (véase la figura 6.3). Ya que el cuarto de circunferencia debe pasar por  $(r, 0)^t$  y por  $(0, r)^t$ , se exige que  $\mathbf{b}_0 = (r, 0)^t$  y  $\mathbf{b}_3 = (0, r)^t$ .

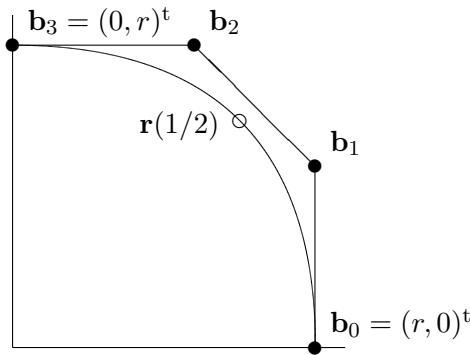


Figura 6.3.: Aproximación de una circunferencia por una cónica de Bézier.

- Como la tangente en  $(r, 0)^t$  es vertical se exige  $\alpha'(0) = (0, \lambda)^t$  para algún  $\lambda > 0$  y por idéntico motivo se exige  $\alpha'(1) = (-\mu, 0)^t$  para  $\mu > 0$ . Por cuestión de simetría, se toma  $\lambda = \mu$ . Pruébese que  $\mathbf{b}_1 = (r, \lambda/3)^t$  y que  $\mathbf{b}_2 = (\lambda/3, r)^t$ .
- Por tanto, sólo hace falta determinar  $\lambda$ . Forzamos que el punto que está en la mitad de la curva de Bézier pase por la mitad del cuarto de circunferencia. Hágase  $\mathbf{r}(\frac{1}{2}) = (r\sqrt{2}/2, r\sqrt{2}/2)^t$  para hallar  $\lambda$ .

Por curiosidad, las circunferencias dibujadas en este proyecto se han dibujado usando este problema.

Mostramos ahora una utilidad de la invarianza afín: Sean

$$\mathbf{b}_0 = (1, 0)^t, \quad \mathbf{b}_1 = (s, t)^t, \quad \mathbf{b}_2 = (t, s)^t, \quad \mathbf{b}_3 = (0, 1)^t$$

los puntos de control para dibujar de forma aproximada la porción de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  contenida en el primer cuadrante (véase la figura 6.4).

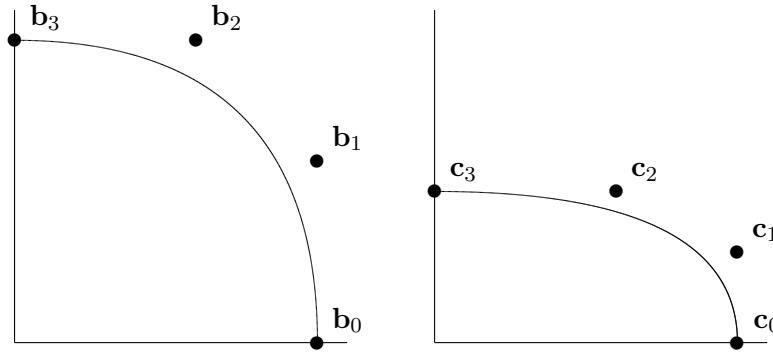


Figura 6.4.: Una aplicación de la invarianza afín para dibujar elipses. En este dibujo se ha tomado la aplicación  $A(x, y) = (x, y/2)$ .

Como la transformación lineal  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $A(x, y) = (ax, by)$  transforma la circunferencia mencionada en la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , entonces esta elipse se puede dibujar de forma aproximada como la curva de Bézier cuyos puntos de control son

$$\mathbf{c}_0 = (a, 0)^t, \quad \mathbf{c}_1 = (as, bt)^t, \quad \mathbf{c}_2 = (at, bs)^t, \quad \mathbf{c}_3 = (0, b)^t.$$

## **Contenido del Capítulo 6**

### **1. El algoritmo de de Casteljau.**

- Construcción.
- Representación matricial.

### **2. Curvas de Bézier y polinomios de Bernstein.**

- Forma no recursiva de las curvas de Bézier..
- Polinomios de Bernstein. Propiedades elementales.

### **3. Propiedades de las curvas de Bézier.**

- Invarianza afín.
- La propiedad de la envoltura convexa.
- Interpolación inicial y final.
- Pseudocontrol local.

### **4. Vectores tangentes.**

## 7. Espacio vectorial euclídeo

### OBJETIVOS:

Conocer las propiedades de los espacios euclídeos y los ejemplos más importantes.  
Saber aplicar el teorema de la mejor aproximación. Apreciar las ventajas que supone trabajar con una base ortogonal. Efectuar con fluidez el proceso de Gram-Schmidt y la factorización  $QR$  de una matriz.

Cuando los matemáticos posteriores a Descartes desarrollaron la geometría analítica no se dieron cuenta que el concepto de perpendicularidad era independiente del concepto de paralelismo. Los desarrollos obtenidos por los matemáticos en los siglos XVIII y principios del XIX los consideraron como parte del mismo tipo de geometría.

Fue a principios del siglo XIX, con el estudio de la geometría proyectiva y las geometrías no euclídeas cuando se observó que las ideas de paralelismo e incidencia son conceptos independientes de la métrica del espacio. El desarrollo de la teoría que hoy conocemos como producto interno vino de dos caminos diferentes: el álgebra y el análisis.

Grassmann definió en su libro *Die lineale ausdehnungslehre* lo que llamó cantidad extensiva (un tipo de hipernúmero con  $n$  componentes). Para Grassmann un hipernúmero es una expresión del tipo

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

donde los  $\alpha_i$  son números reales y donde  $e_i$  son unidades cualitativas representadas geométricamente por segmentos de línea dirigidos (de una unidad de longitud) trazados desde un origen común determinando un sistema de ejes ortogonal. Las  $\alpha_i e_i$  son múltiplos de las unidades primarias y están representadas por longitudes  $\alpha_i$  a lo largo de los ejes respectivos, mientras que  $\alpha$  está representado por un segmento de línea dirigido en el espacio cuyas proyecciones sobre los ejes son las longitudes  $\alpha_i$ . Grassmann define la suma y el producto por escalares

$$(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n) = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$

$$\lambda(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = (\lambda\alpha_1) e_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n) e_n$$

Grassmann introdujo dos clases de productos, el interno y el externo. Para el primero Grassmann postuló  $e_i | e_j = \delta_{ij}$ , la propiedad distributiva con respecto a la suma, la conmutativa y  $(\alpha e) | f = \alpha(e | f)$ , siendo  $e$  y  $f$  dos hipernúmeros. Grassmann define el valor numérico de un hipernúmero (lo que hoy llamamos norma) y ángulo entre dos hipernúmeros.

Desde el punto de vista del análisis, ya Euler se dio cuenta, al estudiar el desarrollo de una función en serie trigonométrica, la relación

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx = 0, \quad i \neq j,$$

## 7. Espacio vectorial euclídeo

---

siendo  $f_i, f_j$  cualesquiera funciones del llamado sistema trigonométrico:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}.$$

Legendre (1752–1833) obtuvo, al estudiar la ecuación diferencial que hoy lleva su nombre, una serie de polinomios  $p_i$  que satisfacen

$$\int_{-1}^1 p_i(x)p_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Sturm (1803–1855) y Liouville (1809–1882) generalizaron este tipo de funciones (véase la introducción al Capítulo 6 del programa de Matemáticas) y establecieron una clara analogía del comportamiento de todas estas funciones con el desarrollo hecho por Grassmann. La teoría tuvo que esperar a los trabajos de Hilbert (1862–1943) sobre las ecuaciones integrales definiendo con claridad un producto interno en el espacio de las funciones que generaliza al producto de Grassmann.

Aunque Hilbert no desarrolló un lenguaje geométrico puso los fundamentos para el desarrollo de la teoría general que fue hecha por Schmidt (1876–1959) a principios del siglo XX. Consideraba las funciones como elementos de un espacio de dimensión infinita, introdujo la notación que hoy utilizamos, definió el concepto de perpendicularidad, norma y dedujo los principales teoremas: Pitágoras, desigualdad de Bessel, desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.

### 7.1. Producto escalar

En esta sección empezamos definiendo un **producto interior** en un espacio vectorial real  $V$ . Es una regla que asocia dos elementos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  a un escalar denotado  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  que cumple para todos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- a)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .
- b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ .
- c)  $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .
- d)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ .
- e)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Un **espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial con un producto interior.

Explicamos los ejemplos más importantes con los productos escalares usuales:

- a)  $\mathbb{R}^n$ :  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ .
- b)  $\mathcal{C}([a, b])$ :  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ .
- c)  $\mathcal{C}([a, b])$ :  $\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx$ , donde  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  es continua.

Podemos dotar a un espacio vectorial de varios productos escalares, por ejemplo, consideramos  $\mathcal{P}_n$  con los siguientes productos escalares diferentes:

a)  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$

b)  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$

## 7.2. Norma y ángulo en un espacio euclídeo

La **norma** de un vector  $\mathbf{v}$  de un espacio euclídeo se define como  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ . Hay que recordar la idea geométrica que subyace a esta definición (véase el capítulo 1). A continuación se demuestran las siguientes propiedades de la norma: sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , siendo  $V$  un espacio euclídeo y  $\lambda$  un escalar, entonces

1.  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ .
2.  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
3.  $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$ .
4.  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ .
5.  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ . (Desigualdad triangular).

Es conveniente, en la medida que sea posible, realizar dibujos en la pizarra para proporcionar al alumno una mayor base intuitiva.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunjakovski permite definir el ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  entre dos vectores no nulos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  por medio de

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

En particular podemos definir el concepto de **perpendicularidad**. Dos vectores son **perpendiculares** u **ortogonales** cuando su producto escalar es nulo. A continuación demostramos el teorema de Pitágoras en un espacio euclídeo. Insistimos en representar gráficamente los resultados.

## 7.3. Proyecciones sobre subespacios

Un concepto originado de la geometría, que tiene importantes aplicaciones, es el de **complemento ortogonal de un subespacio**. Si  $U$  es un subespacio de un espacio euclídeo  $V$ , entonces definimos este subconjunto como

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Enunciamos los siguientes hechos básicos (las demostraciones de las dos primeras se pueden dejar como ejercicios):

## 7. Espacio vectorial euclídeo

---

- a)  $U^\perp$  es un subespacio de  $V$ .
- b) Si  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base de  $U$ , entonces  $\mathbf{v} \in U^\perp$  si y sólo si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .
- c) Si  $U$  es un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio vectorial euclídeo  $V$ , entonces todo vector  $\mathbf{v}$  de  $V$  se puede expresar de manera única como  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , siendo  $\mathbf{u} \in U$ ,  $\mathbf{w} \in U^\perp$  (véase la figura 7.1).

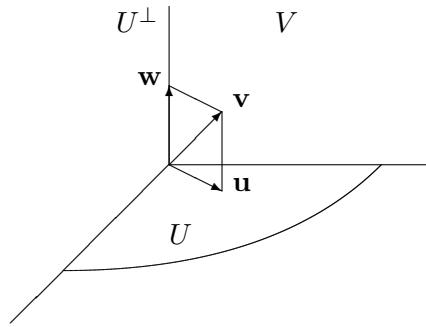


Figura 7.1.: La proyección sobre  $U$  y sobre  $U^\perp$ .

Esta última afirmación se puede enunciar como  $V = U \oplus U^\perp$ . No la hacemos así al no haber definido la suma de subespacios ni la suma directa.

Es necesaria hacer la demostración de la última propiedad, ya que la prueba proporciona un método para hallar la proyección de un vector  $\mathbf{v}$  sobre un subespacio  $U$  conocida una base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ . Si suponemos que existe  $\mathbf{u} \in U$  tal que  $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in U^\perp$ , si  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$ , obtenemos el siguiente sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

Demostramos que este sistema es compatible determinado. Esta propiedad nos permite definir las **proyecciones ortogonales** sobre subespacios (denotaremos  $P_U$  la proyección ortogonal sobre el subespacio  $U$ ).

Enunciamos el teorema de la **mejor aproximación**: Sean  $U$  un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo  $V$  y  $\mathbf{v} \in V$ . Si  $\mathbf{u} \in U$  cumple  $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in U^\perp$  (es decir,  $\mathbf{u} = P_U(\mathbf{v})$ ) entonces se verifica

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}'\|, \quad \forall \mathbf{u}' \in U.$$

Es interesante hacer la demostración del teorema, al mismo tiempo que se ilustra en la pizarra la figura correspondiente (véase la figura 7.2), ya que esta figura nos proporciona casi automáticamente la la demostración: el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo de vértices  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$  y  $\mathbf{v}$ . También la siguiente definición es intuitiva si se hace este dibujo: La **distancia** de un vector  $\mathbf{v}$  a un subespacio  $U$  es  $\|\mathbf{v} - P_U(\mathbf{v})\|$ .

Hacemos el ejemplo concreto de aproximar una función  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$  mediante polinomios de grado menor o igual que 2 en el intervalo  $[0, 1]$ . Es conveniente representar  $f$  con un

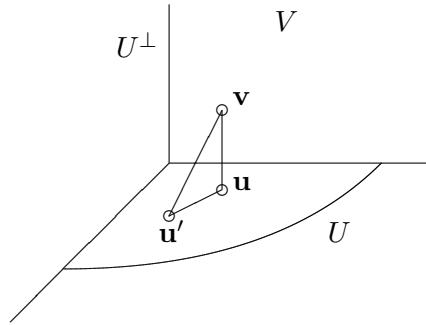


Figura 7.2.: El teorema de la mejor aproximación.

ordenador y su aproximación para convencer al alumno de la bondad del método. En este ejemplo ha surgido la matriz de Hilbert de orden 3. Esta matriz es el ejemplo clásico de las matrices mal condicionadas. Posteriormente describiremos una serie de conceptos para mejorar la situación.

La siguiente observación ayuda a introducir el siguiente punto. ¿Qué condiciones tiene que cumplir la base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  para que el sistema (7.1) sea lo más sencillo posible de resolver, es decir, diagonal? Fácilmente vemos que esta condición debe ser  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ , si  $i \neq j$ , concepto éste con claras connotaciones geométricas.

## 7.4. Bases ortogonales y proceso de Gram-Schmidt

Decimos que  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es un **sistema ortogonal** si los vectores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  son perpendiculares dos a dos. Si además tienen norma uno se dice que el sistema es **ortonormal**. Demostramos que todo sistema ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente. Para establecer que el recíproco no es cierto, mediante la intuición geométrica, instamos al alumno a buscar un contraejemplo.

Una de las ventajas de trabajar con bases ortogonales es que el sistema (7.1) es diagonal. Al resolverlo, si una base ortogonal de  $U$  es  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , obtenemos

$$P_U(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i.$$

Ahora las siguientes propiedades son fáciles de demostrar y se pueden dejar como ejercicios. Conviene efectuar dibujos en la pizarra explicando intuitivamente las propiedades:

- a)  $P_U$  es lineal.
- b)  $\ker P_U = U^\perp$ ;  $\text{Im } P_U = U$ .

Es fácil ahora probar la identidad de Parseval y la desigualdad de Bessel. En este momento introducimos los coeficientes de Fourier<sup>1</sup> de una función  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ . Es conveniente aclarar que sólo vamos a trabajar con sumas finitas y subespacios de dimensión finita y que

<sup>1</sup>Para una mayor información de las series de Fourier véase el Capítulo 5 del temario de Matemáticas.

## 7. Espacio vectorial euclídeo

---

la teoría completa no se podrá ver hasta segundo curso de la carrera, ya que ahora el alumno no dispone de las herramientas necesarias.

Utilizando el hecho de que el sistema trigonométrico

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$$

es ortogonal respecto al producto usual en  $\mathcal{C}([-π, π])$ , obtenemos que de todas las funciones que pertenecen a la envoltura lineal del sistema trigonométrico, la más “próxima” a  $f(x)$  es el polinomio trigonométrico

$$\frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, \cos kx \rangle}{\|\cos kx\|^2} \cos kx + \frac{\langle f, \sin kx \rangle}{\|\sin kx\|^2} \sin kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Entendemos por más “próxima”, la función  $g(x) \in L\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$  de modo que minimice el valor de la integral

$$\|f - g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Este valor se llama **error cuadrático medio** y mide si la aproximación es buena o no. Cuanto menor sea este valor, mejor será la aproximación. Conviene hacer un ejemplo concreto y dibujar las gráficas para que el alumno se familiarice con esta técnica.

Debido a las ventajas de tener bases ortogonales es preciso incitar al alumno a preguntarse si hay un proceso que permita hallar bases ortogonales. La respuesta es sí. Enseñamos en este punto el **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**. Si  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base de  $U$ , entonces los siguientes vectores definidos de forma recursiva (véase la figura 7.3) forman una base ortogonal.

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{u}_n - P_{L\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-1}\}}(\mathbf{u}_n), \quad n > 1.$$

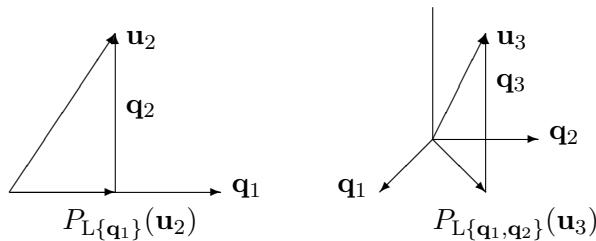


Figura 7.3.: Proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt.

Creemos que es conveniente dar dos tipos de ejemplos, en  $\mathbb{R}^n$  y hallar una base de  $\mathcal{P}_n$ , (con  $n = 2$  ó  $3$ ) con el producto escalar usual en  $\mathcal{C}([-1, 1])$ , introduciendo los **polinomios de**

**Legendre.** Nos detenemos un poco en este ejemplo, efectuando un problema de aproximación. Además, explicamos que mediante un cambio  $t \mapsto ax + b$ , podemos trabajar en cualquier intervalo cerrado y acotado usando los polinomios de Legendre ya tabulados.

De paso conviene explicar que hemos obtenido el siguiente importante resultado teórico: Todos los espacios euclídeos de dimensión finita poseen una base ortogonal.

## 7.5. Matrices ortogonales. Factorización $QR$

Geométricamente interesa definir aquellas aplicaciones que conservan el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$  puesto que son transformaciones geométricas que conservan las distancias. Fácilmente demostramos la equivalencia

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \iff \quad A^t A = I.$$

Este tipo de matrices se llaman **ortogonales**. Se observa fácilmente que los vectores columna de una matrices ortogonal forman un sistema ortonormal. También se deduce que si  $A$  es ortogonal, entonces  $A^t$  también, y por tanto los vectores fila de  $A$  son ortonormales.

Si se aplica el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de una matriz  $A$ , si son linealmente independientes, entonces se obtienen una matriz  $Q$  del mismo tamaño que  $A$  cuyas columnas son ortonormales y una matriz  $R$  cuadrada triangular superior cumpliendo  $A = QR$ . Ésta es la **factorización  $QR$**  de la matriz  $A$ . Si  $A$  es cuadrada, entonces  $Q$  es ortogonal. Creemos conveniente efectuar un ejemplo con una matriz concreta.

La bibliografía para este tema es muy extensa y el tratamiento es prácticamente similar en los libros de álgebra lineal, aunque nos hemos ceñido al texto [37]. También puede consultarse [32]. El texto [41] es adecuado para problemas. Para una introducción a los espacios de dimensión infinita, en especial a una introducción a las series de Fourier resulta útil [2].

## Contenido del Capítulo 7

### 1. Producto escalar.

- Definición de producto escalar y de espacio euclídeo.
- Ejemplos:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}([a, b])$ . Un espacio vectorial puede tener varios productos escalares.

### 2. Norma y ángulo en un espacio euclídeo.

- Definición de norma. Propiedades.
- Definición de ángulo. Perpendicularidad. Teorema de Pitágoras.

### 3. Proyecciones sobre subespacios.

- Complemento ortogonal de un subespacio. Propiedades.
- Proyecciones sobre subespacios. Propiedades.
- Teorema de la mínima aproximación. Distancia de un vector a un subespacio.

### 4. Bases ortogonales. Coeficientes de Fourier. Proceso de Gram-Schmidt.

- Sistemas ortogonales y ortonormales. Todo sistema ortogonal es un sistema linealmente independiente.
- Fórmula de la proyección de un vector sobre un subespacio con base ortogonal. Ejemplos geométricos y en  $\mathcal{C}([a, b])$ .
- Coeficientes de Fourier de  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ . Polinomios trigonométricos.
- Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Ejemplos. Polinomios de Legendre.

### 5. Matrices ortogonales. Factorización $QR$ .

- Matrices ortogonales. Propiedades.
- Factorización  $QR$ . Ejemplos.

## 8. Aproximación por mínimos cuadrados

### OBJETIVOS:

Conocer la técnica de los mínimos cuadrados, en particular resolver de manera aproximada sistemas incompatibles, aproximar por rectas, parábolas, polinomios, modelos lineales y exponenciales una nube de puntos. Calcular la distancia entre variedades lineales.

En el primer día del año 1801, un cuerpo, posteriormente identificado como un asteroide y llamado Ceres, fue descubierto mientras que se aproximaba al Sol. Los astrónomos fueron incapaces de calcular su órbita, a pesar de que pudieron observar este cuerpo durante 40 días seguidos hasta que lo perdieron de vista. Después de sólo tres observaciones Gauss desarrolló una técnica para calcular su órbita con tal precisión que los astrónomos a finales de 1801 y principios de 1802 pudieron localizar Ceres sin ninguna dificultad. Con este avance en astronomía, Gauss logró un rápido reconocimiento en el ámbito científico. Su método, que no fue descrito hasta 1809 en el libro *Theoria motus corporum coelestium*, todavía es usado hoy en día y sólo requiere unas pocas modificaciones para adaptarse a los ordenadores modernos.

Tres años antes y de modo independiente, Legendre en su *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, desarrolló el primer tratamiento del método de los mínimos cuadrados.

En esencia el método de Gauss fue como sigue. Si se obtiene una tabla de medidas entre las variables  $x$  e  $y$  ligadas por medio de la relación  $y = a + bx$ :

$x$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

Y se busca la recta  $y = a + bx$  que mejor se “ajusta” a esta tabla de puntos, se debe intentar hacer mínima la función de dos variables

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2,$$

Para ello se iguala  $\partial f / \partial a$  y  $\partial f / \partial b$  a cero obteniendo un sistema de ecuaciones. Modernamente se prefiere deducir este sistema por métodos algebraicos, ya que si lo que se pretende es minimizar la norma de cierto vector de  $\mathbb{R}^n$ , parece claro que podemos utilizar técnicas de producto interior.

### 8.1. Método de los mínimos cuadrados

Comenzamos enunciando con generalidad el **método de mínimos cuadrados** cuyo objetivo es “resolver” de manera aproximada sistemas incompatibles.

## 8. Aproximación por mínimos cuadrados

---

Consideremos el sistema incompatible  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , siendo  $A$  una matriz  $m \times n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Es claro que  $A\mathbf{x} - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Pero nos interesa encontrar  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  de modo que  $A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$  sea lo más próximo posible a  $\mathbf{0}$ , es decir hay que encontrar  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|$  sea lo menor posible (véase la figura 8.1).

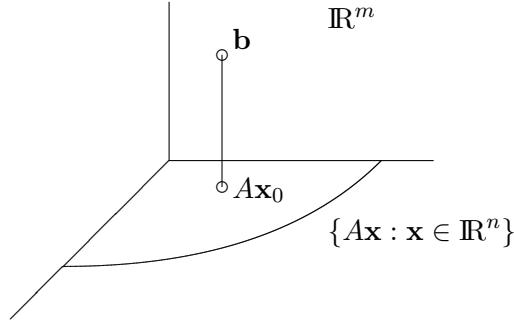


Figura 8.1.: Deducción de las ecuaciones normales.

Por el teorema de la mejor aproximación obtenemos que  $\mathbf{x}_0$  cumple  $\langle A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}, A\mathbf{x} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . De aquí es fácil deducir las **ecuaciones normales**:

$$A^t A \mathbf{x}_0 = A^t \mathbf{b}.$$

La solución  $\mathbf{x}_0$  se llama **solución óptima** y la cantidad  $\|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\|$  se llama **error cuadrático**. Esta cantidad mide la bondad del ajuste.

Finalizamos la sección indicando que si las filas de  $A$  son independientes (lo que ocurre en prácticamente todas las situaciones interesantes), entonces disponemos de la factorización  $QR$  de la matriz  $A$ . Ahora el sistema de las ecuaciones normales se reduce a  $R\mathbf{x} = Q^t \mathbf{b}$ . Esta factorización permite probar que si las filas de  $A$  son linealmente independientes, el sistema de las ecuaciones normales tiene solución única.

En cursos posteriores, cuando el alumno disponga del concepto de número de condición de una matriz, se estudiarán las ecuaciones normales desde el punto de vista del cálculo numérico, llegando a la conclusión de que la matriz  $A^t A$  suele estar mal condicionada. Para arreglar esta deficiencia se utiliza precisamente la factorización  $QR$  de la matriz  $A$ .

Preferimos no dar ejemplos concretos en esta sección ya que en la sección siguiente se encontrarán numerosos ejemplos de aplicación de las ecuaciones normales.

## 8.2. Ajuste de datos

El primer ejemplo que desarrollamos es el ajuste por rectas. Sea la tabla de valores obtenida empíricamente que relaciona las variables  $x$  e  $y$ :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \tag{8.1}$$

Deseamos encontrar los valores  $a_0, a_1$  tales que la recta  $y = a_0 + a_1 x$  se ajusta mejor a los datos. Esta recta se llama **recta de regresión**. Si forzamos que los datos pasen por la recta

planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible si y sólo si los puntos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  están alineados, lo que normalmente no ocurre en la práctica. Las ecuaciones normales del sistema anterior son

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix},$$

que proporcionan las fórmulas para calcular los coeficientes de la recta buscada.

Las fórmulas son mucho más sencillas si trabajamos en un sistema de referencia diferente. En efecto, vamos a hallar la recta  $y = c + d(x - \bar{x})$  que mejor ajusta a los datos de la tabla (8.1), siendo  $\bar{x}$  la media aritmética de los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Forzando a que los puntos  $(x_i, y_i)$  pasen por la recta obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones normales son

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 - \bar{x} & \dots & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 - \bar{x} & \dots & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y},$$

siendo  $\bar{y}$  la media aritmética de  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , las ecuaciones normales se reducen a

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y} \end{pmatrix},$$

por lo que la recta buscada es

$$y = \bar{y} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x - \bar{x}).$$

Es conveniente introducir las siguientes cantidades (estos valores son importantes en estadística). Si nos fijamos en la pendiente de la recta de regresión, dividiendo el numerador y el denominador por  $n$  y denotando  $E(z)$  la media aritmética de la variable  $z$ , obtenemos

$$d = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{E((x - \bar{x})^2)}.$$

## 8. Aproximación por mínimos cuadrados

---

El denominador mide cuán dispersas están distribuidas las medidas de la variable  $x$ , este valor se llama **varianza** de  $x$  y se denota  $\sigma(x)^2$ . En general, dada la variable  $z$ , la varianza de  $z$  es  $\sigma(z)^2 = E[(z - E(z))^2]$ .

Por otra parte, si la pendiente es nula entonces la recta de regresión es una constante (la media de las  $y_i$ ), esto quiere decir que las  $x_i$ s no han influido para nada en los valores de las  $y_i$ s, por tanto el numerador mide el grado de dependencia entre las variables  $x$  e  $y$ . Se llama **covarianza** entre  $x$  e  $y$  y se denota  $\sigma(x, y)$ . Por tanto la recta de regresión es

$$y = \bar{y} + \frac{\sigma(x, y)}{\sigma(x)^2} (x - \bar{x}).$$

La fórmula del error cuadrático para este ajuste es

$$E = \sum_{i=1}^n (c + d(x_i - \bar{x}) - y_i)^2,$$

siendo  $c$  y  $d$  los valores obtenidos. Esta expresión se puede simplificar:

$$E = n \frac{\sigma(x)^2 \sigma(y)^2 - \sigma(x, y)^2}{\sigma(x)^2}.$$

Observamos que de paso hemos obtenido  $\sigma(x)\sigma(y) \geq \sigma(x, y)$ , al ser el error una cantidad mayor o igual que cero.

Pero esta forma de medir el error no es buena porque, si por ejemplo aumentamos el número de experimentos, es decir, incrementamos el valor de  $n$ , el error aumenta, lo que no es lógico. Introducimos el **índice de determinación** como otra medida de la bondad de un ajuste con el cual se corrige este defecto:

$$R = \frac{\sigma(x, y)^2}{\sigma(x)^2 \sigma(y)^2}.$$

Es trivial que  $0 \leq R \leq 1$ . Cuanto más próximo esté  $R$  a 1,  $\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(x, y)$  será más cercano a 0, por lo que el error cometido es más pequeño y mejor es el ajuste.

El siguiente ajuste que hacemos es por parábolas. Dada la tabla (8.1), deseamos encontrar los valores  $a_0, a_1, a_2$  tales que la parábola  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  se ajusta mejor a los datos. Si forzamos que los datos pasen por la parábola entonces planteamos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

El sistema es compatible si y sólo si los puntos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  yacen en una única parábola, lo que normalmente no ocurre en la práctica. Las ecuaciones normales del sistema anterior son

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}.$$

Considerando los ejemplos previos inducimos el caso general. El polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$  de grado  $n$  que mejor ajusta a los datos debe cumplir

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{pmatrix}.$$

Los ajustes anteriores son sólo casos particulares del **ajuste por modelos lineales**. Dada la tabla (8.1) deseamos encontrar una función de la forma

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_m\phi_m(x)$$

que mejor ajusta a los datos. En este caso las incógnitas son  $a_0, a_1, \dots, a_m$  y las funciones  $\phi_i(x)$  son conocidas. En primer lugar forzamos a que los puntos de la tabla verifiquen la ecuación de la curva:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0(x_1) & \cdots & \phi_m(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_0(x_n) & \cdots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = A\mathbf{x}.$$

Las ecuaciones normales son como antes:  $A^t\mathbf{b} = A^tA\mathbf{x}_0$ . Ilustramos el ejemplo con dos tipos de modelos lineales:  $ae^x + be^{-x}$ ,  $a + bx/x$ .

A veces los datos responden a un comportamiento que no se puede modelar linealmente. El ejemplo más importante es el **ajuste exponencial**. Supongamos que disponemos de una tabla como las anteriores y que los datos siguen una relación de tipo  $y = a \exp(bx)$ . Si forzamos a que los puntos  $(x_i, y_i)$  verifiquen la ecuación obtenemos

$$\begin{cases} y_1 = a \exp(bx_1) \\ \cdots = \cdots \\ y_n = a \exp(bx_n) \end{cases}$$

Obviamente este sistema (las incógnitas son  $a$  y  $b$ ) no es lineal; pero lo podemos linealizar tomando logaritmos:

$$\begin{cases} \log(y_1) = \log(a) + bx_1 \\ \cdots = \cdots \\ \log(y_n) = \log(a) + bx_n \end{cases}$$

obtenemos un sistema lineal cuyas incógnitas son  $\log(a), b$ . Escribimos este sistema en forma matricial, planteamos las ecuaciones normales y hallamos los valores óptimos. Explicamos el siguiente ejemplo concreto: En un caldo de cultivo se halla una colonia de bacterias en crecimiento. Para averiguar el ritmo de crecimiento se cuenta el número de bacterias en el tiempo  $t$ , obteniéndose esta tabla:

$t$ (tiempo)	0	1	2	3	4
$n$ (bacterias)	20	41	83	170	331

por razones teóricas<sup>1</sup> se supone que las variables  $n$  y  $t$  están relacionadas por la ley  $n = \alpha \exp(\beta t)$ .

<sup>1</sup> Cuando se estudian problemas de poblaciones donde la razón de crecimiento es proporcional al número de habitantes surge la ecuación diferencial  $y'(t) = ky(t)$ .

### 8.3. Mínimos cuadrados ponderados

Empezamos esta sección con un ejercicio sencillo: Si obtenemos una serie de medidas  $y_1, \dots, y_n$ , ¿cuál será el valor más probable? Planteando las ecuaciones normales obtenemos que este valor es la media aritmética de  $y_1, \dots, y_n$ .

De alguna manera este valor es el esperado, puesto que los datos  $y_1, \dots, y_m$  juegan un papel simétrico. Pero puede pasar que no todas las medidas estuviesen hechas con la misma precisión. Por lo que tenemos que dar mayor “peso” a las medidas más precisas. Esto mismo puede pasar cuando estamos ajustando por una recta o cualquier curva a una tabla de puntos. Esta situación se corrige utilizando un producto escalar que no es el usual de  $\mathbb{R}^n$ . El ajuste que efectuamos se llama por **mínimos cuadrados ponderados**.

Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ , definimos el siguiente producto escalar:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = w_1 x_1 y_1 + \dots + w_n x_n y_n = \mathbf{x}^t W \mathbf{y},$$

siendo  $w_i$  números positivos (llamados **pesos**) y  $W$  una matriz diagonal cuyas componentes de la diagonal principal son  $w_i$ . El significado intuitivo de  $w_i$  es que si la medida  $i$  es más precisa que la medida  $j$ , entonces debemos de dar a  $w_i$  un valor mayor que  $w_j$ .

Sea  $A$  una matriz  $n \times m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Queremos hallar el vector  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$  que minimiza el valor de  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ . Este vector debe cumplir  $A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b} \perp A\mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . Utilizando el producto escalar definido en esta sección deducimos las **ecuaciones normales ponderadas**:

$$A^t W A \mathbf{x}_0 = A^t W \mathbf{b}.$$

Crremos conveniente repetir el ejemplo hecho al principio de esta sección, obteniendo en este momento que el mejor valor debe ser

$$\frac{w_1 y_1 + \dots + w_n y_n}{w_1 + \dots + w_n}.$$

### 8.4. Distancia entre variedades lineales

Como una aplicación geométrica, explicamos un método general para calcular la distancia entre dos variedades afines de  $\mathbb{R}^k$  (véase [6]). Sean las variedades lineales de ecuaciones

$$\mathbf{p} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{q} + \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j.$$

Tenemos que encontrar  $\lambda_i, \mu_j$  que minimicen

$$\left\| \mathbf{p} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i - \left( \mathbf{q} + \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j \right) \right\| = \left\| (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu_1 \\ \vdots \\ -\mu_m \end{pmatrix} - (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right\| = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|,$$

donde  $A = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ ,  $\mathbf{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m)^t$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ . Por tanto hay que resolver

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}. \quad (8.2)$$

Este sistema proporciona un método general para calcular la distancia entre variedades (y los puntos que minimizan la distancia). Hacemos un ejemplo concreto.

Además, observamos que este método proporciona un corolario: el vector que une los puntos de mínima distancia es perpendicular a los subespacios soporte de las variedades. En efecto, si denotamos

$$U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m), \quad L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t, \quad M = (\mu_1, \dots, \mu_m)^t,$$

entonces (8.2) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} U^t U & U^t V \\ V^t U & V^t V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^t \mathbf{b} \\ V^t \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

de donde

$$U^t (UL - VM - \mathbf{b}) = V^t (UL - VM - \mathbf{b}) = O.$$

Luego el vector

$$UL - VM - \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j - (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (\mathbf{p} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i) - (\mathbf{q} + \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j)$$

es perpendicular a  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ . Vemos que cuando las bases de los subespacios soporte son ortogonales, el sistema (8.2) se simplifica.

Este capítulo se halla desarrollado en [37], si bien añadimos [51, 55, 68] por el estudio detallado que hace del método de los mínimos cuadrados. Los problemas planteados en [41] son un buen complemento de los libros anteriores.

## **Contenido del Capítulo 8**

### **1. Método de los mínimos cuadrados.**

- Ecuaciones normales. Solución óptima. Error cuadrático.
- Propiedades de las ecuaciones normales.

### **2. Ajuste de datos.**

- Ajuste por rectas. Varianza, covarianza, índice de determinación. Propiedades del índice de determinación. Ejemplo.
- Ajuste por parábolas. Ejemplo.
- Ajuste por polinomios. Ejemplo.
- Ajuste por modelos lineales. Ejemplo.
- Ajuste exponencial. Ejemplo.

### **3. Mínimos cuadrados ponderados.**

- Introducción a los mínimos cuadrados ponderados.
- Ecuaciones normales ponderadas.

### **4. Distancia entre variedades lineales.**

- Planteamiento y resolución del problema.
- Ejemplo. Consecuencia geométrica.

## 9. Teoría espectral

### OBJETIVOS:

Saber calcular valores y vectores propios. Entender y aplicar las caracterizaciones de las matrices diagonalizables. Encontrar la factorización espectral de una matriz diagonalizable. Saber las propiedades de las matrices simétricas y encontrar una base ortonormal de vectores propios.

El tema de los valores propios apareció cuando Euler, en el primer tercio del siglo XVIII, estudió sistemáticamente la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables en el plano y en el espacio respectivamente. Demuestra que existen unos ejes perpendiculares donde la expresión de la cónica o cuádrica es especialmente sencilla. Posteriormente en 1760 en su libro *Recherches sur la courbure des surfaces*, al estudiar las secciones normales de una superficie en un punto encuentra que hay dos planos mutuamente ortogonales cuyas secciones proporcionan las curvas de máxima y mínima curvatura. Posteriormente se vio que estas dos situaciones son casos particulares del hecho de que un operador autoadjunto es ortogonalmente diagonalizable. La noción de polinomio característico aparece explícitamente en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales en 1774 y en el trabajo de Laplace (1749–1827) en 1775.

Cauchy reconoció el problema del valor característico común en la obra de Euler, Lagrange y Laplace. En 1826 tomó el problema de la reducción de la forma cuadrática en tres variables y demostró que la ecuación característica es invariante para cualquier cambio en los ejes rectangulares. En 1829 Cauchy prueba que los valores propios de una matriz simétrica son reales. Las matrices hermíticas fueron introducidas por Hermite (1822–1901). Frobenius en 1878 prueba la diagonalizabilidad de las matrices ortogonales, extendiendo en 1883 la demostración a matrices unitarias. El teorema espectral para operadores normales es debido a Toeplitz (1881–1940).

Jacobi (1804–1851) dio la solución del sistema de ecuaciones diferenciales  $Y' = AY$ , siendo  $A$  una matriz diagonalizable. Jordan resolvió el caso no diagonalizable usando los conceptos de matrices similares y de ecuación característica. En el libro *Traité des substitutions* (1870) demostró que una matriz puede ser transformada a una forma canónica hoy llamada forma canónica de Jordan.

Un paso simultáneo hacia el concepto de valor y vector propio en un espacio vectorial abstracto lo dieron Sturm y Liouville al estudiar las ecuaciones que hoy llevan su nombre (véase el capítulo 6 de Matemáticas). Observaron que si  $\phi$  es cierto operador diferencial, entonces existe una cantidad numerable de valores  $\lambda_n$  tales que existen funciones  $y_n$  no nulas ortogonales entre sí verificando  $\phi(y_n) = \lambda_n y_n$ .

Desde 1904 hasta 1910, Hilbert estudió la ecuación integral  $u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y) dy$ . Supone que  $K$  es simétrico y define lo que es un operador autoadjunto para un espacio de

funciones, lo que le permite hacer uso de las propiedades de las matrices simétricas en el caso finito. En concreto demuestra que el operador  $\phi(u)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy$  es autoadjunto. Las autofunciones asociadas a los distintos autovalores son perpendiculares dos a dos. Con estos resultados Hilbert puede demostrar lo que se conoce como el teorema de los ejes principales generalizado en espacios de dimensión infinita. Hilbert llevó a cabo un proceso de paso al límite que le permitió generalizar resultados sobre sistemas finitos de ecuaciones lineales. Sobre esta base decidió que un tratamiento de las formas cuadráticas infinitas “*vendría a completar de una manera esencial la teoría bien conocida de las formas cuadráticas con un número finito de variables*”.

## 9.1. Conceptos básicos

Sea  $A$  una matriz cuadrada cuyas entradas están en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un **valor propio** si existe  $\mathbf{v} \in V$  no nulo tal que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Decimos que  $\mathbf{v} \in V$  es un **vector propio** asociado al valor propio  $\lambda$  si  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Creemos que es conveniente abstenerse de hacer ejemplos porque el siguiente teorema proporciona un método fácil para calcular valores y vectores propios. Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces  $\lambda$  es valor propio si y sólo si  $\det(A - \lambda I) = 0$ . El polinomio  $\det(A - \lambda I) = 0$  (no demostramos que es un polinomio de grado igual al orden de  $A$ ) se llama **polinomio característico**.

Además es evidente que el conjunto de vectores propios asociados a  $\lambda$  se obtiene resolviendo el sistema indeterminado  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Estos resultados proporcionan un método para calcular valores y vectores propios: primero calculamos los valores propios y para cada valor propio calculamos el subespacio de vectores propios correspondientes.

También señalamos que una matriz real puede tener valores y vectores propios complejos. Se tiene el siguiente resultado importante: vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes.

## 9.2. Diagonalización de matrices

Definimos la **multiplicidad algebraica** de  $\lambda$ , denotada por  $m_a(\lambda)$ , como la multiplicidad de  $\lambda$  como raíz del polinomio característico. La **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$ , denotada por  $m_g(\lambda)$ , es la dimensión de las soluciones del sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Fácilmente se puede probar que  $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ .

Una matriz cuadrada  $A$  es **diagonalizable** si tiene una base de vectores propios. Enunciaremos sin demostrar una equivalencia útil para comprobar si una matriz es diagonalizable: una matriz es diagonalizable si y sólo si  $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$  para todo valor propio  $\lambda$ . De aquí se puede deducir fácilmente que si una matriz cuadrada de orden  $n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable. El recíproco es falso, como puede verse tomando la matriz identidad. Hacemos un par de ejemplos concretos.

Uno de los resultados más importantes del tema es el siguiente resultado, llamado **factorización espectral de una matriz**, sencillo de demostrar con las herramientas desarrolladas hasta ahora: Si una matriz  $A$  es diagonalizable, entonces  $A = SDS^{-1}$ , siendo  $S$  la matriz cuyas columnas son los vectores propios de  $A$  y  $D$  la matriz diagonal cuyas entradas son los valores propios de la diagonal. Hacemos un ejemplo.

### 9.3. Diagonalización de matrices hermíticas

Esta sección completa los resultados sobre diagonalización de las secciones anteriores. Recordamos que una matriz real simétrica  $A$  cumple  $A = A^t$ . Esta definición es equivalente a decir que con el producto usual de  $\mathbb{R}^n$  se verifica

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Las propiedades más importantes de las matrices simétricas son:

- Todo valor propio de una matriz simétrica es real.
- Si  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores propios asociados a dos valores propios diferentes de una matriz simétrica, entonces  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son ortogonales.
- Toda matriz simétrica tiene una base ortonormal de vectores propios.

Creemos conveniente probar los dos primeros, mientras que la prueba del tercero (que usualmente es por inducción sobre el orden de la matriz y usa el teorema fundamental del álgebra, véase por ejemplo [51, 55]) no es constructiva. Este último enunciado traducido a una matriz simétrica  $A$  es que existe  $U$  ortogonal y  $D$  diagonal tal que  $A = UDU^t$ . Hacemos varios ejemplos concretos de obtención de estas matrices, uno de éstos cuando la multiplicidad geométrica de algún valor propio es mayor que 1, en donde hay que acudir al proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Para calcular los valores propios de una matriz de orden elevado nos vemos obligados a recurrir a métodos numéricos, los cuales necesitan una aproximación inicial. A continuación describimos un método para encontrar estas aproximaciones iniciales para matrices simétricas. Sea  $A$  una matriz simétrica de orden  $n$ , llamamos **cociente de Rayleigh** a la siguiente función definida en  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$R(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Es trivial, y se deja como ejercicio, probar que si  $\mathbf{v}$  es un vector propio asociado a  $\lambda$ , entonces  $R(\mathbf{v}) = \lambda$ . El siguiente resultado muestra la utilidad de este cociente. Si  $A$  es una matriz simétrica,  $\lambda_{\min}$  es el menor valor propio y  $\lambda_{\max}$  es el mayor valor propio, entonces

$$\lambda_{\min} \leq R(\mathbf{v}) \leq \lambda_{\max}; \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Efectuamos un ejemplo sobre cómo se utilizan estas desigualdades para encontrar estimaciones del menor valor y valor propio.

Somos conscientes de que dejamos sin explicar la **forma canónica de Jordan**. Debido a la dificultad del tema, la falta de tiempo disponible y a que en la mayor parte de problemas prácticos es suficiente manejar matrices diagonalizables<sup>1</sup>, creemos oportuno no mencionar este delicado asunto. Para estudiar la forma canónica de Jordan se puede consultar [51, 68].

Para este tema hemos seguido fundamentalmente [37]. Recomendamos al alumno [68] por su carácter aplicado y sus numerosos ejemplos. Como texto de problemas podemos citar [41, 56].

<sup>1</sup>De hecho el conjunto de matrices diagonalizables de orden  $n$  es denso en el conjunto de las matrices cuadradas de orden  $n$  (véase [34]).

## **Contenido del Capítulo 9**

### **1. Conceptos básicos.**

- Introducción. Valores y vectores propios.
- Cálculo práctico de valores y vectores propios. Polinomio característico. Ejemplos.
- Vectores propios asociados a valores propios diferentes son independientes.

### **2. Diagonalización de matrices cuadradas.**

- Multiplicidades geométrica y algebraica. Propiedades.
- Diagonalizabilidad de matrices. Caracterización.
- Factorización espectral de una matriz.

### **3. Diagonalización de matrices simétricas.**

- Propiedades de los vectores y valores propios de las matrices hermíticas.
- Cociente de Rayleigh. Estimación de los valores propios de una matriz simétrica.

# 10. Aplicaciones de la teoría espectral.

## OBJETIVOS:

Conocer algunas aplicaciones de la teoría de vectores y valores propios como el cálculo de potencias de matrices, estudio de las ecuaciones en diferencias, procesos de Márkov, cónicas y cuádricas.

Como se vio en la introducción histórica del capítulo anterior, Cauchy se dio cuenta de la estrecha relación entre los valores y vectores propios de una matriz simétrica con las direcciones principales y las longitudes de los ejes de la cónica asociada a esta matriz simétrica. El motivo de introducir el concepto de ortogonalmente diagonalizable fue precisamente éste.

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de los valores y vectores propios fue el estudio de las sucesiones dadas por recurrencia lineales, por ejemplo la sucesión de Fibonacci. La técnica que aún usamos hoy en día se reduce al cálculo de la potencia de una matriz.

Márkov (1856–1922) fue el primero en estudiar los procesos estocásticos no dependientes del tiempo, llamados hoy cadenas de Márkov. Una cadena de Márkov es una sucesión de variables dependientes  $X(t_i) = (x_1(t_i), \dots, x_n(t_i))$  identificadas por valores discretos crecientes de  $t_i$  (usualmente el tiempo) con la propiedad de que cualquier predicción de  $X(t_i)$  es sólo función de  $X(t_{i-1})$ . Esto es, el valor futuro de la variable  $X$  depende sólo del valor presente y no de los valores en el pasado. Utilizando la teoría de diagonalización de matrices Márkov pudo estudiar completamente las cadenas de Márkov donde la relación entre  $X(t_i)$  y  $X(t_{i-1})$  es lineal. Su trabajo además ha sido aplicado a la biología. En [55] se describen las matrices de Leslie (introducidas en 1945) con el fin de estudiar problemas de evolución de poblaciones de animales.

## 10.1. Potencias de matrices

La utilidad del cálculo de la potencia de una matriz ya se vio en el Capítulo 2. Aquí presentamos un método para calcular la potencia de una matriz diagonalizable. Esta matriz puede escribirse como  $SDS^{-1}$ , siendo  $S$  invertible y  $D$  diagonal, por lo que  $A^n = SD^nS^{-1}$ . Realizamos el ejemplo del cálculo de  $A^n$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ . En este ejemplo observamos que al ser  $A$  simétrica, normalizando los vectores propios, podemos escribir  $A = SDS^t$ , lo que es mejor que  $A = SDS^{-1}$ .

## 10.2. Cálculo de sucesiones dadas por recurrencia lineal

Una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está dada por **recurrencia lineal** si existen escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tales que

$$u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \dots + \alpha_k u_{n-k}; \quad n > k$$

y además se conocen los primeros  $k$  términos de la sucesión. Presentamos la forma de hallar la fórmula de  $u_n$  con un caso concreto: la sucesión de Fibonacci.

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}; \quad n > 2 \quad u_0 = u_1 = 1.$$

La técnica estriba en definir el vector de  $\mathbb{R}^2$  (en el caso general de  $\mathbb{R}^k$ )  $\mathbf{v}_n = (u_{n+1}, u_n)^t$  y encontrar una matriz  $A$  de orden 2 (en el caso general de orden  $k$ ) constante de modo que  $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$ . El ejemplo se termina expresando  $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0$  y hallando  $A^n$  mediante la técnica descrita en la sección previa.

## 10.3. Cadenas de Márkov lineales

Tras recordar el concepto de matriz estocástica, decimos que una **cadena de Márkov lineal** es una sucesión de vectores  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^k$ , de modo que existe una matriz estocástica  $A$  tal que  $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$ . Ilustramos la definición con un ejemplo concreto y hallamos la solución.

Es conveniente definir el **término estacionario**, es decir el límite de  $\mathbf{x}_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y explicar el significado intuitivo de esta expresión. En muchas ocasiones es útil encontrar el término estacionario de una cadena de Márkov sin hallar de forma explícita  $\mathbf{x}_n$ . Para encontrar este término sin tener que hallar la fórmula general es conveniente enunciar los siguientes hechos:

- $\lambda = 1$  es valor propio de toda matriz estocástica  $A$  (se propone como ejercicio dando como ayuda que demuestren  $(1, \dots, 1)^t$  es vector propio asociado a  $\lambda = 1$  de  $A^t$ ).
- Si  $\lambda$  es un valor propio de una matriz estocástica, entonces  $|\lambda| \leq 1$  (ni lo proponemos como ejercicio ni lo demostramos puesto que la demostración requiere herramientas que no podemos incluir en este curso<sup>1</sup>).
- Si  $A$  es una matriz diagonalizable y estocástica y ningún valor propio tiene módulo 1 (salvo  $\lambda = 1$ ), entonces existe estado estacionario y es un vector propio asociado a 1.

Presentamos un ejemplo concreto y otro ejemplo de una cadena de Márkov que no tiene estado estacionario. Además hacemos el siguiente problema relacionado con las cadenas de Márkov (pero donde la matriz que se obtiene no es estocástica):

Un modelo energético (muy simplificado) es el siguiente: hay dos tipos de energía, la fósil y la eléctrica. Tras cada año, las reservas energéticas se modifican, la fósil se puede transformar en eléctrica, mientras que al contrario no. Asimismo, debido a las reservas hidráulicas podemos suponer que hay un incremento constante de energía eléctrica. También

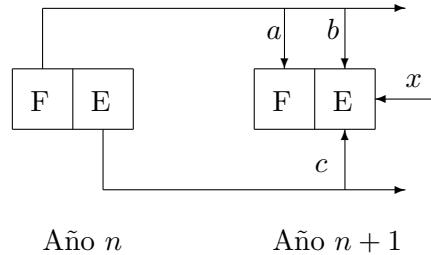


Figura 10.1.: Un modelo simple para la energía.

suponemos que hay unos porcentajes que se pierden debido a que el rendimiento nunca es del 100 %. Las conversiones se muestran en la figura 10.1

Los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tantos por uno y están en  $]0, 1[$ . La cantidad  $x$  es fija y estrictamente positiva. Sean  $e_n$  y  $f_n$  las cantidades de energía eléctrica y fósil tras  $n$  años. Sea  $\mathbf{v}_n = (e_n, f_n)^t$ .

- Halle una matriz  $A$  y un vector  $\mathbf{u}$  tales que  $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n + \mathbf{u}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Pruebe que  $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0 + (I - A^n)(I - A)^{-1}\mathbf{u}$ .
- Describa cuándo la matriz  $A$  es diagonalizable.
- Calcule  $A^n$ .
- Dé una expresión para las cantidades de energía tras  $n$  años. Calcule el término estacionario. ¿Con este modelo, se agotará algún tipo de energía?

## 10.4. Identificación de cónicas y cuádricas

La ecuación general de una cónica es

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

que se puede escribir de forma matricial

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + \mathbf{b}^t \mathbf{x} + c = 0,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2)^t, \quad \mathbf{x} = (x, y)^t.$$

Como  $A$  es simétrica, existen  $S$  ortogonal y  $D$  diagonal de modo que  $A = SDS^t$ , por lo que la cónica es

$$(S^t \mathbf{x}^t) D (S^t \mathbf{x}) + \mathbf{b}^t S (S^t \mathbf{x}) + c = 0.$$

A continuación mediante la técnica de completar cuadrados se halla la ecuación reducida de la cónica. Presentamos un ejemplo concreto con una serie de preguntas: identificar la curva,

<sup>1</sup>Por ser  $A$  estocástica se cumple  $\|A\|_1 = 1$ . Ahora se tiene que si  $\mathbf{v}$  es un vector propio no nulo asociado a  $\lambda$  entonces  $|\lambda|\|\mathbf{v}\|_1 = \|\lambda\mathbf{v}\|_1 = \|A\mathbf{v}\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}\|_1$ , de donde  $|\lambda| \leq 1$ .

## 10. Aplicaciones de la teoría espectral.

las longitudes y direcciones de los ejes, el centro, ... Muchos de estos problemas se hallan directamente y otros deshaciendo los cambios de variables.

El problema de la identificación de cuádricas es análogo al caso de las cónicas.

La bibliografía para este tema es muy extensa, como cabría esperar. Mencionaremos los textos [37, 41, 68]. Para una introducción sencilla a las cadenas de Márkov, sobre todo pensando en aplicaciones a la probabilidad y estadística, puede consultarse [26].

## **Contenido del Capítulo 10**

### **1. Potencias de matrices.**

- Potencia de una matriz diagonalizable. Ejemplo.

### **2. Cálculo de sucesiones dadas por recurrencia lineal.**

- Recurrencia lineal. Cálculo de la fórmula en función de  $n$ . Ejemplo: La sucesión de Fibonacci.

### **3. Cadenas de Márkov lineales.**

- Cadenas de Márkov lineales. Ejemplo.
- Término estacionario.
- Matrices estocásticas. Propiedades. Ejemplo.

### **4. Identificación de cónicas y cuádricas.**

- Cónicas. Ejemplo.
- Cuádricas. Ejemplo.

## 10. Aplicaciones de la teoría espectral.

**Parte II.**

## **Programa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**



# Introducción

A la hora de elaborar un proyecto docente para esta asignatura hay que tener en cuenta la relación con otras asignaturas y la carrera universitaria en la que se ubica. Recordemos que esta asignatura está en el primer cuatrimestre del segundo curso de una ingeniería, por lo que el alumno domina, en cierta medida, el álgebra lineal y las funciones diferenciables de varias variables. Además, hemos procurado dar a la asignatura un enfoque eminentemente práctico, desentendiéndonos, hasta cierto punto, de resultados interesantes pero excesivamente teóricos.

Hemos distribuido la asignatura en estos cinco grandes bloques temáticos:

**Capítulo 1** ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN. APLICACIONES.

**Capítulo 2** ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN  $n$ .

**Capítulo 3** APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN  $n$ .

**Capítulo 4** SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

**Capítulo 5** CÁLCULO VARIACIONAL.

El objetivo del CAPÍTULO 1 es saber clasificar y resolver los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden más comunes. Todo esto se usará para resolver problemas extraídos de la física y de la geometría. Entre otros, hallamos la temperatura de un cuerpo caliente en un medio frío, la desintegración de un cuerpo radiactivo y resolvemos el problema de las trayectorias ortogonales.

En el CAPÍTULO 2 estudiamos las ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$ . Hacemos énfasis cuando los coeficientes son constantes.

En el CAPÍTULO 3 vemos cómo las ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  sirven para estudiar los muelles y los circuitos RLC.

En el CAPÍTULO 4 estudiamos los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y más concretamente lo de coeficientes constantes. Estos sistemas surgen de forma natural al estudiar sistemas de muelles acoplados y redes eléctricas. Aplicamos la teoría espectral de matrices. Evitamos en este tema hacer uso de la exponencial matricial, ya que consideramos que esto obligaría al estudio de las normas matriciales y conceptos de convergencia relativamente complicados.

El objetivo del CAPÍTULO 5 es estudiar el cálculo de variaciones. Sin profundizar mucho en la teoría, explicamos las ecuaciones que surgen y aplicamos estas ecuaciones para resolver varios problemas extraídos de la física y de la geometría.

El libro básico que damos como bibliografía es [37] para los capítulos 1, 2, 3 y 4. Para el quinto hemos seguido [18, 22].

## Índice del programa

### **Capítulo 1** Ecuaciones diferenciales de primer orden.

- 1.1. Ecuaciones separables y reducibles a separables.
- 1.2. Ecuaciones exactas y reducibles a exactas.
- 1.3. Ecuaciones lineales de primer orden y reducibles a lineales.
- 1.4. Algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
- 1.5. Trayectorias ortogonales y oblicuas.

### **Capítulo 2** Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ .

- 2.1. La ecuación lineal de orden  $n$ .
- 2.2. Ecuación lineal de orden  $n$  homogénea de coeficientes constantes.
- 2.3. Búsqueda de soluciones particulares de la ecuación lineal no homogénea.
- 2.4. Ecuación de Euler-Cauchy.

### **Capítulo 3** Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ .

- 3.1. Vibraciones en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos.

### **Capítulo 4** Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

- 4.1. Introducción.
- 4.2. Propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- 4.3. Sistemas homogéneos de coeficientes constantes.
- 4.4. Búsqueda de una solución particular en los sistemas no homogéneos.

### **Capítulo 5** Cálculo variacional.

- 5.1. Introducción.
- 5.2. La ecuación de Euler.
- 5.3. Integrales con más de una función argumento.
- 5.4. Problemas condicionados.

# 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

## OBJETIVOS:

Saber resolver las ecuaciones más importantes de primer orden. Aplicar las ecuaciones de primer orden para resolver problemas geométricos y físicos.

Los intentos para resolver problemas físicos mediante el cálculo diferencial llevaron gradualmente a crear una nueva rama de las matemáticas, a saber, las ecuaciones diferenciales. A mediados del siglo XVIII las ecuaciones diferenciales se convirtieron en una rama independiente y su resolución un fin en sí mismo.

Desde el punto de vista de la concepción de función de la época, se disponía, a partir de Newton (1643–1727), de un método general de integración de ecuaciones diferenciales mediante el desarrollo de funciones en forma de serie. Sin embargo a los matemáticos de la época les interesa obtener soluciones en forma de funciones elementales. Los Bernouilli atacaron el problema de estudiar las ecuaciones lineales de primer orden. Riccati (1707–775) en 1722 estudió la ecuación que hoy lleva su nombre. Es Clairaut (1713–1765) en 1734 el que introduce la idea de los factores integrantes para conseguir que una ecuación diferencial de primer orden sea la diferencial exacta de una función  $U(x, y)$ , de la cual las funciones implícitas  $U(x, y) = C$  sean las soluciones de la ecuación. Fue el mismo Clairaut quien se planteó el problema de la “solución singular”.

Euler desarrolla un método en 1743 para resolver las ecuaciones lineales de orden  $n$  de coeficientes constantes. D'Alembert (1717–1783) observa que el conocimiento de una solución particular y de la solución general de la homogénea conduce, por adición, a la solución general de la no homogénea. Lagrange estudia cómo obtener soluciones particulares y a él se le debe también el método de variación de parámetros.

A principios del siglo XIX se desarrolló una fase importante en la que se trataba de demostrar algunos hechos dados por válidos en el siglo anterior. En 1820 Cauchy probó la existencia de soluciones de la ecuación diferencial  $y' = f(t, y)$  bajo ciertas condiciones. En 1890 Picard (1856–1941) estableció un método de aproximaciones sucesivas que permite establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden  $n$ .

Las investigaciones de Poincaré (1854–1912) sobre la estabilidad del sistema solar le condujeron al inicio de la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales. Obtuvo a finales del siglo XIX una serie de resultados de índole topológico que fueron mejorados por Bendixson (1861–1935) y por Liapunov (1857–1918).

Las ecuaciones diferenciales es hoy un tema importante dentro de la matemática y de las ciencias aplicadas pudiendo decir que no hay ninguna ciencia en donde no aparezca alguna ecuación diferencial.

## 1.1. Ecuaciones separables y reducibles a separables

La forma general de una ecuación diferencial de orden 1 es<sup>1</sup>

$$f(t, y, y') = 0, \quad (1.1)$$

donde el objetivo es hallar la(s) funciones  $y(t)$  que cumplen (1.1). En muchos problemas que surgen de la física se suele conocer la **condición inicial**, esto es  $y(t_0)$ . De forma análoga definimos una **ecuación diferencial de orden  $n$**  como una expresión de la forma

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

En este caso las condiciones iniciales son los valores que toman  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  en  $t_0$ .

Es interesante enunciar el teorema de Picard de existencia y unicidad local de los problemas de valor inicial. Creemos que su demostración, que requiere herramientas poderosas del cálculo infinitesimal, nos desvía excesivamente de los objetivos. La demostración que se suele encontrar en los textos hace uso del teorema del punto fijo de Banach. En [18] se puede consultar una demostración que no usa este teorema aunque sí usa la sucesión de Picard. Para ver otra demostración que hace uso de las quebradas de Euler, véase [22]. Pese a que se puede enunciar el teorema de Picard de forma más general, preferimos enunciar este teorema como sigue. Si las funciones  $f, \partial f / \partial y$  son continuas en un rectángulo  $R$  de  $\mathbb{R}^2$  y si  $(t_0, y_0)$  está en el interior de  $R$  existe una y sólo una función  $y(t)$  definida en  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  para algún  $\varepsilon > 0$  que cumple  $y' = f(y, t)$  e  $y'(t_0) = y_0$ .

El tipo de ecuaciones más sencillas de resolver son las **ecuaciones de variables separables**. Son las que pueden ser escritas de la forma

$$a(t) dt = b(y) dy,$$

su forma de resolución es simplemente integrando a ambos lados. Proporcionamos un ejemplo concreto.

Como se ve, estamos haciendo un uso totalmente informal de los diferenciales. Esto no es riguroso; pero es la práctica común en otras asignaturas y así lo haremos durante el curso. Obsérvese que la forma rigurosa es la siguiente. En primer lugar, la ecuación diferencial anterior es  $a(t) = b(y)y'$ . Resolver esta ecuación diferencial es encontrar una función  $\phi(t)$  tal que  $a(t) = b(\phi(t))\phi'(t) = (b \circ \phi)'(t)$ . Si  $A(t)$  y  $B(t)$  son primitivas de  $a(t)$  y  $b(t)$  respectivamente, entonces integrando se obtiene  $A(t) = B(\phi(t)) + C$  que proporciona la solución. Esto es más laborioso que el procedimiento informal de operar con  $dy$  ó  $dt$  como si fuesen entidades numéricas.

Otro tipo importante son las **ecuaciones homogéneas**. Una ecuación es de este tipo si se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right),$$

que se puede resolver mediante el cambio  $u = y/t$ . Hacemos un ejemplo concreto. Hemos de señalar que es imposible que en una ecuación diferencial se hallen más de 2 variables.

---

<sup>1</sup>En todo la parte dedicada a las ecuaciones diferenciales se usará el convenio de que  $t$  es la variable independiente. Se trata de una notación inspirada en la física, ya que  $t$  suele denotar al tiempo. Utilizaremos las notaciones  $dy/dt$  ó  $y'$  por igual.

Un tipo importante de ecuaciones reducibles a homogéneas son las ecuaciones racionales:

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{at + by + c}{dt + ey + f}\right).$$

## 1.2. Ecuaciones exactas y reducibles a exactas

El objetivo de esta sección es encontrar soluciones en forma implícita  $F(t, y(t)) = C$  de una ecuación diferencial. Recordamos a los alumnos la utilización la regla de la cadena de varias variables obteniendo

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Esto motiva a la siguiente definición: Una ecuación diferencial  $M(t, y) + N(t, y)y'(y) = 0$  es **exacta** si existe  $F(t, y)$  tal que  $\partial F / \partial t = M$  y  $\partial F / \partial y = N$ . En este caso la resolución es fácil:  $F(t, y) = C$ .

Enunciamos el siguiente teorema. Si  $M, N, \partial M / \partial t, \partial N / \partial y$  son continuas en un rectángulo  $R$  del plano, entonces la ecuación  $M dt + N dy = 0$  es exacta si y sólo si en  $R$  se cumple  $\partial M / \partial y = \partial N / \partial t$ .

Una implicación es trivial y la demostramos: si la ecuación es exacta, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Demostramos la otra implicación sólo si los alumnos conocen las caracterizaciones de los campos conservativos. Si  $\partial M / \partial y = \partial N / \partial t$  entonces el campo  $\mathbf{G} = (M, N)$  es conservativo, por lo que existe un campo escalar  $F$  tal que  $\nabla F = \mathbf{G}$ . Resolvemos un ejemplo concreto.

Tenemos que decir que las ecuaciones exactas son realmente raras, pero más fácil es encontrar una función  $\mu(t, y)$  no nula de modo que la ecuación  $M\mu dt + N\mu dy = 0$  sí sea exacta. En este caso  $\mu$  se llama **factor integrante**. Deducimos la **fórmula de los factores integrantes**:  $\mu = \mu(v)$  es un factor integrante si y solamente si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}N - \frac{\partial v}{\partial y}M}$$

es función solo de  $v$ . En este caso

$$dv \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}N - \frac{\partial v}{\partial y}M} = \frac{d\mu}{\mu}.$$

Buscar factores integrantes por medio de esta fórmula es más complicado que el problema original; sin embargo, en muchos casos se puede encontrar un factor integrante que depende de  $y$ , de  $t$ , ó de  $at + by$  en donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Hacemos para cada uno de estos casos un ejemplo concreto.

### 1.3. Ecuaciones lineales de primer orden

La forma general de una **ecuación lineal de primer orden** es

$$y' + p(t)y = q(t).$$

Es fácil ver que esta ecuación tiene un factor integrante que depende sólo de  $t$ . Utilizando la fórmula de los factores integrantes tenemos que este factor es

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t) dt\right).$$

Multiplicando la ecuación lineal por  $\mu$  y teniendo en cuenta que  $\mu' = \mu p$ , podemos resolver la ecuación lineal. Preferimos exponer el método general a dar una fórmula memorística. Cuando no es posible integrar  $\mu q$  en término de funciones elementales, es necesario escribir la solución de

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0$$

usando integrales definidas. Resolvemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} y' + ty = \sin t, \\ y(1) = 5. \end{cases}$$

En ocasiones una ecuación diferencial de segundo orden puede reducirse a una de primer orden. Damos dos situaciones y un ejemplo en cada una de éstas:

- a)  $F(t, y', y'') = 0$ . Cambio:  $u = y'$ .
- b)  $F(y, y', y'') = 0$ . Cambio  $u = y'$ . En este caso se tiene

$$y'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = u \frac{du}{dy}.$$

### 1.4. Algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Como ejemplos sencillos planteamos y resolvemos cuatro problemas sacados de la física y de la geometría. Hacemos énfasis en el significado físico de la derivada como tasa de variación, en el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente, del signo de la derivada y en la interpretación de las soluciones obtenidas.

1. La **ley de enfriamiento de Newton** afirma que un objeto se enfriá en razón proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente. Hallamos la temperatura  $T(t)$  del objeto en el tiempo  $t$  en términos de su temperatura  $T_0$  en el tiempo 0, suponiendo que la temperatura ambiental,  $M$ , se mantiene constante.
2. En este ejemplo se va a encontrar el perfil del agua en un vaso que gira alrededor de su eje con velocidad constante  $\omega$ . Fijamos una partícula de la superficie y denotamos **T** la fuerza de la tensión superficial, **F<sub>c</sub>** la centrífuga y **P** el peso. Colocamos el vaso en el

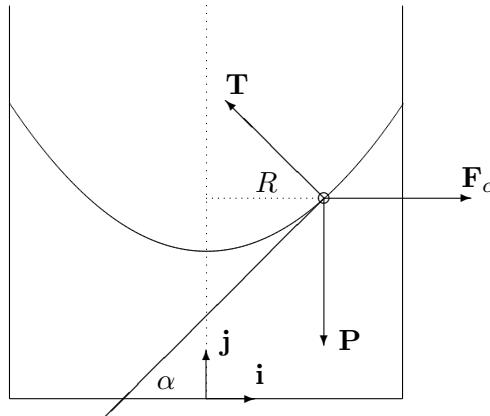


Figura 1.1.: Un vaso gira con velocidad angular constante.

sistema de referencia  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  como muestra la figura 1.1. Se tiene que  $\mathbf{P} + \mathbf{F}_c + \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . Pero cada fuerza en el sistema  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  se descompone

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_c = mR\omega^2\mathbf{i}, \quad \mathbf{T} = -T \sin \alpha \mathbf{i} + T \cos \alpha \mathbf{j},$$

en donde  $T = \|\mathbf{T}\|$  y  $\alpha$  es el ángulo que forma la tangente a la curva con el eje horizontal. Igualando términos y eliminando  $T$  se tiene que

$$\frac{R\omega^2}{g} = \tan \alpha$$

Esto, aunque no lo parezca es una ecuación diferencial. Se explica a los alumnos con detalle que esta última igualdad equivale a

$$\frac{\omega^2}{g}x = \frac{dy}{dx}.$$

La solución de esta ecuación diferencial, fácil de resolver, es  $y(x) = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C$ , donde  $C$  es una constante arbitraria.

No terminamos aquí el problema; sino que aprovechamos en interpretar la solución (una parábola); discutir el comportamiento de  $\omega$ , usar el análisis dimensional para verificar la expresión final y el significado físico que tiene  $C$ .

3. Una substancia radiactiva disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad que de ella queda (puesto que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la desintegración total es proporcional al número de átomos remanentes). Si  $A(t)$  es la cantidad de dicha materia en el tiempo  $t$ , hallamos  $A(t)$  en términos de la cantidad  $A_0$  presente en el tiempo inicial y demostramos que existe  $\theta$  (la **vida media**) con la propiedad  $A(t + \theta) = A(t)/2$  para todo  $t$ .
4. Hallamos la curva  $y = y(x)$  con la siguiente propiedad: la distancia de cualquier punto de la curva al eje  $X$  siguiendo la normal a la curva es constante. Véase la figura 1.2.

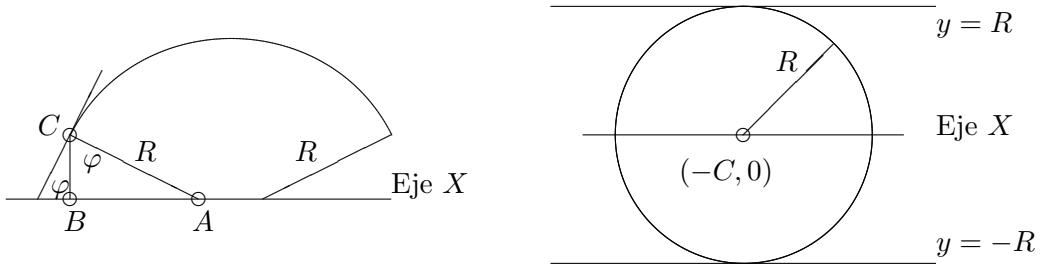


Figura 1.2.: Un problema geométrico.

Si  $\varphi$  es al ángulo que forma la recta tangente con el eje  $X$ , entonces  $y' = \tan \varphi = AB/BC = \sqrt{R^2 - y^2}/y$ . Esto último es una ecuación diferencial cuya solución es  $R^2 = (x + C)^2 + y^2$ . La obvia solución geométrica  $y = \pm R$  no es obtenida.

5. Hallar la forma de un espejo que refleje paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto fijo. Para plantear la ecuación, fijamos en el origen este punto fijo y suponemos que la dirección dada es la horizontal. Sea  $P = (x, y(x))$  un punto de la curva y trazamos la tangente por  $P$  que corta al eje  $X$  en  $Q$ . Véase la figura 1.3.

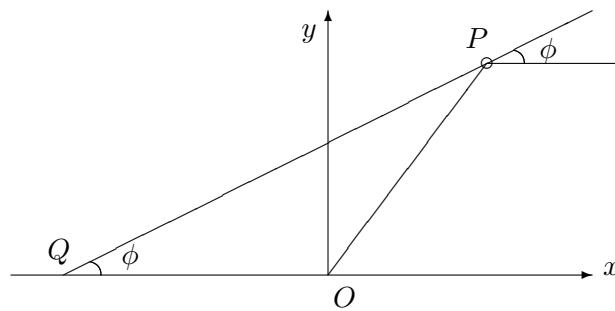


Figura 1.3.: El problema del espejo parabólico.

Por propiedades de la reflexión se tiene que  $\angle OPQ = \angle PQQ$ , luego  $OQ = OP$  y por consiguiente

$$y' = \tan \phi = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Que es una ecuación homogénea o también, racionalizando el denominador, posee un factor integrante de la forma  $\mu = \mu(v)$ , donde  $v = x^2 + y^2$ .

6. La ecuación diferencial de un circuito en serie en donde hay una inductancia  $L$ , una resistencia  $R$  y una fuerza electromotriz externa  $E(t)$  es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

en donde  $i(t)$  es la intensidad en el tiempo  $t$ . Resolvemos esta ecuación diferencial

cuando  $E(t) = A_0 \cos(\omega t)$  y cuando

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_0; \\ E_0 & \text{si } t_0 < t. \end{cases}$$

## 1.5. Trayectorias ortogonales y oblicuas

Definimos una **familia de curvas uniparamétrica** en el plano y damos algunos ejemplos geométricos: rectas, rectas pasando por un punto fijo, circunferencias, circunferencias centradas en el origen, etc. A continuación damos un método para calcular la ecuación diferencial de primer orden que verifica esta familia: despejar el parámetro y derivar.

Definimos lo que son las **trayectorias perpendiculares** de una familia de curvas, que son de interés. Damos las fórmulas que permiten hallar estas trayectorias. Distinguimos los casos en coordenadas cartesianas y polares. Damos ejemplos de cada tipo.

El siguiente punto es encontrar las trayectorias de la familia de curvas que corta a la dada bajo un ángulo fijo. Resolvemos un ejemplo y representamos geométricamente los resultados.

Como referencias para todo el capítulo proponemos [37, 62, 75].

# Contenido del Capítulo 1

## 1. Ecuaciones separables y reducibles a separables.

- Definiciones preliminares. Teorema de Picard.
- Ecuaciones separables.
- Ecuaciones reducibles a separables, homogéneas y reducibles a homogéneas.

## 2. Ecuaciones exactas y reducibles a exactas.

- Ecuaciones diferenciales exactas.
- Caracterización de las ecuaciones diferenciales exactas. Ejemplos.
- Factores integrantes. Búsqueda de factores integrantes cuando el factor integrante depende sólo de  $y$ , de  $t$ , de  $at + by$ . Ejemplos.

## 3. Ecuaciones lineales de primer orden. Ecuaciones reducibles a lineales.

- Definición. Resolución. Ejemplos

## 4. Algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

## 5. Trayectorias ortogonales y oblicuas.

- Definición de familia de curvas. Ejemplos. Método para calcular la ecuación diferencial satisfecha por una familia uniparamétrica de curvas.
- Expresión de las trayectorias ortogonales de una familia de curvas. Fórmula en cartesianas y en polares. Ejemplos.
- Expresión de las trayectorias oblicuas de una familia de curvas. Fórmula en cartesianas. Ejemplos.

## 2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

### OBJETIVOS:

Entender la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$ . Saber resolver completamente estas ecuaciones cuando sean de coeficientes constantes y de Euler-Cauchy.

### 2.1. La ecuación lineal de orden $n$

Una ecuación de orden  $n$  es **lineal** si se puede escribir de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \quad (2.1)$$

Cuando  $b(t) = 0$  se dice que la ecuación es **homogénea**.

El objetivo de esta sección es describir cómo son las soluciones de una ecuación diferencial lineal. El primer resultado básico es el teorema de existencia y unicidad de los problemas de valor inicial que enunciamos, pero que no demostramos porque creemos que la prueba nos desviaría excesivamente de nuestros objetivos.

El siguiente resultado que sí demostramos, es básico para conocer la estructura del conjunto de soluciones. Dado el siguiente operador

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y,$$

se tiene:

- $L$  es lineal.
- El conjunto de soluciones de  $L(y) = 0$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .
- Si  $y_p$  verifica  $L(y) = b(t)$ , entonces la solución general de  $L(y) = b(t)$  se obtiene sumando la solución general de  $L(y) = 0$  e  $y_p$ .

Explicamos la utilidad de estos resultados: para resolver  $L(y) = 0$  basta conocer  $n$  soluciones independientes y para resolver  $L(y) = b(t)$  basta conocer  $n$  soluciones independientes de la homogénea y una solución particular de la no homogénea. De momento creemos más oportuno no proporcionar ejemplos porque todavía no disponemos de métodos de encontrar soluciones de una ecuación diferencial.

Del teorema de existencia y unicidad se establece el criterio del wronskiano para la independencia de soluciones de una ecuación diferencial lineal. Recordamos que solo disponíamos

## 2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

---

de una implicación; pero cuando las funciones son soluciones de la ecuación diferencial podemos afirmar la otra implicación.

Terminamos la sección describiendo el método de reducción de orden de una ecuación de segundo orden cuando se conoce una solución de la ecuación de la homogénea. Más precisamente: dada la ecuación  $y'' + ay' + by = c$ , en donde  $a, b, c$  son funciones de  $t$ , si se conoce una solución  $s(t)$  de la homogénea asociada, entonces el cambio  $y = us$  permite reducir el orden de la ecuación diferencial dada.

### 2.2. La ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes

Uno de los pasos para encontrar la solución general de la ecuación lineal no homogénea es encontrar  $n$  soluciones independientes de la ecuación homogénea asociada. Esto es fácil de hacer si la ecuación es de coeficientes constantes. Dada la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (2.2)$$

en donde  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , definimos el **polinomio característico** de la ecuación como

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Es fácil comprobar que  $\lambda$  es raíz de la ecuación característica si y sólo si  $e^{\lambda t}$  es solución de la ecuación diferencial. Desarrollamos los diferentes tipos de soluciones posibles:

- a) El polinomio característico tiene sólo raíces reales simples.
- b) El polinomio característico tiene raíces reales múltiples.
- c) El polinomio característico tiene raíces complejas simples.
- d) El polinomio característico tiene raíces complejas múltiples.

Proporcionamos ejemplos en cada uno de los casos. Señalamos que si  $y(t)$  es solución de (2.2), entonces la parte real e imaginaria de  $y(t)$  son también soluciones de (2.2), hecho que nos permite pasar de funciones exponenciales complejas a funciones trigonométricas.

Para motivar el caso b) resolvemos el siguiente problema para  $\varepsilon \in ]0, 1[$ :

$$y'' - 2y' + (1 - \varepsilon^2)y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Y a continuación hacemos tender  $\varepsilon$  a cero. Otras dos formas de motivar este caso son las siguientes:

- La ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{k+1}y^{(k+1)} = 0,$$

obviamente tiene como soluciones independientes las funciones  $1, t, \dots, t^k$ .

- Si reducimos el orden en la ecuación de coeficientes constantes  $y'' + ay' + by = 0$ , en donde  $\lambda_0$  es raíz doble del polinomio  $\lambda^2 + a\lambda + b$ , obtenemos una solución  $te^{\lambda_0 t}$ .

Como último problema hacemos el siguiente. Calcular los valores de  $k \in \mathbb{R}$  de modo que el siguiente problema

$$y'' + ky = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tenga solución no trivial, encontrando además estas soluciones. Además de practicar, el objetivo es mencionar que si bien (bajo determinadas hipótesis) todo problema de valor inicial tiene solución única, no es cierto que un problema de frontera tenga solución única.

## 2.3. Búsqueda de soluciones particulares de la ecuación no homogénea

La sección anterior “agotaba” la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes. Lo que falta es encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea.

Enseñamos el **método de los coeficientes indeterminados** válido para cuando  $b(t)$  es una función sencilla: polinomios, funciones exponenciales, trigonométricas o sumas de estas funciones. Destacamos los casos especiales de cuando determinados valores son raíces de la ecuación característica, porque hay que tener más cuidado a la hora de conjeturar la solución particular.

Cuando  $b(t)$  no está en los casos antes expuestos no hay más remedio que acudir al **método de variación de parámetros**<sup>1</sup>. Éste es un método general, pero hay que evitar siempre que sea posible la búsqueda de soluciones particulares de esta forma, ya que es mucho más complicada que el método de los coeficientes indeterminados. La existencia de esta solución particular depende de la no anulación de cierto wronskiano, lo que demuestra la importancia de este concepto. Debido a que la presentación que hacemos de este método creemos que es original, se mostrará a continuación.

El objetivo es encontrar una solución de (2.1). Supongamos que hemos resuelto la ecuación homogénea asociada. Sea esta solución

$$y_h = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n = (y_1 \cdots y_n) \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \mathbf{Y} \mathbf{C},$$

El método de variación de parámetros se basa en el siguiente resultado: Sea  $\mathbf{F}(t)$  un vector columna de funciones que cumple

$$\mathbf{Y}^{(k)} \mathbf{F}' = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, n-2, \quad \mathbf{Y}^{(n-1)} \mathbf{F}' = b. \quad (2.3)$$

Entonces la función  $y(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{F}(t)$  cumple (2.1).

La demostración es muy sencilla. Además, si se escribe (2.3) de forma matricial se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}' \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(k-2)} \\ \mathbf{Y}^{(k-1)} \end{pmatrix} \mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Lo que justifica la aparición del wronskiano de las funciones  $y_1, \dots, y_n$ .

---

<sup>1</sup>Hay que observar que el método de variación de parámetros sirve también para ecuaciones lineales de coeficientes no constantes.

## 2.4. Ecuación de Euler-Cauchy

Éste es un caso particular de las ecuaciones lineales de orden  $n$  de coeficientes variables. Una ecuación de **Euler-Cauchy** tiene la forma

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 t y' + a_0 y = R(t),$$

Haciendo el cambio  $t = e^x$  se convierte la ecuación en una lineal de coeficientes constantes. Comprobamos el caso  $n = 2$  y hacemos un ejemplo concreto. Es interesante hacer notar que una vez que hagamos el cambio no debe aparecer  $t$ , es decir, sólo tiene que aparecer una variable independiente.

Creemos necesario demostrar con detalle

$$y' = e^{-x} \frac{dy}{dx}, \quad y'' = e^{-2x} \left( \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right).$$

La demostración de la fórmula general,

$$y^{(k)} = e^{-nx} D(D-1) \cdots (D-(n-1))y,$$

donde  $D$  denota el operador derivada respecto a  $x$  requiere el uso de inducción. No nos parece oportuno demostrarla.

Para la bibliografía de todo el tema conviene consultar el libro [37] que proporciona la teoría básica y numerosos ejemplos que aclaran la metodología. Los textos [13, 62, 75] pueden consultarse para estudiar más problemas resueltos.

## Contenido del Capítulo 2

### 1. La ecuación lineal de orden $n$ .

- Definición. Ecuación lineal homogénea asociada.
- Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
- El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden  $n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Relación de las soluciones de la ecuación lineal con la homogénea asociada.

### 2. Ecuación lineal de orden $n$ homogénea de coeficientes constantes.

- Definición de polinomio característico. Relación de las raíces del polinomio característico con las soluciones de la ecuación diferencial.
- Formación de la base del conjunto de soluciones.

### 3. Búsqueda de soluciones particulares de la ecuación lineal no homogénea.

- Método de los coeficientes indeterminados.
- Método de variación de parámetros.

### 4. Ecuación de Euler-Cauchy.

- Reducción a una ecuación lineal de coeficientes constantes.



### 3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

#### OBJETIVOS:

Modelar en forma de ecuaciones de segundo orden problemas de circuitos eléctricos RLC o problemas de resortes elásticos. Saber interpretar en términos físicos la solución matemática correspondiente.

#### 3.1. Vibraciones en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos

En esta sección modelamos el movimiento de una masa suspendida de un muelle. Empezamos por el caso más sencillo posible: cuando no hay rozamiento y las únicas fuerzas que actúan son la gravedad y la recuperadora del muelle. Deducimos que la ecuación diferencial que rige el proceso es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m}y = 0,$$

donde  $m$  es la masa del muelle y  $K$  la constante de recuperación del muelle. La resolvemos y transformamos la solución para expresarla como

$$y(t) = A \cos(at - \theta),$$

siendo  $a = (K/m)^{1/2}$ .

A continuación estudiamos el sistema cuando se supone que hay fuerza de rozamiento. La ecuación que hay que resolver es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{m}y = 0,$$

siendo  $-Cy'$  la fuerza de rozamiento. Dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio característico de la ecuación, las soluciones son de una manera u otra. Estudiamos las soluciones, su gráfica y el significado físico de los tres tipos diferentes de soluciones: Raíces reales, raíz doble real y raíces complejas conjugadas.

Como último caso estudiamos cuando el muelle se haya sometido a una fuerza externa, en este caso la ecuación lineal deja de ser homogénea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{m}y = R(t),$$

Estudiamos con detalle el caso  $R(t) = A \cos(\omega t)$ , donde  $A$  y  $\omega$  son ciertas constantes. La ecuación homogénea ya está resuelta, por lo que hallamos una particular por el método de los coeficientes indeterminados.

### 3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

---

Observamos el comportamiento asintótico de la solución, lo que nos da pie a definir el **término estacionario**. Y estudiamos el fenómeno de la resonancia.

A continuación estudiamos los circuitos eléctricos RLC. La ecuación diferencial que goberna un circuito RLC es

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt},$$

siendo  $I(t)$  la intensidad que pasa por este circuito,  $R$  la resistencia,  $L$  la inductancia,  $C$  la capacitancia y  $E(t)$  la fuerza electromotriz. Recordamos que  $I = dQ/dt$ , donde  $Q$  es la carga que recorre el circuito.

Esta ecuación es exactamente la misma que la del movimiento oscilatorio del muelle con resistencia y con una fuerza externa. Así el estudio sobre sistemas mecánicos se adapta al estudio de los sistemas eléctricos. De este modo enseñamos al alumno que un mismo modelo matemático puede resolver problemas físicos en apariencia totalmente distintos.

Todo este capítulo está sacado de [37, 75].

## Contenido del Capítulo 3

### 1. Vibraciones en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos.

- Ecuación diferencial del muelle sin rozamiento. Solución de la ecuación diferencial.
- Ecuación diferencial del muelle con rozamiento. Solución de la ecuación diferencial. Diferentes casos.
- Ecuación diferencial del muelle sometido a una fuerza externa. Solución de la ecuación diferencial. Término estacionario y resonancia.
- Circuitos eléctricos RLC. Paralelismo entre el movimiento del muelle y los circuitos RLC.

### 3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

## 4. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

### OBJETIVOS:

Modelar en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales el movimiento de un sistema de resortes acoplados y la intensidad en redes eléctricas. Conocer las propiedades básicas de los sistemas de ecuaciones lineales. Saber resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgieron en la historia de las matemáticas con la misma intención que las ecuaciones diferenciales ordinarias: Modelar y analizar cuantitativamente determinados sistemas físicos, en particular los astronómicos. En el campo de la astronomía los principios físicos (las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación) estaban claros y los problemas matemáticos eran mucho más profundos. El problema matemático fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer éxito lo obtuvo Newton en los *Principia* al demostrar que a partir de sus leyes de movimiento y de la ley de gravitación universal se podían deducir las tres leyes planetarias de Kepler (1571–1630). El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción gravitatoria común fue estudiado intensamente por Euler, Laplace y Lagrange obteniendo sólo resultados parciales. Poincaré, al estudiar la estabilidad del sistema solar a principios del siglo XX, introdujo los métodos cualitativos (o topológicos) para estudiar el comportamiento de las soluciones, en particular, la existencia de soluciones periódicas.

Al no obtener métodos generales para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, los matemáticos se volcaron con los sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. La primera vez que surgió este tipo de sistemas fue al estudiar sistemas de muelles acoplados, a partir de la ley de Hooke. La noción de polinomio característico aparece ya explícitamente en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales publicado en 1774 y en el trabajo de Laplace en 1775. Por otra parte, Laplace desarrolló un método alternativo para hallar la solución de tales sistemas. En el famoso ensayo *Théorie analytique des probabilités*, publicado en 1812, Laplace presentó lo que ahora se conoce como la transformada de Laplace para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Esta transformada sirve también para encontrar la solución de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Cauchy dedujo el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales en algún momento entre los años 1820 y 1830 y resumido en sus *Exercices d'analyse* (1840). Posteriormente, Cauchy, al tratar de demostrar el mismo teorema para los sistemas de ecuaciones diferenciales, introdujo la notación vectorial que todavía se utiliza hoy en día. Generalización que, utilizando los conceptos matriciales introducidos por Cayley a mediados del siglo XIX,

ayudó a Jacobi a resolver completamente los sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes donde la matriz del sistema es diagonalizable. Posteriormente Jordan introdujo lo que hoy se conoce como la forma canónica de Jordan precisamente para resolver los sistemas lineales de ecuaciones donde la matriz no es diagonalizable.

## 4.1. Introducción

Un **sistema de ecuaciones diferenciales** es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} y'_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots & \\ y'_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

donde las funciones  $f_i$  son funciones de  $n+1$  variables. Podemos simplificar la notación (esto es útil tanto en el estudio teórico como en los métodos de resolución aproximada):

$$\mathbf{Y}(t) = (y_1, \dots, y_n)^t, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = (f_1(t, \mathbf{Y}), \dots, f_n(t, \mathbf{Y}))^t.$$

con lo que el sistema se puede escribir como

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}).$$

Cuando  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$ , siendo  $A$  una matriz  $n \times n$  y  $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ), el sistema se llama **lineal**, y el caso más frecuente ocurre cuando  $A$  no depende de  $t$ , en este caso el sistema se llama **de coeficientes constantes**. Si  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ , el sistema se llama **homogéneo**. Cuando se conoce el valor del vector  $\mathbf{Y}$  evaluado en un valor  $t_0$  real se tiene **un problema de valor inicial**.

A continuación planteamos dos problemas concretos surgidos de la física.

- Ecuaciones del movimiento de dos masas sujetas a dos resortes acoplados.
- Ecuaciones de las intensidades en un circuito eléctrico con elementos en serie y en paralelo con una fuerza electromotriz variable.

Ambos problemas conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

## 4.2. Propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

En primer lugar mencionamos la reducción de una ecuación lineal de orden  $n$  a un sistema lineal de orden  $n$ . Esta reducción es útil en los métodos numéricos. Dada la ecuación diferencial de orden  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) = 0,$$

introduciendo las variables

$$u_1 = y; \quad u_2 = y'; \quad \dots; \quad u_{n-1} = y^{(n-2)}; \quad u_n = y^{(n-1)},$$

obtenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Enunciamos el siguiente teorema sin demostrarlo, puesto que la demostración requiere herramientas matemáticas demasiado complicadas, a nuestro juicio, para incorporarlas a una carrera técnica. Si  $A_{ij}(t)$  y  $g_i(t)$  son funciones continuas en un cierto intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces existe una única solución del sistema  $\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$  definida en  $I$  tal que  $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$ .

El siguiente resultado, cuya demostración es elemental si se supone demostrado el teorema anterior, nos dice que para encontrar la solución del sistema  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$ , basta encontrar  $n$  (el orden de la matriz) soluciones independientes del sistema homogéneo y una solución particular de la no homogénea.

- El conjunto de soluciones de  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y}$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .
- Si  $\mathbf{Y}_p$  verifica  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$ , entonces cualquier solución de  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$  se puede escribir como suma de  $\mathbf{Y}_p$  más una solución del sistema homogéneo asociado.

Una base de las soluciones del sistema  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y}$  se llama **sistema fundamental de soluciones**. La matriz  $M(t)$  cuyas columnas forman una base de soluciones se llaman **matriz fundamental** del sistema.

Ya que la solución general de la homogénea es de la forma  $C_1\mathbf{Y}_1(t) + \dots + C_n\mathbf{Y}_n(t)$ , siendo  $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n\}$  un sistema fundamental de soluciones y  $C_i \in \mathbb{R}$ , la solución general de la homogénea también se puede escribir como

$$\mathbf{Y}(t) = M(t)\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostramos el siguiente resultado importante. Sean  $\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_n(t)$  soluciones del sistema homogéneo  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y}$ . Entonces son linealmente independientes si y sólo si existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{Y}_1(t_0), \dots, \mathbf{Y}_n(t_0)$  son vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ .

Obviamente, por este teorema,  $M(t)$  es una matriz fundamental del sistema  $\mathbf{Y}' = A(t)\mathbf{Y}$  equivale a que  $M'(t) = A(t)M(t)$  y que existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $M(t_0)$  es invertible.

### 4.3. Sistemas homogéneos de coeficientes constantes

Recordamos que el conjunto de las soluciones de un sistema lineal de orden  $n$  homogéneo de ecuaciones diferenciales es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Por lo tanto, para resolver sistemas de este tipo sólo tenemos que encontrar  $n$  soluciones linealmente independientes. Dejamos como ejercicio comprobar estas dos propiedades muy sencillas pero muy importantes:

- Si  $\mathbf{v}$  es un vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces la función  $\mathbf{Y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$  verifica  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ .

- Si  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de vectores propios de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (iguales o distintos), entonces  $e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$  forman un sistema fundamental de soluciones.

Hay que explicar con detalle el caso cuando aparecen raíces complejas. Es trivial demostrar que si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  es un valor propio de una matriz real con vector propio  $\mathbf{v}$ , entonces  $\bar{\lambda}$  es otro valor propio con vector propio asociado  $\bar{\mathbf{v}}$ , por lo que  $\exp(\lambda t)\mathbf{v}$ ,  $\exp(\bar{\lambda}t)\bar{\mathbf{v}}$  son dos soluciones independientes del sistema. Teniendo en cuenta sencillas propiedades de los números complejos es sencillo demostrar que la base anterior es equivalente a  $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}\mathbf{v})$ ,  $\operatorname{Im}(e^{\lambda t}\mathbf{v})$ . Hacemos varios ejemplos concretos.

Si una matriz de orden  $n$  no es diagonalizable, entonces no podemos acudir al mecanismo previo de búsqueda de  $n$  soluciones independientes. Hay dos alternativas: hablar de la exponencial de la matriz o usar la forma canónica de Jordan. No tratamos esta situación.

#### 4.4. Búsqueda de una solución particular en los sistemas no homogéneos

En vista de los resultados anteriores, para hallar la solución general de un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, sólo basta encontrar una solución particular. Describiremos dos métodos, uno de aplicación general pero complicado de usar y otro que sólo se puede usar en ciertos casos concretos, pero mucho más sencillo que el anterior.

Primero describimos el **método de variación de parámetros**. Sea el sistema  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$ , en donde ya hemos resuelto la ecuación homogénea. Así pues, podemos construir  $M(t)$  una matriz fundamental de soluciones. Sabemos que la solución general de la homogénea es  $M(t)\mathbf{C}$  donde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ . Conjeturamos como solución de la no homogénea

$$\mathbf{Y}_p(t) = M(t)\mathbf{C}(t),$$

en donde  $\mathbf{C}(t)$  es un vector columna de funciones desconocidas. Tras forzar a que  $\mathbf{Y}_p$  verifique la ecuación no homogénea y aplicar propiedades de la matriz fundamental llegamos a que  $M(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{g}(t)$ . Con lo cual es fácil (en teoría) hallar una solución particular de la ecuación:

$$\mathbf{Y}_p(t) = M(t) \int_{t_0}^t M^{-1}(\xi)\mathbf{g}(\xi) d\xi. \quad (4.1)$$

Notamos que (4.1) es más costoso de resolver que  $M(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{g}(t)$ . Creemos conveniente hacer un ejemplo donde el tamaño de la ecuación diferencial no supere a dos, ya que la fórmula, aunque en apariencia sencilla, en la práctica requiere cálculos muy laboriosos.

Cuando el término  $\mathbf{g}(t)$  es de un tipo particular se suele aplicar la técnica de los **coeficientes indeterminados** para encontrar una solución particular. Explicamos este método para el sistema de ecuaciones  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{g}(t)$  válido para cuando  $\mathbf{g}(t)$  es una función vectorial sencilla: polinomios, funciones exponenciales, trigonométricas o sumas de estas funciones. Destacamos cuándo determinados valores son valores propios de la matriz  $A$ , porque hay que tener más cuidado a la hora de conjeturar la solución particular.

## 4.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Si  $R_j$  son funciones lineales en las variables  $x_i$  y en sus derivadas (por ejemplo  $R = x'' - y'' + 2x' - 5y$ ), entonces el conjunto de ecuaciones siguientes recibe el nombre de **sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior**.

$$\begin{cases} R_1 &= f_1(t) \\ &\dots \\ R_k &= f_k(t) \end{cases}$$

Para resolverlo se introducen variables extras para que sólo aparezca un orden de derivación, consiguiendo que este sistema se exprese como

$$A\mathbf{X}' = B\mathbf{X} + \mathbf{b}(t),$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas constantes del mismo tamaño y  $\mathbf{b}$  un vector del mismo orden que  $A$ . Enseñamos a los alumnos un ejemplo concreto. Si la matriz  $A$  es invertible el sistema se llama **no degenerado**, y este caso lo podemos reducir a los tipos ya estudiados:  $\mathbf{X}' = A^{-1}B\mathbf{X} + A^{-1}\mathbf{b}(t)$ . En caso de que  $A$  no tenga inversa el sistema se llama **degenerado**. El estudio de tales sistemas se escapan al nivel desarrollado en el curso.

Creemos que los textos que mejor se ajustan a los objetivos de este capítulo son [13, 37, 75].

## Contenido del Capítulo 4

### 1. Introducción.

- Definiciones. Notación vectorial para los sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Dos problemas surgidos de la física: sistemas de resortes acoplados y redes eléctricas.

### 2. Propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

- Reducción de una ecuación diferencial de orden  $n$  a un sistema de ecuaciones diferenciales.
- Teorema de existencia y unicidad de soluciones. El conjunto de soluciones de un sistema lineal de orden  $n$  es un espacio vectorial de orden  $n$ . Relación entre el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea y no homogénea.
- Matrices fundamentales. Propiedades. Solución general en término de la matriz fundamental.

### 3. Sistema homogéneos de coeficientes constantes.

- Relación entre los valores y vectores propios de la matriz del sistema y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales.
- La matriz del sistema es diagonalizable. Valores propios reales y complejos.

### 4. Sistema homogéneos de coeficientes constantes.

- Método de variación de parámetros.
- Método de los coeficientes indeterminados.

### 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior.

- Reducción a un sistema donde solo aparecen primeras derivadas.
- Sistemas degenerados y no degenerados.

## 5. Cálculo variacional

### OBJETIVOS:

Saber plantear y resolver problemas en donde se usa la ecuación de Euler del cálculo de variaciones.

En el *Acta Eruditorum* de junio de 1696, Jean Bernouilli propuso como un reto a otros matemáticos el problema de la braquistócrona. Newton, Leibniz, L'Hôpital (1661–1704), Jean Bernouilli y su hermano mayor Jacques (1654–1705) encontraron la solución correcta. El método de Jean era ver que la trayectoria de descenso más rápido es la misma que la trayectoria de un rayo de luz en un medio con un índice de refracción adecuadamente seleccionado. El método de Jacques fue mucho más laborioso; pero también más general y significó un paso al cálculo de variaciones.

En 1734 Euler generalizó el problema de la braquistócrona para minimizar cantidades distintas al tiempo y tomando en cuenta un medio resistente. En 1736, Euler se propuso encontrar una aproximación más general. Su método, que fue una simplificación del de Jacques Bernouilli fue aplicado a integrales de la forma  $J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ . Euler tuvo éxito al demostrar que la función  $y(x)$  que maximiza o minimiza el valor de  $J$  debe cumplir la hoy famosa ecuación de Euler, que es aún la ecuación diferencial básica del cálculo de variaciones. Euler mejoró sus métodos y obtuvo ecuaciones diferenciales análogas para un buen número de problemas. Estos resultados los publicó en un libro de 1744, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*.

En 1755 Lagrange obtuvo un procedimiento general y puramente analítico publicado en su *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Hoy en día sus métodos son usados para deducir las fórmulas básicas del cálculo de variaciones. El siguiente paso dado por Lagrange fue considerar integrales de la forma  $J(z) = \iint_{\Omega} f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y) dx dy$ . Posteriormente Lagrange aplicó el cálculo de variaciones a la mecánica obteniendo las ecuaciones de Lagrange del movimiento que son equivalentes a la segunda ley de Newton. Más adelante, Hamilton desarrolló estas ecuaciones y ofreció un nuevo enfoque de la mecánica newtoniana.

Las ecuaciones obtenidas por Euler y Lagrange dan condiciones necesarias sobre las funciones que maximizan o minimizan localmente (análogas a la anulación de la primera derivada en el cálculo de una variable). ¿Qué ocurre para encontrar condiciones suficientes o efectivamente demostrar que es un máximo o mínimo? Los trabajos posteriores de Jacobi sobre puntos conjugados y los de Weierstrass (1815–1897) proporcionaron respuestas parciales a estas preguntas.

## 5.1. Introducción

Es fácil captar la atención del alumno si se explican algunos problemas típicos.

- a) En un plano vertical un punto  $A = (a, c)$  se une con un punto  $B = (b, d)$ , tales que  $a < b$  y  $c > d$ , por una curva suave  $y = y(x)$  de modo que el tiempo que tarda una partícula sin rozamiento desde  $A$  hasta  $B$  sobre la curva y bajo la gravedad sea lo menor posible (véase la figura 5.1). Se deduce que la velocidad  $v(x)$  que tiene la partícula en el punto  $(x, y(x))$  debe cumplir  $v(x) = \sqrt{2g(c - y(x))}$ , donde  $g$  es la aceleración terrestre. Como  $v = ds/dt$  en donde  $t$  es el tiempo y  $s$  el espacio recorrido, y como  $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ , entonces el tiempo que tarda la partícula en ir desde  $A$  hasta  $B$  es

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(c - y(x))}} dx. \quad (5.1)$$

Por lo que de todas las funciones derivables  $y(x)$  definidas en  $[a, b]$  que cumplen  $y(a) = c$  y  $y(b) = d$ , tenemos que encontrar la que minimice (5.1).

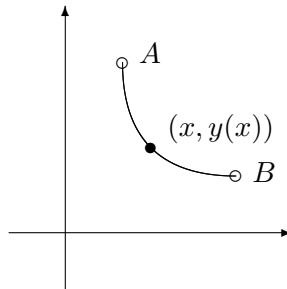


Figura 5.1.: El problema de la braquistócrona.

- b) ¿Cuál es la curva que minimiza la distancia entre dos puntos dados  $A = (a, c)$  y  $B = (b, d)$ ? Obviamente la respuesta debe ser el segmento que conecta estos dos puntos; pero el problema se puede plantear como sigue. Hallar la función derivable  $y = y(x)$  definida en  $[a, b]$  que minimiza

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

y que además cumple  $y(a) = c$ ,  $y(b) = d$ .

- c) El siguiente problema es similar. Dos puntos  $A = (a, c)$  y  $B = (b, d)$ , donde  $a < b$  y  $c, d > 0$  se unen con una curva  $y = y(x)$  por encima del eje  $x$  de modo que el área de la superficie de revolución formada cuando la curva se rota alrededor del eje  $x$  sea lo menor posible. Es decir, hemos de hallar la función derivable  $y = y(x)$  definida en  $[a, b]$  que minimiza

$$A(y) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

y que además cumple  $y(a) = c$ ,  $y(b) = d$ .

El planteamiento general es como sigue. Dada una función  $F = F(x, y, y')$  de tres variables la cual supondremos diferenciable tantas veces sea preciso, encontrar la función diferenciable  $y = y(x)$  definida en  $[a, b]$  que maximice o minimice el valor

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (5.2)$$

y que además cumpla  $y(a) = c, y(b) = d$  para valores de  $c, d$  dados.

## 5.2. La ecuación de Euler

En esta sección deducimos la ecuación de Euler. Supongamos que  $y = y(x)$  maximiza o minimiza (5.2) y sea  $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua tal que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Definimos

$$f(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx. \quad (5.3)$$

Como  $\varepsilon = 0$  es un extremo de  $f$  se cumple  $f'(0) = 0$ . Derivando (5.3) respecto a  $\varepsilon$ , haciendo  $\varepsilon = 0$  e integrando por partes se tiene

$$0 = \int_a^b \eta \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx.$$

Como esto se cumple para toda función  $\eta \in \mathcal{C}^1([a, b])$  con  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  se concluye<sup>1</sup> que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial básica del cálculo variacional, que se puede escribir como

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}.$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden que en general no se puede resolver. En algunos casos particulares sí que se puede integrar.

- $F = F(x, y)$ . Este caso carece de interés ya que la ecuación de Euler se reduce a  $\partial F / \partial y = 0$ .
- $F = F(x, y')$ . La ecuación de Euler se reduce a que  $\partial F / \partial y'$  es una constante y de aquí se puede hallar la solución
- $F = F(y, y')$ . Este caso es el más importante y ocurre en la mayoría de los ejemplos. Se comprueba fácilmente (derivando) que

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

es una constante. Esto permite reducir el orden y resolver la ecuación de Euler.

Planteamos las ecuaciones diferenciales que surgen de los tres ejemplos mencionados en la sección previa.

<sup>1</sup>Este paso fue aceptado intuitivamente o demostrado incorrectamente hasta que Sarrus (1798–1861) lo demostró en 1848. Nosotros no lo demostramos.

### 5.3. Integrales con más de una función argumento

Nuestro objetivo ahora es encontrar las funciones  $y_1, \dots, y_n$  suficientemente diferenciables en  $[a, b]$  con valores  $y_i(a), y_i(b)$  conocidos para  $i = 1, \dots, n$  que maximicen o minimicen

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

Para ello, sean  $\eta_i \in \mathcal{C}^1([a, b])$  cumpliendo  $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$  y definimos

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \int_a^b F(x, y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \dots, y_n + \varepsilon_n \eta_n, y'_1 + \varepsilon_1 \eta'_1, \dots, y'_n + \varepsilon_n \eta'_n) dx.$$

Si  $y_1, \dots, y_n$  es un extremo de  $I$  entonces  $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y análogamente a la sección anterior obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Planteamos (sin resolver) los dos problemas siguientes:

- De todas las curvas  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que unen dos puntos, ¿cuál es la que minimiza la distancia? Si suponemos que  $\mathbf{r}(0)$  y  $\mathbf{r}(1)$  son los extremos de la curva, hay que encontrar funciones  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  con valores dados en  $t = 0$  y  $t = 1$  que minimizan  $\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ .
- ¿Cuál es la curva que minimiza la distancia en la esfera? Si suponemos que la esfera es de radio uno y centrada en el origen, podemos decir que cualquier curva en la esfera es de la forma  $\mathbf{r}(t) = (\sin \phi(t) \cos \lambda(t), \sin \phi(t) \sin \lambda(t), \cos \phi(t))$  para  $t \in [0, 1]$ . Por tanto hay que encontrar funciones  $\phi = \phi(t), \lambda = \lambda(t)$  con valores dados en  $t = 0$  y  $t = 1$  que minimizan  $\int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ .

### 5.4. Problemas condicionados

Introducimos esta sección comentando dos problemas:

- De todas las curvas cerradas de longitud constante, ¿cuál es la que encierra más área? Hemos de buscar dos funciones  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  de  $\mathcal{C}^1([0, 1])$  de modo que  $x(0) = x(1)$  e  $y(0) = y(1)$  son conocidos y maximicen

$$A(x, y) = \int_0^1 x(t)y'(t) dt,$$

con la condición de que

$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

sea constante. Éste es el famoso problema isoperimétrico.

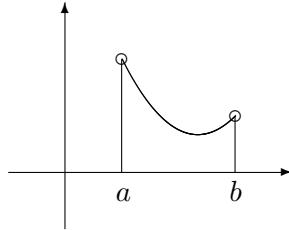


Figura 5.2.: La cuerda que minimiza la energía potencial: la catenaria.

- b) ¿Cuál debe ser la forma de una cuerda de densidad constante  $\rho$  que pende de dos puntos fijos y que minimice la energía potencial? Sea  $y = y(x)$  la forma de la cuerda para  $x \in [a, b]$ . Conocemos  $y(a)$  e  $y(b)$ . La energía potencial de un elemento diferencial de masa es

$$dE = gy(x) dm = gy(x)\rho ds = g\rho y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

donde  $g$  es la aceleración terrestre y  $ds$  es el diferencial de longitud de arco. Luego hemos de minimizar

$$E(y) = \int_a^b g\rho y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

con la condición de que la longitud de la cuerda sea constante, es decir

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \text{ es constante.}$$

Establecemos sin demostración el siguiente resultado (véase [18, 22] para una demostración). Si  $y = y(x)$  es un extremo de

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

con la condición

$$\int_a^b G(x, y, y') dx \text{ es constante}$$

entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right).$$

Notamos que si  $H = H(x, y, y')$ , la expresión

$$\frac{d}{dx} \left( H - y' \frac{\partial H}{\partial y'} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} + y' \left( \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} \right)$$

suele ser útil.

Planteamos el problema isoperimétrico en polares. En primer lugar se supone si pérdida de generalidad que la curva tiene interior convexo. Esta convexidad permite afirmar que la curva se puede poner como  $\rho = \rho(\theta)$  para  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ahora hay que maximizar

## 5. Cálculo variacional

---

$A(\rho) = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)/2 d\theta$  con la condición que  $\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$  sea constante. También planteamos el problema de la cuerda que minimiza la energía potencial (se obtiene la catenaria).

Si el problema hubiese sido encontrar  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^1([a, b])$  tales que se conocen  $y_j(a)$ ,  $y_j(b)$  para  $j = 1, \dots, n$  que maximizan o minimizan

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

con la condición de que

$$\int_a^b G_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

sean constantes para  $i = 1, \dots, m$  entonces existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} (F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Planteamos el problema isoperimétrico propuesto al principio de la sección. Si además definimos  $\lambda_0 = 1$  y  $G_0 = F$ , entonces (5.4) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i G_i \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i G_i \right) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esta ecuación permite establecer el **principio de reciprocidad**. La solución de los problemas de hallar el extremo de  $\int_a^b G_s dx$  con las condiciones  $\int_a^b G_i dx$  es constante para  $i \neq s$ , coinciden. Este hecho, permite probar sin cálculo ninguno el siguiente problema: de todas las curvas cerradas con área constante, ¿cuál es la que tiene menor longitud?

La bibliografía que hemos seguido ha sido [18, 22, 45].

## **Contenido del Capítulo 5**

### **1. Introducción.**

- Tres ejemplos: la braquistócrona, la curva que minimiza la distancia y la superficie de revolución de área mínima.

### **2. La ecuación de Euler.**

- Deducción y casos particulares.
- Resolución de algunos ejemplos concretos.

### **3. Integrales con más de una función argumento.**

- Deducción de la fórmula.
- Resolución de algunos ejemplos concretos.

### **4. Problemas condicionados.**

- Dos ejemplos: problema isoperimétrico y la cuerda que minimiza la energía potencial.
- Resolución de los problemas.
- Principio de reciprocidad.



## **Parte III.**

# **Programa de Análisis Vectorial**



# Introducción

La asignatura de análisis vectorial se ubica en el segundo cuatrimestre del primer curso de la carrera de Ingenieros de Telecomunicación y su carga lectiva es de 4'5 créditos.

Una de las consecuencias de la situación de la asignatura es que previamente el alumno ha cursado la asignatura de cálculo diferencial. El estudiante, por tanto, tiene soltura con razonamientos abstractos y conoce el cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables lo que permite introducir rápidamente los conceptos más importantes del análisis vectorial.

Pensamos que el análisis vectorial debe ser una asignatura que prepare a los alumnos a cursos más avanzados. Por esta razón, un porcentaje elevado de los contenidos consiste en las aplicaciones a la física y más concretamente a la teoría de los campos electromagnéticos. Evitamos dar demostraciones no constructivas de los teoremas y preferimos argumentar éstos con aproximaciones heurísticas de tipo geométrico o físico. Eso sí, enunciamos los teoremas con precisión y estableciendo de manera explícita las razones por las cuales las argumentaciones proporcionadas no son demostraciones rigurosas.

Creemos que uno de los objetivos de la asignatura debe ser la comprensión de los conceptos. Esto, en nuestra opinión, es ayudado si antes se explican de forma intuitiva las ideas geométricas o físicas subyacentes, así como las aplicaciones de estos conceptos. Pero también creemos que el alumno debe adquirir un grado de destreza y mecanización para resolver problemas que se pueden tildar de rutinarios. Asimismo el alumno debe prepararse para poder resolver algunos problemas teóricos sencillos; pero siempre cuya resolución sea constructiva.

Hemos distribuido la asignatura en nueve grandes bloques temáticos:

**Capítulo 1** CURVAS PARAMETRIZADAS.

**Capítulo 2** INTEGRALES DE LÍNEA.

**Capítulo 3** SUPERFICIES PARAMETRIZADAS.

**Capítulo 4** INTEGRALES DE SUPERFICIE.

**Capítulo 5** CAMPOS CONSERVATIVOS Y SOLENOIDALES.

**Capítulo 6** COORDENADAS CURVLILÍNEAS ORTOGONALES.

**Capítulo 7** LOS CAMPOS GRAVITATORIOS Y ELECTROSTÁTICOS.

**Capítulo 8** EL CAMPO MAGNÉTICO.

Comentamos brevemente el contenido de cada uno de los capítulos.

El objetivo del CAPÍTULO 1 es el estudio de las curvas parametrizadas y sus propiedades más elementales: tangencias y longitud. No mencionamos los conceptos de curvatura y torsión ni las fórmulas de Frenet-Serret debido a que presentan pocas aplicaciones a la teoría de campos electromagnéticos.

Las integrales curvilíneas de campos escalares y vectoriales aparecen de forma continua en la física. El propósito del CAPÍTULO 2 es saber calcular este tipo de integrales. Debido al planteamiento de la asignatura creemos oportuno no demostrar el teorema de Green.

El propósito del CAPÍTULO 3 es saber parametrizar superficies y calcular el plano tangente a éstas.

Al igual que ocurre con las integrales de línea, las integrales de superficie son importantes en la física. El objetivo del CAPÍTULO 4 es que los alumnos sepan calcular integrales de superficie y que conozcan los teoremas de Stokes y de la divergencia. Hacemos énfasis en la interpretación física de las integrales de superficie y de las ideas de rotacional y divergencia. Creemos oportuno mostrar argumentos heurísticos para motivar los teoremas de Stokes y de la divergencia.

Muchos campos importantes en física son conservativos (que permite hablar de la función potencial) o solenoidales (por ejemplo el magnético). Se estudian estos campos en el CAPÍTULO 5.

Hay muchos campos importantes en la física con simetrías. El estudio de estos campos se hace de manera más cómoda usando coordenadas distintas a las cartesianas. En el CAPÍTULO 6 proporcionamos fórmulas para el gradiente, divergencia y rotacional en los sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

En los CAPÍTULOS 7 y 8 se estudian dos campos importantes en la física: el eléctrico y el magnético. Con respecto al eléctrico, creado por cargas escalares, estudiamos el gradiente y el laplaciano. Del campo magnético, creado por intensidades vectoriales, se estudian su rotacional y divergencia. Se concluye enunciando las cuatro leyes de Maxwell y demostrando algunas consecuencias sencillas.

Los libros básicos que recomendamos son [12, 17, 50]. También son recomendables [61, 63] que proporcionan una visión muy intuitiva de la asignatura. Para un desarrollo más avanzado y teórico se puede consultar [18]. Por último, [42], es muy avanzado y en nuestra opinión sólo es recomendable a alumnos muy aventajados.

# Índice del programa

**Capítulo 1** Curvas parametrizadas.

- 1.1. Ejemplos.
- 1.2. Vectores tangentes.
- 1.3. Curvas regulares.
- 1.4. Longitud de arco.
- 1.5. Movimiento de una partícula.

**Capítulo 2** Integrales de línea.

- 2.1. Integral curvilínea de campos escalares.
- 2.2. Integral curvilínea de campos vectoriales.
- 2.3. El teorema de Green.

**Capítulo 3** Superficies parametrizadas.

- 3.1. Definición y ejemplos de superficies parametrizadas.
- 3.2. El plano tangente.

**Capítulo 4** Integrales de campos escalares y vectoriales.

- 4.1. Integrales de superficie de campos escalares.
- 4.2. Integrales de superficie de campos vectoriales.
- 4.3. El teorema de Gauss-Ostrogradsky.
- 4.4. El teorema de Stokes.

**Capítulo 5** Campos conservativos y solenoidales.

- 5.1. Campos conservativos.
- 5.2. Campos solenoidales.

**Capítulo 6** Coordenadas curvilíneas ortogonales.

- 6.1. Repaso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
- 6.2. Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales.
- 6.3. Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales.

**Capítulo 7** El campo gravitatorio y electrostático.

- 7.1. El potencial eléctrico y gravitatorio.
- 7.2. La ley de Gauss.

**Capítulo 8** El campo magnético.

- 8.1. Fluidos.
- 8.2. La derivada material.

- 8.3. El teorema del transporte.
- 8.4. La ecuación de continuidad.
- 8.5. La ley de Lorentz y la ley de Biot y Savart.
- 8.6. Propiedades del campo magnético.
- 8.7. Las ecuaciones de Maxwell.

# 1. Curvas parametrizadas.

## OBJETIVOS:

Saber parametrizar los ejemplos más importantes de curvas. Saber calcular vectores tangentes y normales. Aplicar la teoría de curvas parametrizadas para plantear y resolver problemas geométricos y físicos.

Uno de los objetivos de la introducción por parte de Descartes y de Fermat (1601–1665) de la geometría analítica fue la de establecer un paralelismo entre el álgebra y la geometría. A partir de este momento se empezó a aplicar el cálculo diferencial e integral a problemas geométricos. Algunos de los conceptos posteriormente tratados por el cálculo fueron introducidos por Huygens (1629–1695), quien usó sólo métodos geométricos. Los conceptos de evoluta, involuta y radio de curvatura se le deben a él.

Newton introduce el centro de curvatura como el punto límite de las intersecciones de una normal con una normal adyacente. Afirma que el círculo con centro de curvatura y radio de curvatura es el círculo de contacto más cercano a la curva. Newton incluye la fórmula del radio de curvatura. Estos resultados duplican a los de Huygens, pero Newton deseaba mostrar que los métodos analíticos eran igual de válidos.

Clairaut inició la teoría de curvas en el espacio. Pensó una curva como la intersección de dos superficies cuyas ecuaciones eran de tres variables. La expresión de la longitud de arco de una curva espacial se debe a Clairaut.

El siguiente paso importante fue dado por Euler motivado por problemas de la mecánica. Obtuvo las fórmulas actuales de las componentes radial y tangencial de la aceleración en polares:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Euler representó las curvas espaciales como  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ , donde  $s$  es la longitud de arco. Escribe además  $dx = x'(s) ds$ ,  $dy = y'(s) ds$ ,  $dz = z'(s) ds$ , donde la prima denota derivación respecto a  $s$  y  $ds$  lo consideraba constante. Euler definió la curvatura como  $d\phi/ds$ , donde  $d\phi$  es el ángulo de dos tangentes de dos puntos de la curva que están separados  $ds$ . Más adelante da fórmulas analíticas de la curvatura y del plano osculador. La torsión, que representa la rapidez en que una curva se aleja del plano osculador, fue introducida por Lancret (1774–1807).

Cauchy mejoró la formulación de los conceptos en su famoso *Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géométrie* (1826). Descartó los infinitésimos constantes y señaló que cuando se escribe

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

se debe entender

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

## 1. Curvas parametrizadas.

---

La teoría clásica culmina cuando Serret (1819–1885) y Frénet (1816–1900) publican en 1851 y en 1852 respectivamente y de forma independiente las famosa fórmulas de Frenet-Serret.

### 1.1. Ejemplos

Motivados por el estudio de la trayectoria de un móvil en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ , definimos una **curva** como una aplicación continua  $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (véase la figura 1.1). El significado físico es que  $\mathbf{r}(t_0)$  es la posición de la partícula móvil en el tiempo  $t_0$ . La variable  $t$  se llama **parámetro**. Argumentamos que las curvas tienen un sólo parámetro, pues son “objetos unidimensionales”. Explicamos de forma física e intuitiva la condición de continuidad: si  $\lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{r}(t) \neq \lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{r}(t)$ , el móvil en el tiempo  $\tau$  pasa repentinamente de la posición  $\lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{r}(t)$  a  $\lim_{t \rightarrow \tau} \mathbf{r}(t)$ .

Además, como en muchas ocasiones se hablará de tangentes a las curvas o velocidades y estos conceptos se tratan con derivadas, exigiremos que  $\mathbf{r}$  sea diferenciable salvo en una cantidad finita de puntos (físicamente un móvil puede sufrir un número finito de desviaciones bruscas de dirección, por ejemplo, una bola de billar que rebota en las paredes de la mesa). También observamos que las curvas poseen una una orientación: no es lo mismo ir desde  $\mathbf{r}(a)$  hasta  $\mathbf{r}(b)$  que efectuar el camino al revés.

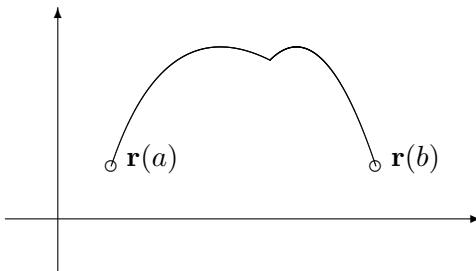


Figura 1.1.: Una curva diferenciable a trozos.

Hacemos los siguientes ejemplos:

- a) La circunferencias centradas en  $\mathbf{p} = (h, k)$  y de radio  $R$  se puede parametrizar mediante  $\mathbf{r}(t) = (h + R \cos t, k + R \sen t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$  (véase la figura 1.2). Es importante el intervalo de variación de  $t$ .

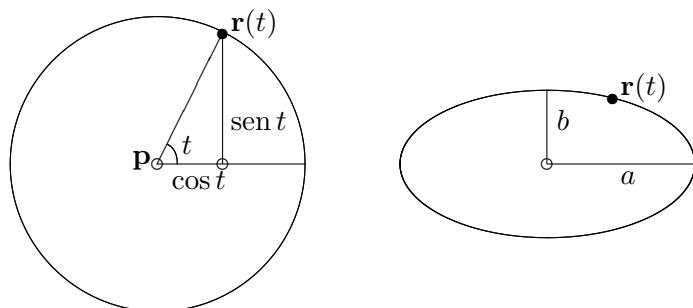


Figura 1.2.: Parametrización de una circunferencia y de una elipse.

Además comenzamos a tratar el problema de las reparametrizaciones con este otro ejemplo: describir la curva  $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$  para  $t \in [0, \pi]$ . Es claro que el objeto geométrico es el mismo; sin embargo el significado físico es distinto.

- b) Parametrizamos la elipse de semiejes  $a$  y  $b$ . Por comodidad, vamos a suponer que la elipse está centrada en el origen y que los ejes de la elipse son paralelos a los ejes de coordenadas (véase la figura 1.2). Aplicando una homotecia adecuada al ejemplo anterior obtenemos que una parametrización es  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$ . Observamos que  $t$  no es el ángulo que forma  $\mathbf{r}(t)$  con el eje  $x$  salvo para  $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ .
- c) Parametrizamos el segmento orientado entre los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Se ve la figura 1.3 que cualquier punto del segmento se puede escribir como  $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Por tanto  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  con  $t \in [0, 1]$  es una parametrización del segmento  $\mathbf{ab}$ .

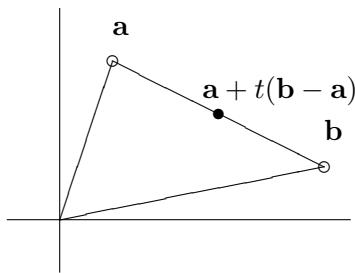


Figura 1.3.: Parametrización de un segmento.

- d) Parametrizamos las hélices como sigue.  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, bt)$  para  $t \in [0, 2k\pi]$ , donde  $R, b > 0$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Discutimos el significado geométrico de los valores  $R, b$  y  $k$ .
- e) Como ejemplo un poco más complicado parametrizamos la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con el plano  $y + z = R$ . Un procedimiento típico para parametrizar curvas tridimensionales es el siguiente: proyectar la curva sobre un plano coordenado y parametrizar la proyección. Al hacer esto obtenemos la parametrización de dos coordenadas. Por último se halla la parametrización de la coordenada que falta. Aplicamos este procedimiento en un ejemplo.
- f) La gráfica de una función continua de una variable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una curva. Se puede parametrizar como  $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$  para  $x \in [a, b]$ .

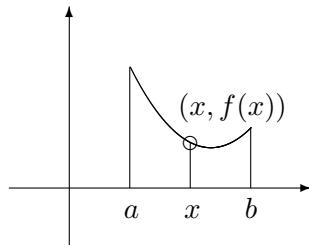


Figura 1.4.: Parametrización de  $y = y(x)$ .

## 1. Curvas parametrizadas.

---

- g) Si la curva está en polares como  $\rho = \rho(\theta)$  para  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ , una parametrización es  $\mathbf{r}(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$  para  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ .

### 1.2. Vectores tangentes

Primero motivamos la definición de vector tangente a una curva  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  usando “secantes que se aproximan a la recta tangente”. En la figura 1.5 se observa cómo se pretende calcular la recta tangente a la curva en el punto  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0)$  para cierto  $t_0 \in [a, b]$ .

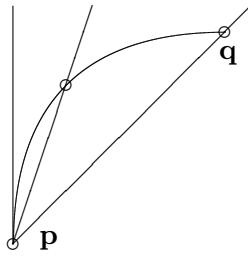


Figura 1.5.: La tangente a una curva.

Sea otro punto  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(t)$  para  $t \in [a, b]$ . La recta que pasa por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tiene vector director  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ . Desgraciadamente no podemos decir que “a medida que  $\mathbf{q}$  se acerca a  $\mathbf{p}$ , la secante se convierte en tangente, y por tanto un vector director de la recta tangente es  $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}} \mathbf{q} - \mathbf{p}$ ” pues este límite es  $\mathbf{0}$ .

Un modo de obviar esta dificultad es pensar en términos de velocidades. Calculemos la velocidad de un móvil en  $\mathbf{p}$ . Como “velocidad = distancia / tiempo” y el parámetro  $t$  mide el tiempo, entonces lo que tarda el móvil de ir de  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  es  $t - t_0$ . Por tanto podemos considerar el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \mathbf{r}'(t_0).$$

Esto proporciona la definición de **vector tangente** en el punto  $\mathbf{r}(t_0)$ . Si la curva es  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , entonces  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . El **vector tangente unitario** en el punto  $\mathbf{r}(t_0)$  se define como  $\mathbf{T}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$  siempre que  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ .

Hacemos un ejemplo concreto de calcular el vector tangente a una curva en un punto. Además resolvemos el siguiente problema: El movimiento de una partícula en la circunferencia  $x^2 + y^2 = R^2$  se puede describir por medio de  $\mathbf{r}(t) = R(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ , donde supondremos que  $\theta$  es una función derivable (obsérvese que si  $\theta(t) = \omega t$  se describe un movimiento circular uniforme). Calcúlese el vector tangente y compruébese que es perpendicular al vector de posición.

### 1.3. Curvas regulares

Hacemos el siguiente problema para motivar el concepto de curva regular: Una rueda circular de radio  $R$  rueda sin deslizarse sobre el eje  $x$ . La figura descrita por un punto de la circunferencia de la rueda se llama cicloide. Obténgase una parametrización  $\mathbf{r}(t)$  de la curva y calcúlense los valores  $t$  tales que  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ . Interprétese este resultado.

Este ejercicio muestra que no basta exigir que  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea diferenciable para que la curva no presente picos. Este comportamiento también se muestra en la curva  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$  en  $t = 0$ . Decimos que una curva parametrizada  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es **regular a trozos** si el conjunto de los valores de  $t$  tales que  $\mathbf{r}$  no es derivable en  $t$  ó  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  es finito. Probamos, como simple ejercicio, que la gráfica de una función diferenciable es siempre una curva regular.

Es útil derivar expresiones que contengan al producto escalar<sup>1</sup> y vectorial. Las reglas necesarias vienen dadas a continuación (la demostración es completamente rutinaria). Sean  $\mathbf{r}, \mathbf{s} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos curvas parametrizadas y diferenciables,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y  $a, b$  constantes reales.

- a)  $(a\mathbf{r} + b\mathbf{s})' = a\mathbf{r}' + b\mathbf{s}'$ .
- b)  $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$ .
- c)  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}'$ .
- d)  $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}'$ .

Como  $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ , se deduce que  $(\|\mathbf{r}\|^2)' = 2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}$ . Proponemos el siguiente ejercicio. Pruébese que si una curva está en una esfera de centro  $\mathbf{p}$  entonces la recta tangente en un punto  $\mathbf{q}$  de la curva es perpendicular al vector  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ .

Como el vector normal unitario  $\mathbf{T}$  tiene norma constante, entonces  $\mathbf{T}'$  es perpendicular a  $\mathbf{T}$ , lo que permite definir el **vector normal unitario** como  $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$  para una curva regular y siempre que  $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ .

## 1.4. Longitud de arco

En esta sección deducimos una expresión para la longitud de una curva  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En la figura 1.6 se ha dibujado una curva plana y un trozo infinitesimal de curva de longitud  $dl$ . Sean  $dx$  y  $dy$  los incrementos infinitesimales de  $x$  e  $y$ .

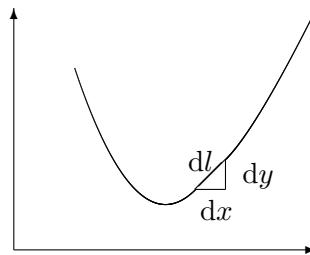


Figura 1.6.: Deducción informal de la longitud de una curva.

Suponemos que el arco infinitesimal es recto y como  $dx/dt = x'$  y  $dy/dt = y'$ , entonces

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x' dt)^2 + (y' dt)^2} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} dt.$$

<sup>1</sup>Representaremos por  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  el producto escalar canónico de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$ .

## 1. Curvas parametrizadas.

---

Integrando respecto a  $t$  entre  $a$  y  $b$  obtenemos que la longitud total de la curva es

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Explicamos que esta forma de proceder no es rigurosa. Sin embargo, creemos que la siguiente manera, aunque rigurosa, es demasiado difícil para un alumno de primer curso.

Sea  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  una partición del intervalo  $[a, b]$ . Entonces la longitud de la quebrada que une los puntos  $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_n)$  es  $L(\mathbf{r}, P) = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|$ , donde  $P$  denota la partición elegida del intervalo  $[a, b]$ . Sea  $\|P\|$  la mayor longitud de los subintervalos. Si existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|P\| < \delta$  entonces  $|L - L(\mathbf{r}, P)| < \varepsilon$ , se dice que  $L$  es la **longitud** de la curva. Además se dice que la curva es **rectificable**. Para ser riguroso del todo hay que probar que este valor de  $L$  es único; pero esto es fácil. La demostración del siguiente resultado es complicada y no la hacemos (requiere conocer la noción de continuidad uniforme y el teorema de Heine y se puede encontrar un esquema de la demostración en [21]). Sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva tal que  $\mathbf{r}'$  es continua, entonces la longitud de  $\mathbf{r}$  es  $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ .

Hacemos un ejemplo concreto y demostramos que la longitud de la gráfica de la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

Una **reparametrización** de una curva regular  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otra curva  $\mathbf{r} \circ \gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en donde  $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es una biyección que cumple  $\gamma' > 0$ . Explicamos de forma intuitiva lo que es una reparametrización (“recorrer la misma curva de distinta manera”). Decimos que los conceptos geométricos que definamos han de ser invariantes por reparametrizaciones, no así los conceptos físicos. Por ejemplo, es fácil comprobar que los vectores tangentes unitarios de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} \circ \gamma$  coinciden, sin embargo  $\|\mathbf{r}'\| \neq \|(\mathbf{r} \circ \gamma)'\|$ , ya que como veremos  $\|\mathbf{r}'\|$  es la velocidad de  $\mathbf{r}$  y  $\|(\mathbf{r} \circ \gamma)'\|$  es la velocidad de  $\mathbf{r} \circ \gamma$ . Es interesante demostrar la invariancia respecto a parametrizaciones de la fórmula de la longitud de una curva.

Aunque el concepto de curvas parametrizadas por el arco es importante en geometría diferencial, debido a que no se usará en el resto de la asignatura, creemos que no es necesario explicar este concepto.

## 1.5. Movimiento de una partícula

Con el siguiente problema motivamos la idea de velocidad de una curva.

Considérese una partícula con movimiento circular uniforme  $\mathbf{r}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t)$  para  $t > 0$ , siendo  $\omega > 0$  una constante llamada **velocidad angular**. Compruébese que  $\|\mathbf{r}'\| = R\omega$ . Hállese el tiempo  $T$  que tarda la partícula en recorrer la circunferencia. Calcúlese  $L/T$ , donde  $L$  es la longitud de la circunferencia. Recuérdese que “velocidad = espacio / tiempo”. ¿Se observa alguna relación con  $\|\mathbf{r}'\|$ ?

Dada una curva diferenciable  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la función  $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau$  mide la distancia que recorre la partícula para ir desde  $\mathbf{r}(a)$  hasta  $\mathbf{r}(t)$ . Si convenimos que la velocidad  $v(t)$  es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau \right) = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Todo esto motiva a definir la **velocidad** de una curva  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $\mathbf{r}'(t)$ . La **velocidad escalar** es  $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ . La **aceleración** es  $\mathbf{r}''(t)$ .

La siguiente fórmula (que se demuestra derivando  $\mathbf{r}' = v\mathbf{T}$ ) muestra que el vector aceleración se puede expresar en términos de  $\mathbf{T}$  y de  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|v(t)\mathbf{N}(t) + v'(t)\mathbf{T}(t).$$

Esta descomposición de  $\mathbf{r}''$  es importante en física. La componente en la dirección  $\mathbf{N}$  se llama **componente normal** y es la causante de la fuerza centrífuga. La componente en la dirección  $\mathbf{T}$  se llama **componente tangencial**.

Hacemos el siguiente problema. Considérese una partícula con movimiento circular uniforme dado por  $\mathbf{r}(t) = R(\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t)$ , donde  $\omega > 0$  es la velocidad angular. Pruébese

$$\mathbf{r}'' = R\omega^2\mathbf{N} = \frac{v^2}{R}\mathbf{N}.$$

Observamos que la fuerza centrífuga de un cuerpo de masa  $m$  tiene módulo  $mv^2/R$  y es perpendicular al movimiento. Comentamos físicamente el resultado.

Explicamos los dos siguientes ejemplos con detalle.

- a) Determinamos la velocidad de un satélite artificial que se mueve en una órbita circular. Sea la trayectoria del satélite

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad (1.1)$$

en donde hemos situado la Tierra en el origen. Supongamos que se verifican las dos siguientes leyes físicas: Si  $\mathbf{F}$  es la fuerza que actúa sobre el satélite,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t), \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -GMm\frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}, \quad (1.2)$$

donde  $m$  es la masa del satélite,  $M$  la de la Tierra y  $G$  es la constante de gravedad universal. Vemos que  $\|\mathbf{F}\| = GMm/R^2$  y explicamos el signo negativo en la segunda ley de (1.2). De (1.2) tenemos

$$\mathbf{r}'' = -GM\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (1.3)$$

Probamos a partir de (1.1) que  $\mathbf{r}'' = R\theta''\mathbf{T} + R(\theta')^2\mathbf{N}$ . De (1.3) se tiene

$$R\theta''\mathbf{T} + R(\theta')^2\mathbf{N} = \frac{GM}{R^2}\mathbf{N}.$$

Igualando las componentes,

$$\theta'' = 0, \quad R(\theta')^2 = \frac{GM}{R^2}.$$

De la primera ecuación obtenemos  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ ; es decir, el satélite tiene un movimiento circular uniforme con velocidad angular  $\omega$ . Ésta es una versión simplificada de la segunda ley de Kepler (1571–1630). De la segunda se deduce  $R^3\omega^2 = GM$ , esta relación es un caso particular de la tercera ley de Kepler.

## 1. Curvas parametrizadas.

---

- b) Estudiamos el movimiento de una carga  $q$  de masa  $m$  bajo un campo magnético constante  $\mathbf{B}$ , con la condición que la velocidad inicial de la partícula es perpendicular al campo magnético. Situamos los ejes de coordenadas de modo que  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . El movimiento de la partícula es  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Podemos suponer que  $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$  y como la velocidad inicial es perpendicular a  $\mathbf{B}$ , entonces  $z'(0) = 0$ .

Postulamos la segunda ley de Newton:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$  y la ley de Lorentz:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = mq(\mathbf{r}' \times \mathbf{B})$ . Se prueba fácilmente a partir de las hipótesis que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$ , luego la curva está contenida en el plano  $z = 0$ . Además se prueba también de forma sencilla que  $\mathbf{r}'$  tiene módulo constante.

Como  $\mathbf{r}'$  es plana y tiene módulo constante, entonces  $\mathbf{r}'$  recorre una circunferencia. Sea  $v$  el radio de esta circunferencia. Luego existe una función  $\omega(t)$  tal que

$$\mathbf{r}'(t) = v(\cos \omega(t), \sin \omega(t), 0).$$

Por tanto

$$\mathbf{r}''(t) = v\omega'(t)(-\sin \omega(t), \cos \omega(t), 0).$$

De  $\mathbf{r}'' = q(\mathbf{r}' \times \mathbf{B})$  se deduce que  $\omega'(t) = -qB/m$ . Ahora es trivial obtener  $\mathbf{r}(t)$ .

Como referencias para todo el capítulo proponemos [12, 17, 50]

# Contenido del Capítulo 1

## 1. Parametrización de curvas.

- Definición.
- Ejemplos: circunferencias, elipses, segmentos, hélices, gráficas de funciones, curvas en polares.

## 2. Vectores tangentes.

- Motivación y ejemplos.

## 3. Curvas regulares.

- Motivación de la condición  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ . Definición.
- Reglas básicas de la derivación de funciones vectoriales.
- Definición de vector normal.

## 4. Longitud de arco.

- Motivación.
- Definición y ejemplos.
- Reparametrizaciones.

## 5. Movimiento de una partícula.

- Velocidad escalar y vectorial. Aceleración.
- Descomposición de la aceleración en términos de los vectores tangente y normal.
- Dos ejemplos: órbitas circulares y trayectoria de una carga en un campo magnético constante.

1. Curvas parametrizadas.

---

## 2. Integrales de línea

### OBJETIVOS:

Saber calcular integrales curvilíneas de campos escalares y vectoriales. Conocer el teorema de Green.

### 2.1. Integrales curvilíneas de campos escalares

Motivamos la definición de integral de línea de un campo escalar con lo siguiente. Calculamos la carga total  $q$  de un cable parametrizado por medio de  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con densidad de carga  $\rho$ . Se tiene  $dq = \rho ds$ ; pero como  $ds = \|\mathbf{r}'\| dt$ , entonces  $dq = \rho \|\mathbf{r}'\| dt$ . Tras integrar ya tenemos la carga total. Esto, por supuesto no es riguroso, pero motiva la siguiente definición.

Dada  $C$  una curva diferenciable  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbf{r}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, se define la **integral curvilínea** de  $f$  sobre la curva como

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Se debe probar que esta definición es independiente de la parametrización; pero esto es sencillo. Cuando la curva es diferenciable a trozos, entonces se usa la definición anterior para cada subintervalo en donde la curva sea diferenciable y por último se suman todas las integrales. Hacemos un ejemplo concreto.

Comentamos las propiedades básicas: linealidad, aditividad respecto al camino y si  $C$  es la curva parametrizada mediante  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y si  $C^*$  es la curva cuya parametrización es  $\mathbf{s} : [0, b - a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b - t)$ , entonces  $\int_C f ds = \int_{C^*} f ds$  (decimos que  $C^*$  es la curva  $C$  recorrida en sentido opuesto) y explicamos la idea intuitiva de esto último: si  $f$  es la densidad de carga, la carga del cable es independiente de cómo se recorre éste.

A los alumnos se les da una hoja en donde se dan fórmulas de las siguientes aplicaciones a la mecánica (son fórmulas bien conocidas que se pueden encontrar en, por ejemplo, [50]): la masa (o carga) de un cable, el centro de gravedad de un cable y el momento de inercia.

### 2.2. Integral curvilínea de un campo vectorial

Motivamos la definición de integral de línea de un campo vectorial con lo siguiente. Estamos interesados en calcular el trabajo hecho por una partícula si ésta se mueve a lo largo de una curva bajo la influencia de un campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  (que en general puede variar según la posición). Parametrizamos la curva mediante  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  para  $t \in [a, b]$ . Si  $\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) = d\mathbf{r} = \mathbf{r}' dt$  es un elemento diferencial de la curva, entonces el diferencial

## 2. Integrales de línea

---

de trabajo realizado por la partícula es  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt$ . Ahora basta integrar para obtener el trabajo total  $W$ . Igual que antes esto no es riguroso; pero motiva la siguiente definición.

Dada  $C$  una curva diferenciable  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{F} : \mathbf{r}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua, se define la **integral curvilínea** de  $\mathbf{F}$  sobre la curva como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Cuando la curva  $C$  es cerrada (esto es,  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ ) se suele usar el símbolo  $\oint_C$ . Igual que antes se debe probar la independencia respecto a reparametrizaciones. Cuando la curva es diferenciable a trozos se procede como en la sección previa. Las propiedades son las mismas salvo que si  $C^*$  es la curva  $C$  recorrida en sentido opuesto, entonces  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  (no es lo mismo bajar una cuesta que subirla).

Si  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ , entonces es trivial ver que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t) + R(\mathbf{r}(t))z'(t)] dt,$$

lo que motiva la siguiente notación clásica:  $\int_C P dx + Q dy + R dz$ .

Hacemos algunos ejemplos concretos y alguno un poco más teórico como el siguiente. Si  $C$  es una curva regular, entonces  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ .

### 2.3. El teorema de Green

Primero definimos (sin ningún rigor) una **curva de Jordan** y cuándo una curva de Jordan está **recorrida en sentido positivo**. A continuación enunciamos el **teorema de Green**. Si las funciones  $P = P(x, y)$  y  $Q = Q(x, y)$  son continuas y tienen derivadas parciales continuas en una región  $R$  encerrada por una curva de Jordan  $C$  recorrida en sentido positivo, entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

No probamos el teorema. Hacemos un ejemplo concreto. Además, observamos que aplicando el teorema de Green al campo  $\mathbf{F}(x, y) = (\beta y, \alpha x)$  siendo  $\alpha, \beta$  constantes reales, obtenemos varias fórmulas para el área de una región. El clásico ejemplo que realizamos es calcular por medio de algunas de estas expresiones el área que encierra la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

Las referencias para este capítulo han sido [12, 17, 18, 50]. En especial el segundo y el cuarto.

## **Contenido del Capítulo 2**

### **1. Integral curvilínea de campos escalares.**

- Motivación y definición.
- Ejemplos.

### **2. Integral curvilínea de campos vectoriales.**

- Motivación y definición.
- Ejemplos.

### **3. El teorema de Green.**

- Enunciado y ejemplos.

## 2. Integrales de línea

### 3. Superficies parametrizadas

#### OBJETIVOS:

Saber parametrizar las superficies más importantes. Saber calcular vectores tangentes y normales a superficies.

La teoría de superficies comenzó cuando se introdujo la geometría analítica en el espacio y se observó que una relación del tipo  $F(x, y, z) = 0$  equivale a una superficie en el espacio.

El primer problema interesante fue el estudio de las geodésicas en una superficie. En 1697 Jean Bernouilli propuso el problema de encontrar las geodésicas. Su hermano Jacques y posteriormente el propio Jean obtuvieron la respuesta sobre algunos tipos de superficies. Más adelante, en 1728, Euler usó el cálculo variacional para proporcionar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las geodésicas.

En 1760, en su *Recherches sur la courbure des surfaces*, Euler representó una superficie como  $z = z(x, y)$ . Comparando las curvaturas de las secciones normales de una superficie, Euler estableció lo que hoy se llama el teorema de Euler (véase [21]). Los mismo resultados fueron obtenidos en 1776 por Meusnier (1754–1793) de forma más elegante, en donde además probó el llamado teorema de Meusnier. En 1771 Euler introdujo la representación paramétrica de una superficie, esto es,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ .

Gran parte de los problemas de la geometría diferencial del siglo XVIII estuvo motivada por el problema del trazado de mapas. Puesto que no es posible trazar un mapa plano de la Tierra que conserve las propiedades geométricas (esto fue probado por Euler en 1775<sup>1</sup>), la atención se dirigió hacia los mapas que conservan sólo los ángulos (como el mapa de Mercator) ya que este tipo de mapas son útiles en navegación, pues marcan el rumbo correcto<sup>2</sup>.

A partir de 1816 Gauss, trabajó en geodesia y cartografía. Su participación en medidas reales estimuló su interés en geometría diferencial y lo condujo a su ensayo definitivo de 1827, *Disquisitiones circa superficies curvas*<sup>3</sup>. Gauss usó la representación paramétrica introducida por Euler para tratar la longitud y ángulos de curvas sumergidas en superficies.

Gauss se dedica luego al estudio de la curvatura de una superficie. Su definición de curvatura es una generalización de la definición de Euler de curvatura de una curva espacial. En cada punto  $\mathbf{p}$  de una superficie hay un vector normal unitario  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  que está en la esfera unitaria. Si consideramos sobre la superficie cualquier región  $R$  pequeña que rodea a  $\mathbf{p}$ , entonces existe una región correspondiente  $\mathbf{N}(R)$  sobre la esfera unitaria que rodea a  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ . La curvatura de la superficie en  $\mathbf{p}$ , denotada por  $K(\mathbf{p})$ , está definida como el límite del cociente entre el área de  $\mathbf{N}(R)$  y el área de  $R$ . Después de un número increíble de cálculos

<sup>1</sup>En [8] se da una prueba sencilla.

<sup>2</sup>Véase [7] para una introducción de la cartografía usando métodos del análisis vectorial.

<sup>3</sup>Véase [66, Tomo II] para una explicación más profunda del trabajo de Gauss.

### 3. Superficies parametrizadas

---

proporciona una fórmula para  $K(\mathbf{p})$ , relacionando este valor con el teorema de Euler de curvas. Ahora Gauss observa que  $K(\mathbf{p})$  sólo depende de las propiedades métricas de la superficie y no cómo está sumergida en el espacio. Gauss llamó a este resultado *Theorema Egregium*. Codazzi (1824–1875) y Mainardi (1800–1879) proporcionaron ecuaciones suplementarias a las obtenidas por Gauss.

Otra cuestión que Gauss estudió fue el problema de las geodésicas. Demostró un famoso teorema sobre un triángulo formado por geodésicas: Si  $\alpha, \beta, \gamma$  son los tres ángulos de un triángulo  $T$  cuyos lados son geodésicas, entonces  $\iint_T K dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ . Este resultado, que generaliza a la fórmula del área de un triángulo esférico, fue usado por Gauss para estudiar la curvatura del espacio tras medir los ángulos de un triángulo formado por tres montañas.

El trabajo de Gauss estimuló la creación por Riemann (1826–1866) de la que hoy se conoce como geometría riemanniana. En ésta se considera una variedad  $n$ -dimensional sin hacer referencia al espacio ambiente. Su trabajo fue continuado por Ricci (1853–1925) y por Levi-Civita (1873–1941) con la creación del cálculo tensorial.

## 3.1. Definición y ejemplos de superficies parametrizadas

Hablando intuitivamente, una superficie se obtiene deformando un trozo plano de modo que en cada punto de la figura resultante se pueda construir un plano tangente. Damos la siguiente definición (no muy precisa). Una **parametrización de una superficie** es una aplicación diferenciable  $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$ . El subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado por  $\mathbf{x}(D)$  se llama **superficie**. La definición precisa se puede encontrar en [21].

Como  $\mathbf{x}$  depende de dos variables, podemos escribir  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ , donde  $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$  y como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ , podemos escribir  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Para fijar un punto  $\mathbf{x}(u, v)$  de la superficie hace falta determinar los valores de dos parámetros.

Vemos algunos ejemplos importantes de superficies parametrizadas.

- a) Un punto del cilindro de la figura 3.1 (izquierda) de radio  $R$  y altura  $H$  queda determinado si se conoce su altura  $z$  y el ángulo  $\theta$ . Se tiene que  $\mathbf{x}(z, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$  para  $z \in [0, H]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

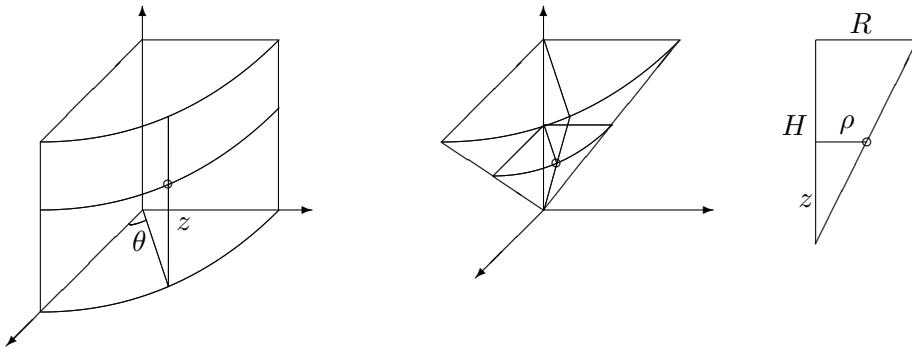


Figura 3.1.: Un cilindro y un cono.

- b) Un punto  $(x, y, z)$  del cono de la figura 3.1 (centro) de radio  $R$  y altura  $H$  queda determinado por  $\theta$  y  $\rho$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forma el vector  $(x, y, 0)$  con el eje  $X$  y  $\rho$  la distancia del punto  $(x, y, z)$  al eje  $Z$ . Evidentemente,  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ; pero, como los triángulos de la derecha de la figura 3.1 (derecha) son semejantes, se tiene que  $\rho = Rz/H$ . Luego  $\mathbf{x}(z, \theta) = (\frac{R}{H}z \cos \theta, \frac{R}{H}z \sin \theta, z)$  para  $z \in [0, H]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- c) Consideremos un punto  $\mathbf{p}$  en la esfera de radio  $R$  centrada en el origen. Sean  $\phi$  el ángulo que forma el eje  $Z$  con el vector de posición de  $\mathbf{p}$  y  $\lambda$  el ángulo que forma el eje  $X$  con el vector de posición de  $\mathbf{q}$ , siendo  $\mathbf{q}$  la proyección de sobre el plano  $XY$  (véase la figura 3.2, izquierda). Evidentemente  $\phi \in [0, \pi]$  y  $\lambda \in [0, 2\pi]$ . Se tiene que

$$\mathbf{x}(\phi, \lambda) = (R \sin \phi \cos \lambda, R \sin \phi \sin \lambda, R \cos \phi).$$

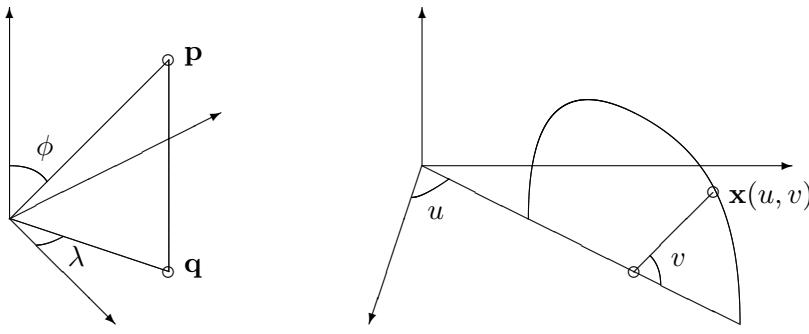


Figura 3.2.: Una esfera y un toro de revolución.

- d) La gráfica de la función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A \subset \mathbb{R}^2$  se puede parametrizar fácilmente mediante  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in A$ .
- e) Consideremos una circunferencia de radio  $b$  situada en el plano  $y = 0$ , cuyo centro dista  $a$  del origen. Se rota esta circunferencia alrededor del eje  $z$ , obteniéndose un toro de revolución. Observemos que  $a$  tiene que ser mayor que  $b$  (véase la figura 3.2, derecha). Sean  $u, v$  los ángulos dibujados en la figura y sea  $\mathbf{x}(u, v)$  un punto del toro. Se tiene fácilmente que  $\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$  para  $u, v \in [0, 2\pi]$ .
- f) Al igual que ocurre con las curvas, las superficies se pueden parametrizar de varios modos. Vemos un ejemplo, la parte superior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  también se puede parametrizar con  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ , para  $(x, y)$  cumpliendo  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Ya que una superficie admite parametrizaciones diferentes; se ha de tener cuidado de que los conceptos y definiciones que se hagan no dependan de la parametrización elegida. Dada una superficie  $S$  parametrizada por medio de  $\mathbf{x} : D \rightarrow S$ , una **reparametrización** es una aplicación  $\mathbf{x} \circ f : D' \rightarrow S$ , en donde  $f : D' \rightarrow D$  es una biyección diferenciable tal que el determinante del jacobiano es estrictamente positivo en todo punto de  $D' \subset \mathbb{R}^2$ .

## 3.2. El plano tangente

La figura 3.3 motiva la siguiente definición. Un vector  $\mathbf{v}$  es **tangente** a una superficie  $S$  en un punto  $\mathbf{p} \in S$  si existe una curva  $\mathbf{r} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  tal que  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}$ .

### 3. Superficies parametrizadas

---

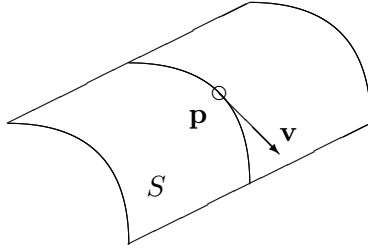


Figura 3.3.: Vector tangente en un punto a una superficie.

Vemos cómo calcular de manera cómoda el plano<sup>4</sup> tangente a una superficie  $S$  con una parametrización  $\mathbf{x} : D \rightarrow S$ . Si  $\mathbf{v}$  es un vector tangente a la superficie  $S$  en  $\mathbf{p}$ , entonces existe  $\mathbf{s} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow D$  tal que  $(\mathbf{x} \circ \mathbf{s})(0) = \mathbf{p}$  y  $(\mathbf{x} \circ \mathbf{s})'(0) = \mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{s}(t) = (u(t), v(t))$  se obtiene fácilmente

$$\mathbf{v} = u'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) + v'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}).$$

Hemos probado que si  $\mathbf{v}$  es un vector tangente, entonces es una combinación lineal de  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p})$  y  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})$ . Demostramos también el recíproco. Luego el conjunto de vectores tangentes es el espacio generado por  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p})$ ,  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})$ . Si estos dos vectores son independientes entonces el conjunto de vectores tangentes forman un plano. En tal situación un vector normal a la superficie es  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})$ . Este vector normalizado se denominará  $\mathbf{N}$  (hacemos ver que hay dos elecciones de  $\mathbf{N}$ ). Es habitual definir los coeficientes

$$E = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Como  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$  para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2},$$

una expresión que en ocasiones resulta útil (en especial si los vectores  $\partial \mathbf{x} / \partial u, \partial \mathbf{x} / \partial v$  son perpendiculares). Hacemos un ejemplo concreto de calcular el plano tangente y un vector normal de una superficie.

Explicamos con el ejemplo del cono qué ocurre cuando los vectores  $\partial \mathbf{x} / \partial u, \partial \mathbf{x} / \partial v$  son dependientes (o dicho de otro modo,  $EG - F^2 = 0$ ). Las superficies que cumplen  $EG - F^2 \neq 0$  se llaman **regulares**.

Continuamos la sección explicando el significado geométrico de los vectores  $\partial \mathbf{x} / \partial u, \partial \mathbf{x} / \partial v$ : son los vectores tangentes a las curvas coordenadas. Lo detallamos con los ejemplos del cilindro y de la esfera.

Usar una parametrización no es la única manera de describir superficies. Por ejemplo, una esfera de radio  $R$  se puede escribir como el conjunto de puntos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  que cumplen  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . La ecuación  $f(x, y, z) = 0$  de una superficie se suele llamar **implícita**. Demostramos que cuando  $S$  viene dada por  $\{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = 0\}$ , en donde  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$  para un punto  $\mathbf{p} \in S$ ,

<sup>4</sup>Más adelante probamos que (bajo cierta hipótesis que detallaremos) es efectivamente un plano.

entonces un vector normal a  $S$  en  $\mathbf{p}$  es  $\nabla f(\mathbf{p})$ . La demostración es fácil: si  $\mathbf{r} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  es una curva contenida en  $S$  que cumple  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$ , entonces  $f \circ \mathbf{r} = 0$ . Derivando esta expresión se logra  $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$ , lo que prueba el resultado. Usamos este resultado para calcular de forma cómoda el vector tangente a un cilindro o una esfera interpretando el resultado geométricamente.

## Contenido del Capítulo 3

### 1. Definición y ejemplos de superficies parametrizadas.

- Definición.
- Ejemplos: cilindros, conos, esferas, gráficas de funciones escalares de dos variables, toros de revolución.

### 2. El plano tangente.

- Motivación y definición.
- Ejemplos.
- Superficies regulares.
- El vector gradiente.

## 4. Integrales de superficie

### OBJETIVOS:

Saber calcular integrales de superficie de campos escalares y vectoriales. Conocer los teoremas de la divergencia y de Stokes.

La idea de sumar infinitos diferenciales condujo al concepto de integral de superficie de campos escalares. A partir del estudio de la cantidad de fluido que atraviesa una membrana porosa, se empezaron a tratar en el siglo XVIII las integrales de campos vectoriales. Los primeros ejemplos importantes fueron dados por Gauss al estudiar triángulos geodésicos y por Green (1793–1841) quien, estudiando problemas de electromagnetismo, estableció que (bajo ciertas hipótesis en las que no entraremos) dados  $f, g$  campos escalares, se cumple

$$\iiint_V f \nabla^2 g \, dv + \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS = \iiint_V g \nabla^2 f \, dv + \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} \, dS,$$

en donde  $V$  es un sólido tridimensional y  $S$  su frontera.

Hamilton introdujo un operador diferencial importante. El símbolo  $\nabla$  (que llamó **nabla**, pues se asemeja a un antiguo instrumento musical hebreo) se define como

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

donde  $i, j, k$  son las unidades no reales básicas de los cuaterniones. Cuando se aplica a una función escalar  $f$  se obtiene

$$\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

(el equivalente a nuestro gradiente) y si  $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ , entonces

$$\nabla v = - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) k. \quad (4.1)$$

El siguiente paso fue dado por Maxwell (1831–1879). Aisló la parte real y la no real de los cuaterniones y enfatizó estos conceptos. Denotó  $S\nabla v$  y  $V\nabla v$  la parte real y la no real de (4.1) y las llamó **convergencia** y **rotacional**, nombres sacados de la mecánica de fluidos. Clifford (1845–1879) llamó más tarde a  $-S\nabla v$  la **divergencia** de  $v$ . La ruptura definitiva con los cuaterniones fue hecha por Gibbs (1839–1903) y Heaviside (1850–1925).

Muchos teoremas del análisis vectorial pueden expresarse en forma vectorial, por ejemplo el teorema de la divergencia (establecido de forma independiente por Gauss y Ostrogradski (1801–1862)), que en notación clásica se expresa

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS,$$

## 4. Integrales de superficie

---

donde  $P, Q, R$  son funciones de  $x, y, z$  y  $\alpha, \beta, \gamma$  son los cosenos directores de la normal a la superficie  $S$  que limita al sólido  $V$ , puede escribirse de forma más compacta usando notación vectorial. Del mismo modo, el teorema de Stokes (establecido por Kelvin (1824–1907) en una carta a Stokes (1819–1903) y propuesto por éste en un examen para el premio *Smith* en Cambridge) se establece de forma cómoda usando notación vectorial. Posteriormente se definieron el gradiente, divergencia y rotacional de forma independiente al sistema coordenado, así tenemos, por ejemplo

$$\nabla f = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \iint_S f \mathbf{N} \, dS,$$

donde  $S$  es la frontera de un elemento de volumen  $\Delta v$  y  $\mathbf{N}$  es la normal unitaria al elemento de superficie de  $S$ .

### 4.1. Integrales de superficie de campos escalares

Primero vemos una fórmula para calcular el área de una superficie  $S$  parametrizada por  $\mathbf{x} : D \rightarrow S$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Para ello aproximamos la superficie mediante pequeños paralelogramos tangentes a la superficie como indica la figura 4.1. Si un vértice es  $\mathbf{a} = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , los otros tres vértices son  $\mathbf{b} = \mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(u_0, v_0 + \Delta v)$  y  $\mathbf{d} = \mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ . El área de cada paralelogramo pequeño es

$$\|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\| = \left\| \frac{\mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{x}(u_0, v_0)}{\Delta u} \times \frac{\mathbf{x}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{x}(u_0, v_0)}{\Delta v} \right\| \Delta u \Delta v,$$

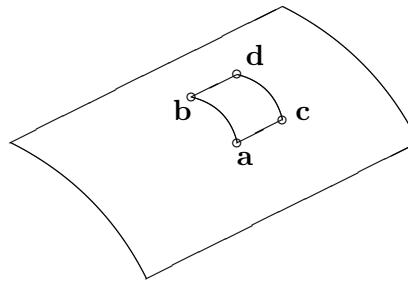


Figura 4.1.: Un trozo “pequeño” de superficie.

Si sumamos todas las áreas y hacemos tender  $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$ , obtenemos que el área total es

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du \, dv.$$

Por supuesto que este razonamiento no es riguroso. Si se desea ver un argumento preciso, se puede consultar [21]. En los libros poco formales se suele decir con poco rigor que

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du \, dv,$$

siendo  $dS$  un elemento infinitesimal de superficie.

Pese a todo, el anterior razonamiento motiva definir el **área** de una superficie parametrizada  $\mathbf{x} : D \rightarrow S$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$ , como

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Recordamos que el integrando se puede expresar como  $\sqrt{EG - F^2}$ . Esta definición hace uso explícito de la parametrización de la superficie. Probamos que esta definición es independiente de la parametrización elegida.

Ponemos como ejemplo calcular el área de una esfera y de un cilindro. También hacemos el siguiente ejercicio: Demuéstrese que el área de la gráfica de una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $f$  es una función diferenciable viene dada por  $\iint_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy$ .

Ahora estamos preparados para definir la integral de un campo escalar sobre una superficie. Para fijar ideas, supongamos que deseamos estudiar la catga de una lámina. Sea  $f(\mathbf{p})$  la densidad en el punto  $\mathbf{p}$ . Para calcular la carga de la lámina aproximamos la superficie mediante pequeños paralelogramos  $P_1, \dots, P_n$  y sean  $\mathbf{p}_i \in P_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . La carga aproximada en cada paralelogramo  $P_i$  es  $f(\mathbf{p}_i) \cdot \text{Área}(P_i)$ . El valor aproximado de la carga de la lámina es

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i) \cdot \text{Área}(P_i).$$

Al hacer tender el área de todos los paralelogramos a 0 en sus dos dimensiones, obtenemos un escalar que lo representaremos por  $\iint_S f dS$ . Sin embargo esta definición no es rigurosa, ya que ni se establece la forma de hacer tender a 0 el área de los paralelogramos, ni se dice si este límite existe o no, y sobre todo, no se establecen condiciones sobre  $f$  para que este límite exista. Sin embargo, lo anterior motiva la siguiente definición. Sean  $S = \mathbf{x}(D)$  una superficie parametrizada y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se llama **integral de superficie de  $f$  en  $S$**  a

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{x}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv.$$

De nuevo, esta definición usa la parametrización de la superficie  $S$ . Probamos que esta definición no depende de la parametrización escogida para  $S$ . Calculamos dos ejemplos concretos.

Las propiedades son análogas a las integrales dobles: linealidad, monotonía y aditividad respecto al recinto. No hacemos ninguna demostración; pues son absolutamente rutinarias.

A los alumnos les proporcionamos una hoja en donde se muestran las siguientes aplicaciones: cálculo de masas, cálculo de promedios, centro de gravedad y momento de inercia respecto a un eje.

## 4.2. Integrales de superficies de campos vectoriales.

Para definir la integral de superficie de un campo vectorial es necesario considerar superficies orientadas. Para comprender este concepto, observamos que en cada punto de la superficie hay dos vectores normales unitarios dependiendo del sentido. Una superficie  $S$  es **orientable** cuando existe un campo vectorial continuo  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vectores normales unitarios. Como ejemplos, construimos un campo de vectores normales y unitarios a la esfera unitaria y al cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ .

## 4. Integrales de superficie

---

Decimos que no todas las superficies son orientables. Un ejemplo es la famosa **cinta de Möbius**. Explicamos de forma intuitiva la razón de que la cinta de Möbius no sea orientable. En lo que sigue sólo manejamos superficies orientables, que desde luego son las más comunes<sup>1</sup>.

Para motivar la integral de flujo, imaginamos un fluido de modo que el punto  $\mathbf{p}$  se mueve con una velocidad vectorial  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  y calculamos la cantidad de fluido que pasa por una membrana porosa por unidad de tiempo por medio del siguiente argumento nada riguroso.

Consideremos un “pequeño paralelogramo” en la superficie de vértices  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$ . Si  $\mathbf{x} : T \rightarrow S$  es una parametrización de la superficie, podemos escribir  $\mathbf{a} = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0)$  y  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(u_0, v_0 + \Delta v)$  para un cierto  $(u_0, v_0) \in T$ . Si el paralelogramo es pequeño, podemos suponer que  $\mathbf{v}$  es constante en este paralelogramo; y por tanto, los puntos que ocupan las posiciones  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  tras una unidad de tiempo, ocupan las posiciones  $\mathbf{a} + \mathbf{v}, \mathbf{b} + \mathbf{v}, \mathbf{c} + \mathbf{v}$  y  $\mathbf{d} + \mathbf{v}$ . El volumen del fluido  $\Delta\Phi$  que sale por el paralelogramo por unidad de tiempo es el volumen del paralelepípedo de aristas  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$  y  $\mathbf{v}$ . Luego  $\Delta\Phi = \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})]$ . Si el producto mixto anterior fuese negativo, el fluido entra, en vez de salir. Ahora

$$\Delta\Phi = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{x}(u_0, v_0)}{\Delta u} \times \frac{\mathbf{x}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{x}(u_0, v_0)}{\Delta v} \right) \Delta u \Delta v.$$

Si descomponemos la superficie en muchos paralelogramos, sumamos la cantidad de fluido que pasa por ellos y hacemos tender cada paralelogramo a un punto, obtenemos

$$\Phi = \iint_T \mathbf{v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv.$$

Si elegimos como vector unitario normal

$$\mathbf{N} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right),$$

entonces

$$\Phi = \iint_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Esta última integral motiva la siguiente definición. Sea  $S$  una superficie orientable en donde hemos fijado un campo de vectores normales unitarios  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  continuo y sea  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  otro campo de vectores continuo. La **integral de superficie** del campo  $\mathbf{F}$  sobre la superficie  $S$  (o **flujo** de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$ ) es

$$\iint_S \mathbf{F} dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Observamos que es necesario fijar una orientación en la superficie. Si la superficie fuese cerrada se toma como vector normal unitario el exterior. Las propiedades de la integral de flujo son exactamente las mismas que las de las integrales de superficie de campos escalares.

Hacemos un ejemplo concreto y el siguiente ejercicio. Calcúlese  $\iint_S \mathbf{F} dS$ , si  $S$  es la esfera centrada en el origen de radio  $R$  y el campo  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . La razón de incluir este ejercicio es mostrar cómo se pueden calcular algunas integrales sin parametrizar la superficie.

---

<sup>1</sup>Se puede demostrar que una superficie dada por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ , donde  $c$  es un valor regular para una función  $f$  diferenciable, es orientable; véase [21].

### 4.3. El teorema de Gauss-Ostrogradsky

La cantidad de fluido que entra o sale de una superficie cerrada puede calcularse de modo diferente a la comentada previamente, aunque advertimos que el siguiente razonamiento no es riguroso.

Para calcular el flujo del campo  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  sobre la superficie cerrada  $S$  que encierra a la región  $V$ , aproximamos la región  $V$  mediante una unión de pequeños cubos  $S_1, \dots, S_n$  de lados paralelos a los planos coordenados y de arista  $2h$ . Tenemos en cuenta que  $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S}$  ya que las caras comunes de dos cubos tienen vectores normales opuestos<sup>2</sup>.

Ahora calcularemos de forma aproximada  $\iint_{S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S}$ . Sean  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$  el centro del cubo  $S_i$  y  $A_i, B_i$  las tapas del cubo superior e inferior respectivamente. Aproximamos  $R$  por su polinomio de Taylor de orden 1 centrado en  $\mathbf{p}_i$ :

$$R(u, v, z_i + h) \simeq R(\mathbf{p}_i) + (u - x_i) \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{p}_i) + (v - y_i) \frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{p}_i) + h \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}_i),$$

y se obtiene

$$\iint_{A_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \simeq 4h^2 R(\mathbf{p}_i) + 4h^3 \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}_i).$$

Análogamente se puede aproximar el flujo sobre la cara inferior:

$$\iint_{B_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \simeq -4h^2 R(\mathbf{p}_i) + 4h^3 \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}_i).$$

Luego el flujo correspondiente a las tapas superior e inferior es  $8h^3 \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}_i)$ . De igual forma se aproxima el flujo para el resto de las caras restantes y obtenemos que el flujo total  $\Phi$  sobre el cubo se aproxima a:

$$\Phi \simeq 8h^3 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{p}_i) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{p}_i) + \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}_i) \right).$$

Observamos que  $8h^3$  es el volumen del cubo. El término entre paréntesis motiva la siguiente definición. Sea  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  un campo de vectores con derivadas parciales continuas definido en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ . Se llama la **divergencia** de  $\mathbf{F}$  al campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Volviendo a la consideración previa, hemos obtenido que

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \simeq \sum_{i=1}^n \operatorname{Volumen}(S_i) \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{p}_i),$$

Si las aristas de los cubos tienden a 0, el sumatorio anterior tiende a una integral triple, y se obtiene el teorema de la **divergencia** o de **Gauss-Ostrogradsky**. Lo enunciamos con rigor: Sean  $S$  una superficie cerrada orientable que encierra una región  $V$  y  $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo con derivadas parciales continuas en  $V$ , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz.$$

<sup>2</sup>Físicamente esta afirmación debe resultar evidente: si una cara pertenece a dos cubos, el fluido que sale por un cubo, entra en el otro a través de la cara común.

## 4. Integrales de superficie

---

Desde luego que la consideración previa al teorema no puede considerarse una prueba rigurosa. Para consultar una demostración se pueden ver, por ejemplo, los libros [18, 42, 50].

Si  $S$  es una superficie cerrada que se contrae hasta el punto  $\mathbf{p}$ , se tiene

$$\lim_{S \rightarrow \mathbf{p}} \frac{1}{\text{Volumen}(V_S)} \iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{p}).$$

donde  $V_S$  es la región encerrada por  $S$ . Observamos que esta igualdad proporciona una expresión para  $\text{div } \mathbf{F}$  independiente del sistema coordenado elegido. Además podemos dar una interpretación física de la divergencia de  $\mathbf{F}$ : Pensemos en un fluido cuya velocidad sea  $\mathbf{F}$ . Si  $V$  es una región pequeña que encierra a un punto  $\mathbf{p}$ , entonces la razón de fluido que sale de  $V$  respecto al volumen de  $V$  es la divergencia de  $\mathbf{F}$  en el punto  $\mathbf{p}$ . Por eso si  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{p}) > 0$ , el fluido sale y se dice que  $\mathbf{p}$  es una **fuente**. En caso contrario, el fluido entra y  $\mathbf{p}$  es un **sumidero**.

Calculamos el volumen del elipsoide de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  usando el teorema de la divergencia. Además hacemos un problema de la necesidad de “cerrar” la superficie de manera adecuada con “tapas” para aplicar el teorema de la divergencia.

También enunciamos el teorema extendido de la divergencia. Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos regiones de  $\mathbb{R}^3$  con superficies frontera  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$  respectivamente tales que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial con derivadas continuas en  $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ . Entonces

$$\iiint_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} \text{div } \mathbf{F} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega_2} \mathbf{F} d\mathbf{S} - \iint_{\partial\Omega_1} \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

La idea intuitiva de la demostración (no hacemos más que esto) es “conectar con un tubo”  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , aplicar el teorema de la divergencia a la región que resulta y “cerrar el tubo”. Dibujamos en la pizarra la figura 4.2.

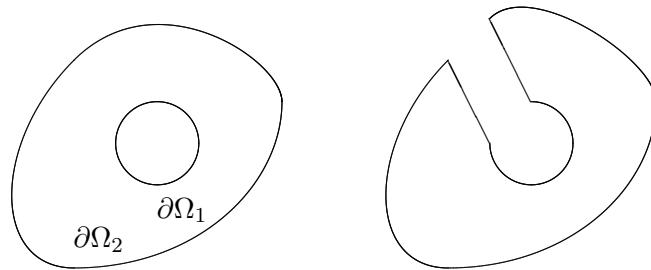


Figura 4.2.: La forma (bidimensional) extendida del teorema de la divergencia.

### 4.4. El teorema de Stokes

Para motivar la definición del rotacional y el teorema de Stokes, explicamos el siguiente argumento poco riguroso.

Calculamos el trabajo necesario para desplazar una partícula moviéndose en una circunferencia de radio  $\varepsilon \simeq 0$  centrada en  $\mathbf{p}$  y en el plano horizontal bajo el campo de fuerzas

$\mathbf{F} = (P, Q, R)$ . Una parametrización de esta circunferencia es  $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{p} + \varepsilon(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , donde  $\theta \in [0, 2\pi]$ , luego

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} [-P(\mathbf{r}(\theta)) \sin \theta + Q(\mathbf{r}(\theta)) \cos \theta] d\theta.$$

Tra usar aproximaciones de Taylor de primer orden de  $P$  y  $Q$  centradas en  $\mathbf{p}$  se obtiene

$$W \simeq a(C) \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{p}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{p}) \right).$$

en donde  $a(C)$  denota el área del círculo. Ha salido la tercera componente del rotacional.

Si el nivel de la clase lo permite, podemos explicar lo siguiente. Para generalizar lo anterior a una curva arbitraria que rodea a un punto  $\mathbf{p}$ , consideremos la siguiente curva que rodea al punto  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{s}(t) = (x_0 + x(t), y_0 + y(t), z_0 + z(t)), \quad t \in [a, b],$$

donde  $\mathbf{s}(t)$  es una curva “pequeña” y cerrada. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= P(\mathbf{p} + \mathbf{s})x' + Q(\mathbf{p} + \mathbf{s})y' + R(\mathbf{p} + \mathbf{s})z' \\ &\simeq \left( P(\mathbf{p}) + x \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{p}) + y \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{p}) + z \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{p}) \right) x' + \\ &\quad + \left( Q(\mathbf{p}) + x \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{p}) + y \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{p}) + z \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{p}) \right) y' + \\ &\quad + \left( R(\mathbf{p}) + x \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{p}) + y \frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{p}) + z \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{p}) \right) z' \end{aligned}$$

y además  $\int_a^b x' dt = \int_a^b xx' dt = \int_a^b y' dt = \int_a^b yy' dt = \int_a^b z' dt = \int_a^b zz' dt = 0$ , puesto que la curva  $\mathbf{s}$  es cerrada, obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &\simeq \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{p}) \int_a^b yx' dt + \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{p}) \int_a^b zx' dt + \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{p}) \int_a^b xy' dt + \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{p}) \int_a^b zy' dt + \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{p}) \int_a^b xz' dt + \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{p}) \int_a^b yz' dt. \end{aligned}$$

Ahora probamos a partir del teorema de Green que  $S_{xy} = - \int_a^b yx' dt = \int_a^b xy' dt$ , donde  $S_{xy}$  es el área encerrada por la proyección de la curva sobre el plano  $XY$ . Luego, si denotamos  $S_{xz}$ ,  $S_{yz}$  el área encerrada por la proyección sobre los planos  $XZ$ ,  $YZ$ , respectivamente, obtenemos

$$W \simeq S_{xy} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{p}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{p}) \right) + S_{xz} \left( \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{p}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{p}) \right) + S_{yz} \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{p}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{p}) \right). \quad (4.2)$$

#### 4. Integrales de superficie

---

Esto motiva la siguiente definición. Sea  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial con derivadas parciales continuas definido en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ . Se llama el **rotacional** de  $\mathbf{F}$  al campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Hay una forma sencilla de acordarse de esta definición mediante el siguiente determinante simbólico:

$$\text{rot}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Volviendo a lo previo, si denotamos  $\mathbf{S} = (S_{yz}, S_{xz}, S_{xy})$ , entonces (4.2) se escribe

$$\oint_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \simeq \mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{F}.$$

Si suponemos ahora que la curva  $C$  es plana, entonces hay una relación sencilla entre el área  $S$  encerrada por la curva  $C$  y el área encerrada por sus proyecciones:

$$S_{yz} = S \cos \phi_x, \quad S_{xz} = S \cos \phi_y, \quad S_{xy} = S \cos \phi_z,$$

donde  $\phi_x$  es el ángulo que forman el vector normal a la curva  $C$  y el eje  $X$ ; y de forma análoga se definen  $\phi_y, \phi_z$ . Por tanto

$$\mathbf{S} = (S_{yz}, S_{xz}, S_{xy}) = S(\cos \phi_x, \cos \phi_y, \cos \phi_z).$$

Pero  $(\cos \phi_x, \cos \phi_y, \cos \phi_z)$  es un vector normal unitario a la curva  $C$ , que denotaremos en lo sucesivo por  $\mathbf{N}$ . Luego

$$\oint_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \simeq S \mathbf{N} \cdot \text{rot } \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

Recordamos que hemos supuesto que la curva  $C$  es pequeña y plana. Otra vez advertimos que el siguiente razonamiento no es nada riguroso.

Sea  $S$  una superficie cuya curva frontera es  $C$ . Dividimos  $S$  en muchas superficies pequeñas  $S_1, \dots, S_n$  y elegimos un punto  $\mathbf{p}_i$  en cada trozo  $S_i$ . Sea  $C_i$  la curva frontera de  $S_i$ . Se tiene

$$\oint_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}, \quad (4.4)$$

ya que los lados comunes a dos trozos están recorridos en sentidos opuestos, y por tanto en el término derecho de (4.4), las únicas circulaciones que no se cancelan son las que sólo pertenecen a un trozo, es decir, las de la frontera de la superficie  $S$ . Véase la figura 4.3.

Si cada trozo es suficientemente pequeño, lo podemos suponer plano, y de (4.3) y (4.4) obtenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \text{Área}(S_i) \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{p}_i),$$

y haciendo tender cada  $S_i$  a  $\mathbf{p}_i$  obtenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \, d\mathbf{S}. \quad (4.5)$$

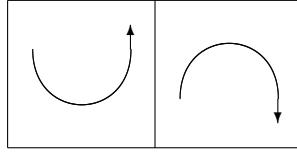


Figura 4.3.: Las circulaciones de los lados comunes se cancelan.

Hemos obtenido el **teorema de Stokes**. Por supuesto, la “deducción” que presentamos no es rigurosa.

Hay que tener cuidado, ya que en las dos integrales de (4.5) aparece una orientación. Precisamos un poco más este concepto con la siguiente definición. Sea  $\mathbf{x} : D \rightarrow S$  una parametrización de una superficie  $S$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  cuya frontera  $\partial D$  es una curva de Jordan. Entonces  $C = \mathbf{x}(\partial D)$  es la curva frontera de la superficie  $S$ . Decimos que la curva  $C$  está **recorrida positivamente** respecto a la parametrización  $\mathbf{x}$  si la curva plana  $\partial D$  está orientada positivamente. Para recordar esta definición, usamos la “regla de la mano derecha”.

Enunciamos, sin demostración, el teorema de Stokes (para consultar una demostración, se pueden ver, por ejemplo, [18, 42, 50]). Sean  $S$  una superficie orientable con curva frontera  $C$  y  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  con derivadas parciales continuas. Entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} dr, \quad (4.6)$$

donde la curva  $C$  se recorre positivamente respecto a la parametrización usada para calcular el vector normal unitario en (4.6).

El teorema de Stokes permite dar una interpretación física del rotacional. Sean  $\mathbf{p}$  un punto de  $\mathbb{R}^3$  en donde está definido  $\mathbf{F}$ ,  $S$  una superficie orientable en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\mathbf{p}$  y  $\partial S$  su curva frontera recorrida de modo positivo. Entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{N} = \lim_{S \rightarrow \mathbf{p}} \frac{1}{\operatorname{área}(S)} \oint_{\partial S} \mathbf{F} dr,$$

en donde  $\mathbf{N}$  es el vector al cual tienden los vectores normales unitarios de  $S$ . En realidad, los vectores normales unitarios de  $S$  no tiene por qué tender a un vector; este problema se soslaya suponiendo que todas las superficies  $S$  son paralelas entre ellas.

Hacemos un ejemplo concreto. Observamos que si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies con la misma curva frontera de modo que  $\mathbf{F}$  tiene derivadas parciales continuas en la región comprendida entre ambas superficies, por el teorema de Stokes, se tiene  $\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S}$ , lo que puede ayudar a facilitar cálculos. Aplicamos este comentario para calcular de forma cómoda otro problema concreto. El teorema de Stokes puede aplicarse también a superficies con curva frontera diferenciable a trozos, como mostramos con otro ejemplo.

Por último demostramos que si  $f$  es un campo escalar de clase  $\mathcal{C}^2$ , entonces  $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$  y que si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^2$ , entonces  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$ .

## Contenido del Capítulo 4

### 1. Integrales de campos escalares.

- Motivación y definición de área.
- Definición de integrales de campos escalares. Independencia de la parametrización.

### 2. Integrales de campos vectoriales.

- Superficies orientables.
- Motivación y definición de integrales de campos vectoriales. Independencia de la parametrización.

### 3. Teorema de Gauss-Ostrogradsky.

- Motivación y definición de la divergencia.
- Teorema de Gauss-Ostrogradsky. Ejemplos.
- Teorema extendido de la divergencia.

### 4. Teorema de Stokes.

- Motivación y definición del rotacional.
- Teorema de Stokes. Ejemplos.

## 5. Campos conservativos y solenoidales

OBJETIVOS:

Saber comprobar si un campo es conservativo o solenoidal. En caso afirmativo, saber calcular el potencial respectivo. Entender la utilidad de conocer el potencial de un campo conservativo.

En 1739, Clairaut en un trabajo sobre la forma de la Tierra, se encontró lo que hoy se conoce habitualmente como ecuaciones en diferencias totales que tiene la forma

$$P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0, \quad (5.1)$$

donde  $P, Q, R$  son funciones de  $x, y, z$ . Si existe una función  $u = u(x, y, z)$  tal que

$$du = P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

entonces señala Clairaut que (5.1) puede resolverse y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Por otra parte, uno de los principales problemas del siglo XVIII fue la determinación de la atracción gravitatoria que una masa ejerce sobre otra. Uno de los casos más importantes fue el estudio de la influencia de la Tierra sobre una partícula exterior o interior a ella. El enfoque geométrico usado por Newton y MacLaurin sólo es apropiado para cuerpos atractores especiales y para posiciones muy peculiares de las partículas atraídas.

Este enfoque dio paso pronto a los métodos analíticos que fueron usados por Clairaut en 1743. Señalemos algunos hechos. La fuerza ejercida por la Tierra sobre una masa situada en  $(x, y, z)$  es la suma de todos los diferenciales de fuerzas ejercidas por todas las diferenciales de masas de la Tierra. Por la ley de gravitación de Newton, las componentes de un diferencial de fuerza son

$$-G \frac{x - \xi}{r^3} \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \quad -G \frac{y - \eta}{r^3} \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \quad -G \frac{z - \zeta}{r^3} \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

donde  $G$  es la constante de la ley de Newton,  $d\xi \, d\eta \, d\zeta$  es el diferencial de volumen en la Tierra localizado en el punto  $(\xi, \eta, \zeta)$  y  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . La componente  $x$  de la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa unidad situado en el punto  $(x, y, z)$  es

$$f_x(x, y, z) = -G \iiint_T \frac{x - \xi}{r^3} \rho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

donde  $T$  es la Tierra. Las componentes  $y, z$  de esta fuerza son análogas. Si se define

$$V(x, y, z) = \iiint_T \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

y se deriva respecto a  $x, y, z$  (incluidas en  $r$ ),

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f_x}{G}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{f_y}{G}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{f_z}{G}.$$

Esto permite trabajar a partir de ahora con una función  $V$  en vez de las tres componentes  $f_x, f_y, f_z$ . La idea de que una fuerza pueda derivar de una función potencial fue usada por Daniel Bernouilli (1700–1782) en 1738 en su libro *Hydrodynamica*, en el cual empezó a estudiar las propiedades de presión, velocidad y densidad de los fluidos.

Por otra parte, Euler al estudiar las componentes  $u, v, w$  de la velocidad de un fluido incompresible, dedujo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

En nuestra notación,  $\operatorname{div}(u, v, w) = 0$ . El triunfo más espectacular de la ciencia en el siglo XIX fue la derivación en 1865 por Maxwell de las leyes del electromagnetismo. Una de estas leyes, en notación moderna, establece que  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , en donde  $\mathbf{B}$  es el campo magnético. Esta ley expresa el hecho experimental de que no hay monopolos magnéticos. Otra de las ecuaciones de Maxwell es  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ , donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\varepsilon_0$  es una constante física y  $\rho$  es la densidad de carga. Por lo que en zonas libres de cargas se cumple  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

## 5.1. Campos conservativos

Recordamos que el trabajo realizado por una partícula que se mueve sobre una curva  $C$  en un campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  es  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Un concepto importante en física es que el trabajo sólo depende de los puntos inicial y final de la curva. Decimos que un campo vectorial  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es **conservativo** cuando  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  para cualquier par de curvas  $C_1, C_2$  contenidas en  $D$  con los mismos puntos inicial y final.

Explicamos que si se desea demostrar que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  no es conservativo basta encontrar dos trayectorias con los mismos extremos y ver que la circulación de  $\mathbf{F}$  a través de ambas trayectorias es diferente. Pero si queremos demostrar que un campo es conservativo hay que demostrar que para cualquier par de caminos con extremos iguales, la circulación coincide.

Comprobar si un campo  $\mathbf{F}$  es conservativo es, a partir de la definición, una tarea complicada. Afortunadamente hay un modo más sencillo que describimos a continuación; pero sólo se puede aplicar a campos que están definidos sobre conjuntos que cumplen la siguiente definición. Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es **simplemente conexo** si es conexo y cualquier curva cerrada se puede contraer de forma continua a un punto sin salirse del conjunto  $D$ . Esta definición no es rigurosa, aunque intuitiva. Simplemente apelaremos a la intuición para decidir si un conjunto es simplemente conexo o no<sup>1</sup>. Vemos algunos ejemplos:  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , un plano sin un punto, el espacio sin una recta y el espacio sin un punto.

---

<sup>1</sup>Si se está interesado en una definición rigurosa de este concepto, así como sus implicaciones se puede consultar los libros más avanzados [28, 66].

El siguiente teorema es útil para saber si un campo vectorial es conservativo o no. Sea  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  donde  $D \subset \mathbb{R}^3$  es un abierto simplemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) Para toda curva cerrada  $C$  contenida en  $D$ , se tiene  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
- b) El campo  $\mathbf{F}$  es conservativo.
- c) Existe un campo escalar  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla U = -\mathbf{F}$ .
- d) El rotacional del campo  $\mathbf{F}$  es nulo.

Las implicaciones  $c) \Rightarrow d) \Rightarrow a) \Rightarrow b)$  son fáciles y las hacemos. Observemos que, aunque el enunciado se pueda entender en el Capítulo 3, preferimos enunciarlo en este momento, pues la implicación  $d) \Rightarrow a)$  es trivial usando el teorema de Stokes. Dependiendo de varios factores (tiempo, nivel o número de alumnos, ...) demostramos  $b) \Rightarrow c)$ . Esta demostración se puede encontrar en, por ejemplo, [17, 18, 50].

Para campos  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{F} = (P, Q)$ , basta definir  $\mathbf{G}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$  y aplicar el teorema anterior.

La hipótesis de que el abierto sea simplemente conexo es fundamental. Sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$ , definido en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje } Z\}$ . El rotacional de  $\mathbf{F}$  es  $\mathbf{0}$  y la circulación de  $\mathbf{F}$  a través de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  recorrida en sentido positivo es distinta de 0.

Sin embargo, si el abierto donde está definido  $\mathbf{F}$  no es simplemente conexo, aún hay algunas implicaciones que son ciertas. Todo esto se enuncia con precisión en el siguiente resultado. Sea  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) Para toda curva cerrada  $C$  contenida en  $D$ , se tiene  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .
- b) El campo  $\mathbf{F}$  es conservativo.
- c) Existe un campo escalar  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla U = -\mathbf{F}$ .

Las pruebas de  $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$  son iguales que en el teorema previo. Para demostrar  $c) \Rightarrow a)$ , observamos previamente que  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -\nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -(U \circ \mathbf{r})'(t)$ .

Observamos que la prueba de  $c) \Rightarrow a)$  permite demostrar que si  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  es un campo escalar de clase  $\mathcal{C}^1$  donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y si  $C$  es una curva contenida en  $D$ , entonces  $\int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{p})$ ; donde  $\mathbf{p}$  es el punto inicial de  $C$  y  $\mathbf{q}$  es el final.

Si  $\mathbf{F}$  es conservativo, existe un campo escalar  $U$  tal que  $-\nabla U = \mathbf{F}$ . Desde el punto de vista de la física, este campo  $U$  es importante, ya que está relacionado con la energía potencial. Esto motiva la siguiente definición: Un **potencial** del campo conservativo  $\mathbf{F}$  es un campo escalar  $U$  tal que  $-\nabla U = \mathbf{F}$ . Hacemos un ejemplo concreto de comprobar si un campo es conservativo, en donde además calculamos el potencial. Si se ha visto la implicación  $b) \Rightarrow c)$  en el teorema de las cuatro equivalencias de los campos conservativos, se puede calcular el potencial de dos formas distintas<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Pocas veces el alumno se pregunta si el potencial de un campo conservativo es “único” en el siguiente sentido: si  $U_1$  y  $U_2$  son dos potenciales del mismo campo  $\mathbf{F}$  entonces  $U_1 - U_2$  es constante. Si el dominio de  $\mathbf{F}$  es conexo, entonces sí es cierto ya que  $\nabla(U_1 - U_2) = \mathbf{0}$ . En general, sólo se puede decir que  $U_1 - U_2$  es constante en cada componente conexa del dominio de definición de  $\mathbf{F}$ .

## 5. Campos conservativos y solenoidales

---

Si una partícula de masa  $m$  se mueve en una trayectoria  $\mathbf{r}$  sujeta a una fuerza  $\mathbf{F}$ , la **segunda ley de Newton** es  $\mathbf{F} \circ \mathbf{r} = m\mathbf{r}''$ . Si  $\mathbf{F}$  es conservativo, existe un campo escalar  $U$  tal que  $-\nabla U = \mathbf{F}$ . Bajo estas condiciones, la función escalar

$$E(t) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(t)\|^2 + U(\mathbf{r}(t))$$

es constante. Esta función se llama **energía**; el primer sumando es la **energía cinética** y el segundo la **energía potencial**. Comprobamos este principio (**de conservación de la energía**).

### 5.2. Campos solenoidales

Un campo es **solenoidal** si su divergencia es nula. Este tipo de campos es importante como se ha visto en la introducción histórica: el campo de velocidades de un fluido incompresible y el campo magnético son ejemplos de campos solenoidales.

El siguiente teorema caracteriza los campos solenoidales. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Las siguientes afirmaciones equivalen:

- a) Existe un campo diferenciable  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$  (el campo  $\mathbf{G}$  se llama **potencial vector de  $\mathbf{F}$** ).
- b) El flujo de  $\mathbf{F}$  a través de cualquier superficie cerrada es nulo.
- c) El campo  $\mathbf{F}$  es solenoidal, es decir,  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ .

Las demostraciones de a)  $\Rightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c) usan el teorema de la divergencia y la propiedad  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ . Para la demostración de c)  $\Rightarrow$  a) hay dos alternativas para hallar  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \begin{cases} \left( \int_0^z F_y(x, y, t) dt - \int_0^y F_z(x, t, 0) dt, -\int_0^z F_x(x, y, t) dt, 0 \right), \\ \int_0^1 t\mathbf{F}(tx, ty, tz) \times (x, y, z) dt. \end{cases}$$

La primera tiene la ventaja de que surge de manera natural al tratar de resolver  $\text{rot}(\mathbf{G}) = (F_x, F_y, F_z)$  con algunas imposiciones y en realidad para los ejemplos concretos no necesita memorización ninguna. La segunda fórmula es más general en el sentido de que sólo se requiere que el dominio de  $\mathbf{F}$  sea estrellado respecto al origen<sup>3</sup>.

La demostración de c)  $\Rightarrow$  a) prueba la existencia, pero ¿cuál es la solución general de  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$  supuesto  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ ? Si  $\mathbf{G}_1$  es otro campo tal que  $\text{rot } \mathbf{G}_1 = \mathbf{F}$ , como  $\text{rot}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_1) = \mathbf{0}$ , entonces existe un campo escalar  $\phi$  tal que  $\mathbf{G} - \mathbf{G}_1 = -\nabla\phi$ . Luego  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} + \nabla\phi$ . Otra forma de encarar la cuestión es (siempre que el alumno haya visto la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias) que la solución general de  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$  es la solución general de la homogénea ( $\text{rot } \mathbf{G}_h = \mathbf{0}$ ) más una solución particular de  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$ .

Una hipótesis esencial del teorema anterior es que el campo  $\mathbf{F}$  debe estar definido en todo  $\mathbb{R}^3$ . En el siguiente ejercicio se ve la razón de incluir esta hipótesis.

Sea el campo  $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ , donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Obsérvese que este campo no está definido en el origen. Pruébense las siguientes afirmaciones.

---

<sup>3</sup>Se dice que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es **estrellado respecto a  $\mathbf{p} \in \Omega$**  si para cualquier  $\mathbf{q} \in \Omega$  se cumple que el segmento  $\mathbf{pq}$  está incluido en  $\Omega$ .

- a) La divergencia de  $\mathbf{F}$  es cero.
- b) El flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la esfera de centro el origen y radio 1 es  $4\pi$ , distinto de 0.
- c) Es imposible que exista un campo vectorial  $\mathbf{G}$  tal que  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$ . Ayuda: Sean  $S$  la esfera de centro el origen y radio 1;  $H_N$  el hemisferio norte y  $H_S$  el sur. Entonces  $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_{H_N} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{H_S} \mathbf{F} d\mathbf{S}$ . Supóngase que existe tal campo  $\mathbf{G}$  y aplíquese el teorema de Stokes para obtener una contradicción.

Las referencias que proponemos para este capítulo son [12, 17, 50]. Unos libros más informales profundizando más en el aspecto físico que en el rigor matemático son [61, 63]. Algo más avanzado es [18].

## **Contenido del Capítulo 5**

### **1. Campos conservativos.**

- Definición.
- Caracterizaciones.
- Función potencial. Ejemplos.
- Principio de conservación de la energía.

### **2. Campos solenoidales.**

- Definición.
- Caracterización.
- Ejemplo del cálculo del potencial vector.

# 6. Coordenadas curvilíneas ortogonales

## OBJETIVOS

Saber calcular el gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

El primer uso de coordenadas distintas a las cartesianas parece ser que fue hecho por Newton en el libro *The method of fluxions and infinite series* escrito sobre 1671; pero publicado en 1736. En este libro, Newton describe las coordenadas polares y las bipolares, en las cuales un punto se sitúa de acuerdo con las distancias a dos puntos fijos. El descubrimiento de las coordenadas polares se suele atribuir a Jacobo Bernoulli quien publicó un artículo en el *Acta Eruditorum* en 1691. Lagrange, en 1773, expresó la atracción ejercida por una esfera mediante una integral triple y efectuó el cambio a coordenadas esféricas, en donde usó explícitamente que  $dx dy dz = r^2 \sin \phi d\phi d\lambda dr$ , donde  $r$  es la distancia del punto de la esfera al origen,  $\phi$  la colatitud y  $\lambda$  la longitud.

Usando el principio de mínima acción y el cálculo de variaciones, Lagrange obtuvo sus famosas ecuaciones del movimiento. Después introdujo lo que hoy se llaman coordenadas generalizadas. Esto es, en lugar de las coordenadas cartesianas, se puede usar cualquier conjunto de coordenadas para fijar la posición de la partícula.

La utilidad de las coordenadas curvilíneas fue señalada por Lamé (1795–1870) quien en 1833 indicó que la ecuación del calor sólo había sido resuelta para cubos con caras paralelas a los planos coordenados. La idea de Lamé fue introducir nuevos sistemas coordenados y transformar la ecuación en este nuevo sistema coordenado, como fue hecho por Euler y Laplace al transformar la ecuación del potencial de cartesianas a esféricas. En 1834 Lamé consideró las propiedades de tres familias de superficies mutuamente ortogonales y dio un método para expresar una ecuación en derivadas parciales en cualquier sistema ortogonal de coordenadas.

## 6.1. Repaso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Motivamos este tema con la ley de Coulomb: la fuerza que ejerce un cuerpo puntual de carga  $Q$  situado en el origen sobre otra carga  $q$  situada en  $(x, y, z)$  es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -KQq \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (x, y, z).$$

Observamos que esta expresión es relativamente complicada para un problema que posee mucha simetría. De hecho los puntos situados en una esfera con centro el origen tienen comportamiento similar, por lo que el estudio de este problema debe ser más sencillo en coordenadas esféricas.

## 6. Coordenadas curvilíneas ortogonales

En muchos problemas es conveniente usar coordenadas no cartesianas, como por ejemplo, polares, esféricas o cilíndricas. Para comprender mejor este capítulo, repasamos brevemente estas coordenadas.

**Coordenadas polares.** Se definen mediante  $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ ,  $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$  para  $r \in [0, +\infty[$  y  $\theta \in [0, 2\pi[$ . El vector de posición es  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Expliquemos geométricamente el significado de  $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial r$ . Observamos que los vectores  $\{\partial \mathbf{r} / \partial r, \partial \mathbf{r} / \partial \theta\}$  forman una base ortogonal orientada positivamente de  $\mathbb{R}^2$  (véase la figura 6.1, izquierda).

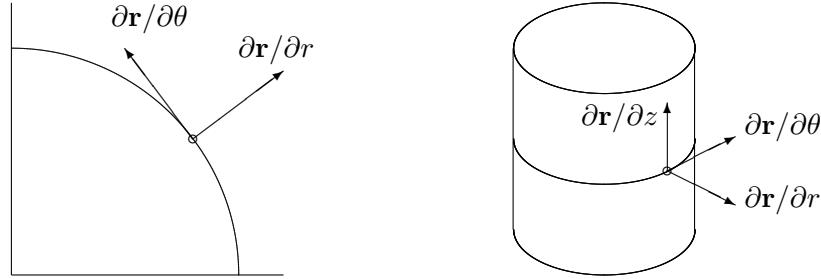


Figura 6.1.: Coordenadas polares y cilíndricas.

**Coordenadas cilíndricas.** Se definen mediante  $x = x(r, \theta, z) = r \cos \theta$ ,  $y = y(r, \theta, z) = r \sin \theta$ ,  $z = z(r, \theta, z) = z$  para  $r \in [0, +\infty[$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $z \in -\infty, +\infty[$ . El vector de posición es  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ . Explicamos el significado geométrico de  $\partial \mathbf{r} / \partial r$ ,  $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial z$ . Estos tres vectores forman una base ortogonal orientada positivamente de  $\mathbb{R}^3$  (véase la figura 6.1, derecha).

**Coordenadas esféricas.** Se definen por medio de

$$x(r, \lambda, \phi) = r \sin \phi \cos \lambda, \quad y(r, \lambda, \phi) = r \sin \phi \sin \lambda, \quad z(r, \lambda, \phi) = r \cos \phi,$$

para  $r \in [0, +\infty[$ ,  $\phi \in [0, \pi]$  y  $\lambda \in [0, 2\pi[$ . El vector de posición es

$$\mathbf{r}(r, \lambda, \phi) = r(\sin \phi \cos \lambda, \sin \phi \sin \lambda, \cos \phi).$$

Igual que antes, explicamos el significado geométrico de  $\partial \mathbf{r} / \partial r$ ,  $\partial \mathbf{r} / \partial \phi$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial \lambda$  y vemos que estos tres vectores forman una base ortogonal orientada positivamente.

## 6.2. Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales

Un cambio de coordenadas es especificar tres funciones diferenciables

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

que admiten inversa; es decir, existen

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z),$$

donde además supondremos que  $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w) \neq 0$ . El vector de posición se denotará  $\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ .

Las coordenadas  $u, v, w$  forman un **sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas** si la base  $\{\partial\mathbf{r}/\partial u, \partial\mathbf{r}/\partial v, \partial\mathbf{r}/\partial w\}$  es ortogonal orientada positivamente. Los **factores de escala** son

$$h_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right\|.$$

Denotamos

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}.$$

Como ejercicios, calculamos los factores de escala en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Expresamos algunos campos escalares y vectoriales concretos en función de las coordenadas cilíndricas y esféricas.

## 6.3. Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales

En lo sucesivo supondremos que todos los campos que aparecen son diferenciables tantas veces como sea preciso.

### 6.3.1. El gradiente

Sea  $f$  un campo escalar. El gradiente de  $f$  en coordenadas cartesianas es el vector

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Hallemos  $\nabla f$  en la base  $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ . Si  $\nabla f = f_u \hat{\mathbf{u}} + f_v \hat{\mathbf{v}} + f_w \hat{\mathbf{w}}$ , tenemos que encontrar  $f_u, f_v, f_w$ . Por ser la base  $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$  ortonormal,

$$f_u = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{h_u} \left( \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) = \frac{1}{h_u} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right] = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Análogamente se obtienen  $f_v$  y  $f_w$ . Por lo que

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}. \quad (6.1)$$

Una expresión para el gradiente usando sumatorios es

$$\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{\mathbf{u}}_i,$$

donde se ha substituido  $\hat{\mathbf{u}}$  por  $\hat{\mathbf{u}}_1$ ;  $\hat{\mathbf{v}}$  por  $\hat{\mathbf{u}}_2$  y  $\hat{\mathbf{w}}$  por  $\hat{\mathbf{u}}_3$ . Observamos que esta fórmula tiene sentido también en  $\mathbb{R}^2$ .

Como ejercicios calculamos el gradiente de un campo escalar que depende sólo de  $r$  en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ . Además, probamos como ejercicio que

$$\nabla u = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u}, \quad \nabla v = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v}, \quad \nabla w = \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w}.$$

Como consecuencia (que será útil) se tiene

$$\operatorname{rot} \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

### 6.3.2. La divergencia

Expresamos la divergencia de  $\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$  en el nuevo sistema de coordenadas. Como  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div}(F_u \hat{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}(F_v \hat{\mathbf{v}}) + \operatorname{div}(F_w \hat{\mathbf{w}})$ , sólo calcularemos  $\operatorname{div}(F_u \hat{\mathbf{u}})$ , pues el resto es análogo. Se tiene que

$$\operatorname{div}(F_u \hat{\mathbf{u}}) = \operatorname{div}[F_u(\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}})] = \nabla F_u \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}}) + F_u \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}}).$$

Aplicando (6.1) y debido a que la base  $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$  es ortonormal y orientada positivamente, se obtiene que

$$\nabla F_u \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}}) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial F_u}{\partial u}.$$

Ahora, por (6.1), (6.2) y usando que  $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$  para cualquier par de campos vectoriales  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  de clase  $\mathcal{C}^2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}}) &= \operatorname{div} \left( (h_v h_w) \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} \times \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} \right) \\ &= \nabla(h_v h_w) \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} \times \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} \right) + h_v h_w \operatorname{div} \left( \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} \times \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} \right) \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial(h_v h_w)}{\partial u}. \end{aligned}$$

Luego

$$\operatorname{div}(F_u \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{F_u}{h_u h_v h_w} \frac{\partial(h_v h_w)}{\partial u} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u}.$$

El resto de las componentes se calculan de forma similar. Por tanto

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_w h_u F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w} \right). \quad (6.3)$$

Una expresión para la divergencia usando sumatorios es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{H F_i}{h_i} \right),$$

donde  $H = h_1 h_2 h_3$ . Observemos que esta expresión tiene sentido en  $\mathbb{R}^2$ ; siendo en este caso  $H = h_1 h_2$ .

Pocas veces el alumno se cuestiona que en la deducción de (6.3) se usa que el campo  $\mathbf{F}$  es tridimensional (al utilizar el producto vectorial). Sin embargo se ha afirmado que la fórmula es válida también en  $\mathbb{R}^2$ . ¿Por qué? Se considera el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$  y se define  $\mathbf{F}^*(x, y, z) = (F_x(x, y), F_y(x, y), 0)$ . Ahora basta aplicar (6.3) para  $\mathbf{F}^*$ .

Como un ejemplo, calculamos la divergencia del campo  $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$  en el plano y en el espacio usando coordenadas polares y esféricas respectivamente. Este campo es importante en las aplicaciones, pues, salvo una constante multiplicativa, es el campo gravitatorio o electrostático.

### 6.3.3. El rotacional

Se calculará el rotacional de  $\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$ . Como  $\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot}(F_u \hat{\mathbf{u}}) + \text{rot}(F_v \hat{\mathbf{v}}) + \text{rot}(F_w \hat{\mathbf{w}})$ , sólo hace falta calcular  $\text{rot}(F_u \hat{\mathbf{u}})$  pues el resto es análogo. Aplicando que  $\text{rot}(f\mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$  para un campo escalar  $f$  y un campo vectorial  $\mathbf{F}$ , ambos de clase  $\mathcal{C}^2$ , se tiene

$$\begin{aligned}\text{rot}(F_u \hat{\mathbf{u}}) &= \text{rot}(F_u h_u \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u}) \\ &= F_u h_u \text{rot} \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} + \nabla(F_u h_u) \times \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \\ &= \mathbf{0} + \left[ \frac{1}{h_u} \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w} \hat{\mathbf{w}} \right] \times \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \\ &= -\frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v} \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w} \hat{\mathbf{v}} \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial w} h_v \hat{\mathbf{v}} - \frac{\partial(F_u h_u)}{\partial v} h_w \hat{\mathbf{w}} \right].\end{aligned}$$

Una expresión simbólica para  $\text{rot } \mathbf{F}$  es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}. \quad (6.4)$$

Como ejercicio, calculamos el rotacional de un campo de fuerzas central, es decir,  $\mathbf{F} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$ .

### 6.3.4. El Laplaciano

Si  $f$  es un campo escalar, el **laplaciano** de  $f$  se define mediante

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Puesto que  $\nabla^2 = \text{div} \circ \nabla$ , se tiene que

$$\nabla^2 f = \frac{1}{H} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{H}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right).$$

Como ejercicio, hallamos el laplaciano en coordenadas polares, esféricas y cilíndricas y las funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\nabla^2 f = 0$  y que sólo dependen de  $r$ . Hacemos lo mismo para funciones de tres variables.

Puesto, que en nuestra opinión, la memorización excesiva no ayuda a comprender la materia, en los exámenes se proporcionan a los alumnos las expresiones (6.1), (6.3) y (6.4). Si el nivel de la clase lo permitiera, se incluyen las demostraciones de las fórmulas.

## Contenido del Capítulo 6

1. Repaso de las coordenadas polares cilíndricas y esféricas.
2. Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales.
  - Coordenadas curvilíneas ortogonales.
  - Factores de escala. Vectores básicos.
3. Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales.
  - Gradiente.
  - Divergencia.
  - Rotacional.
  - Laplaciano.

# 7. El campo gravitatorio y electrostático

## OBJETIVOS

Saber plantear la integral del potencial creada por distribuciones continuas y calcularla en algunos casos concretos. Conocer la ley de Gauss y conocer las ecuaciones básicas que cumple el potencial.

En este capítulo se presentan varias aplicaciones del análisis vectorial a la teoría de campos gravitatorios y electrostáticos. Para una mayor información se pueden consultar muchos libros, por ejemplo, [9, 15, 27, 38, 42, 57].

## 7.1. El potencial gravitatorio y electrostático

Según la **ley de gravitación universal de Newton**, dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a ambas. Usando vectores, podemos enunciar que la fuerza que ejerce una masa  $M$  situada en  $\mathbf{p}_0$  sobre otra masa  $m$  situada en  $\mathbf{p}$  es

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = -GMm \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_0}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^3}.$$

Comentamos brevemente el signo negativo y el valor  $\|\mathbf{F}(\mathbf{p})\|$  en la igualdad anterior. La expresión de esta fuerza en coordenadas esféricas centradas en  $\mathbf{p}_0$  es mucho más sencilla:

$$\mathbf{F} = \frac{-GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

El **campo gravitatorio  $\mathbf{E}$**  que crea una partícula de masa  $M$  es la fuerza que ejerce sobre otra partícula de masa 1, es decir,  $m\mathbf{E} = \mathbf{F}$ .

La **ley de Coulomb** postula que la fuerza que ejerce una carga  $Q$  situada en  $\mathbf{p}_0$  sobre otra carga  $q$  situada en  $\mathbf{p}$  es

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_0}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^3}.$$

Esta ley es similar a la de Newton; sin embargo hay algunas diferencias:

- Hay cargas de distinto signo y éstas se atraen si son de signos distintos y se repelen si son del mismo signo, mientras que sólo hay “masas del mismo signo” ya que las masas sólo se atraen. De aquí que en la ley de Coulomb no aparece el signo negativo que se puso en la de Newton.

## 7. El campo gravitatorio y electrostático

---

- En el caso de la ley de Coulomb la constante  $G$  se substituye por  $-1/(4\pi\epsilon_0)$ . Esta constante es mayor que  $G$ , por eso la fuerza electrostática es más fuerte que la gravitatoria.
- Si las cargas no estuviesen en el vacío, la constante  $\epsilon_0$  (llamada **permitividad eléctrica en el vacío**) debe modificarse; por eso esta constante no es universal (a diferencia de la de gravedad).

La expresión para el **campo electrostático** que crea una carga se define como el campo gravitatorio; es decir la fuerza sobre otra carga de magnitud uno.

El campo gravitatorio que crea una partícula de masa  $M$  situada en  $\mathbf{p}_0$  es conservativo en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{p}_0\}$ , ya que  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  y el dominio de definición de  $\mathbf{E}$  es simplemente conexo. Luego existe una función potencial  $V$  tal que  $\nabla V = -\mathbf{E}$ . Usando coordenadas esféricas<sup>1</sup>,

$$\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \hat{\lambda} = GM \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Tras igualar componentes se obtiene  $V = -GM/r + C$ . Si se impone la condición de que  $V$  se anule en el infinito, se tiene

$$V = -\frac{GM}{r}.$$

Se ha obtenido que  $V$  tiene simetría radial, lo que es físicamente intuitivo pues  $\mathbf{E}$  también la tiene. La razón para calcular este potencial es práctica:  $\mathbf{E}$  tiene tres componentes, mientras que  $V$  sólo una; así pues, es más sencillo hallar  $V$  que  $\mathbf{E}$ . Hay que tener en cuenta que una vez hallado  $V$ , por derivación, obtenemos  $\mathbf{E}$ .

En el mundo real normalmente no hay dos masas puntuales aisladas. Para estudiar sistemas con varias masas es necesario postular que las masas  $M_1, \dots, M_n$  situadas en los puntos  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , crean una fuerza que es igual a la suma de las fuerzas que originan por separado. Luego el potencial en un punto  $\mathbf{p}$  distinto de  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  es

$$V(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{-GM_i}{\|\mathbf{p} - \mathbf{x}_i\|}. \quad (7.1)$$

Este mismo principio también es válido en electrostática.

La situación anterior es bastante irreal, ya que en la naturaleza no existen masas o cargas puntuales. Lo que hay son distribuciones continuas. Para trabajar con tales distribuciones se postula que la distribución continua de masas ocupando una región  $\Omega$  crea en un punto  $\mathbf{p}$  el potencial dado por

$$V(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} \frac{-G\rho(\mathbf{x})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|} d\mathbf{x}, \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{x} \in \Omega$  y  $\rho(\mathbf{x})$  es la densidad en  $\mathbf{x}$ . La integral puede ser de línea, superficie o de volumen dependiendo de  $\Omega$ .

Al pasar de una distribución discreta (7.1) a una distribución continua (7.2), el sumatorio se reemplaza por una integral y cada masa  $M_i$  se convierte en el diferencial de masa  $\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Observamos que si  $\mathbf{p} \in \Omega$ , la integral (7.2) presenta problemas de convergencia.

Resolvemos los siguientes problemas:

---

<sup>1</sup>Desde luego, si se estudia el campo electrostático, basta cambiar  $G$  por  $-1/(4\pi\epsilon_0)$ .

- a) Pruébese que el potencial gravitatorio creado por una esfera hueca homogénea de radio  $R$  sobre un punto  $\mathbf{p}$  que no está en la superficie esférica es

$$V(\mathbf{p}) = \begin{cases} -GM/R & \text{si } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| < R, \\ -GM/\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| & \text{si } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| > R, \end{cases}$$

donde  $\mathbf{c}$  es el centro de la esfera y  $M$  es la masa total de la esfera hueca. Este resultado dice que la fuerza de atracción que crea una esfera hueca sobre puntos exteriores es como si la masa estuviese concentrada en el centro de la esfera; conclusión deducida por Newton.

- b) Con respecto al potencial del ejercicio anterior:

- b.1) Hállese  $\nabla V$ . Conclúyase que los puntos interiores a la esfera no sufren atracción ni repulsión.
- b.2) Pruébese que  $\nabla^2 V = 0$  en cualquier punto que no está sobre la superficie de la esfera.
- c) Debido a que la forma de la Tierra se puede aproximar por una esfera; es importante calcular el potencial originado por una esfera maciza de radio  $R$  sobre un punto  $\mathbf{p}$ . Suponemos la Tierra homogénea con densidad  $\rho$  y centrada en el origen. Pruébese que

$$V(\mathbf{p}) = \begin{cases} -\frac{GM}{\|\mathbf{p}\|} & \text{si } R < \|\mathbf{p}\|, \\ -G\rho 2\pi \left( R^2 - \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{3} \right) & \text{si } \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

- d) Respecto al potencial del ejercicio previo, pruébese que

- d.1) el potencial  $V$  es continuo en la superficie esférica.
- d.2) la fuerza de atracción,  $-\nabla V$ , viene dada por

$$-\nabla V(\mathbf{p}) = \begin{cases} -\frac{GM}{\|\mathbf{p}\|^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{si } R < \|\mathbf{p}\|, \\ -\frac{GM\|\mathbf{p}\|}{R^3} \hat{\mathbf{r}} & \text{si } \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

- d.3) El laplaciano de  $V$  cumple

$$\nabla^2 V(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } R < \|\mathbf{p}\|, \\ 4\pi G\rho(\mathbf{p}) & \text{si } \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

En general, la integral que proporciona el potencial no se puede hallar de forma exacta. Pero en todos los casos anteriores, el laplaciano del potencial en puntos libres de masas es nulo independientemente de la distribución de masas que crea el campo. Más adelante veremos que no es casualidad. Ésta es una de las razones de la importancia del laplaciano.

El estudio de las propiedades del potencial en puntos ocupados por cargas presenta bastantes dificultades pues el integrando de (7.2) se hace infinito en los puntos donde hay cargas. No entraremos en muchos detalles (véase [42] para un estudio más profundo).

Supongamos en lo que sigue que  $V(p, q, r)$  es el potencial en el punto  $(p, q, r)$  creado por una distribución continua de cargas con densidad  $\rho$  continua a trozos y acotada en el cerrado y acotado  $\Omega$  con interior no vacío. Entonces se tiene

$$V(p, q, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{[(p-x)^2 + (q-y)^2 + (r-z)^2]^{1/2}} dx dy dz. \quad (7.3)$$

Enunciamos y demostramos que si  $\Omega$  es un cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^3$  con interior no vacío y si  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua a trozos, entonces la integral (7.3) converge para todo  $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ . Para la demostración hay que distinguir si  $(p, q, r) \notin \Omega$  o si  $(p, q, r) \in \Omega$ . El primer caso es trivial. Para el segundo, se puede suponer que  $\Omega$  es una esfera de centro  $(p, q, r)$  y basta pasar la integral a coordenadas esféricas centradas en  $(p, q, r)$ .

Enunciamos el siguiente teorema: Sea  $V$  el potencial de una distribución continua de cargas ocupando el cerrado y acotado  $\Omega$ . Si  $\rho$  es diferenciable en el interior de  $\Omega$  y su gradiente está acotado en  $\Omega$ , entonces en cualquier punto  $\mathbf{p}$  que no pertenece a la frontera de  $\Omega$  se cumple

$$\nabla^2 V(\mathbf{p}) = -\frac{\rho(\mathbf{p})}{\epsilon_0}.$$

No presentamos la demostración en clase, que se puede encontrar en [42] (basta suponer que  $\rho$  cumple la condición de Hölder en el interior de  $\Omega$ ).

## 7.2. La ley de Gauss

La ley de Gauss proporciona el valor de  $\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$ , donde  $S$  es una superficie cerrada y  $\mathbf{E}$  es el campo electrostático o gravitatorio. Para fijar ideas, la enunciamos usando campos electrostáticos.

Comenzamos estudiando lo más sencillo: cuando el campo está creado por una partícula de carga  $Q$  situada en el origen, es decir  $\mathbf{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{\mathbf{r}}$ . Denotamos  $K = Q/4\pi\epsilon_0$  y observamos que se cumple  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

Hay que tener cuidado en la siguiente igualdad:

$$\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dx dy dz = 0,$$

donde  $\Omega$  es el recinto encerrado por  $S$  pues el teorema de la divergencia no es cierto si el campo  $\mathbf{E}$  no es diferenciable en el interior de  $S$ . Sin embargo podemos decir que si  $\mathbf{0} \notin \operatorname{interior}(S)$ , entonces  $\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0$ .

Si el origen estuviese en el interior de  $S$ , lo encerramos dentro de una esfera  $B$  de radio  $\delta$  suficientemente pequeño tal que  $B \subset \Omega$  (véase la figura 7.1).

Por el teorema extendido de la divergencia, si  $\partial B$  es la frontera de  $B$ ,

$$\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} - \iint_{\partial B} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega \setminus B} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = 0.$$

Pero ahora es trivial calcular  $\iint_{\partial B} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ . Este valor es  $Q/\epsilon_0$ . Se acaba de probar

$$\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{0} \notin \operatorname{interior}(S), \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } \mathbf{0} \in \operatorname{interior}(S). \end{cases}$$

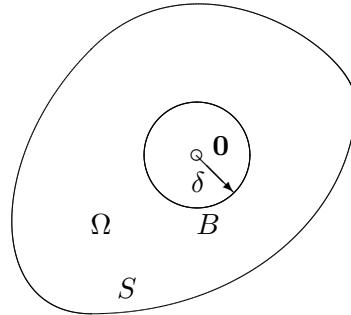


Figura 7.1.: El equivalente plano en la deducción de la ley de Gauss

Este resultado se puede extender al caso de varias cargas como sigue:  $\iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$ , donde  $Q$  es la carga total encerrada por  $S$ . El paso de una distribución discreta a una continua no es riguroso (en [50] se ve una forma de demostrar este resultado con rigor).

La ley de Gauss permite enunciar la siguiente ley fundamental de la electrostática. Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^3$  libre de cargas. Tomamos  $R \subset \Omega$  arbitrario y sea  $S$  la superficie frontera de  $R$ . Entonces, por la ley de Gauss y por el teorema de la divergencia,

$$0 = \iint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{E} dx dy dz.$$

Como esto es cierto para cualquier  $R \subset \Omega$ , entonces  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  en  $\Omega$ . Como  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , entonces  $\operatorname{div}(\nabla V) = 0$  en  $\Omega$ ; es decir,  $V$  cumple la **ecuación de Laplace** en  $\Omega$ , que es,  $\nabla^2 V = 0$ .

## Contenido del Capítulo 7

### 1. El potencial eléctrico y gravitatorio.

- La ley de gravitación universal de Newton y la ley de Coulomb.
- Cálculo del potencial creado por una partícula puntual.
- Principio de superposición.
- Cálculo del potencial creado por varias distribuciones continuas.

### 2. La ley de Gauss.

- Deducción.
- Ecuación de Laplace.
- Ecuación de Poisson.

# 8. El campo magnético

## OBJETIVOS

Saber calcular el campo magnético en algunos casos simples. Saber usar la ley de Lorentz. Deducir consecuencias teóricas a partir de las leyes de Biot-Savart y de las ecuaciones de Maxwell.

### 8.1. Fluidos

Comenzamos con una breve introducción a la mecánica de fluidos, ya que será útil para estudiar el flujo de cargas o la ecuación de continuidad. Hay muchos libros que tratan este tema: se pueden consultar [27] (poco riguroso, pero intuitivo y válido si no se pretende profundizar), [35] (para un tratamiento más riguroso) o [49] (riguroso, pero abstracto y difícil de seguir).

Para comprender mejor la definición de movimiento de un fluido que inicialmente ocupa la región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  en el intervalo temporal  $[0, t_f]$ , explicamos de forma intuitiva lo siguiente. Una partícula del fluido que inicialmente está en la posición  $\mathbf{x}$ , tras  $t$  unidades de tiempo, se desplaza a otro punto denotado por  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ . Así pues, existe una función  $\Phi : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Observamos que  $\Phi$  depende de 4 variables; tres espaciales, las de  $\Omega$  y una temporal, la de  $[0, t_f]$ . Además se debe cumplir que  $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$  para todo punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Al fijar  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , la curva  $\mathbf{r} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{r}(t) = \Phi(\mathbf{x}_0, t)$  es la trayectoria descrita por la partícula que inicialmente está en  $\mathbf{x}_0$ , por tanto  $\mathbf{r}'(t)$  es la velocidad del fluido en la posición  $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$  y en el tiempo  $t$ . Parece intuitivo que deba existir  $\mathbf{v} : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{x}, t), t). \quad (8.1)$$

Denotemos por  $D\Phi$  la matriz diferencial de  $\Phi$  sin la última columna. Ahora estamos en condiciones de dar la siguiente definición.

Un **fluido** es una función  $\Phi : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  que cumple

- Para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  se cumple  $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ .
- $\Phi$  es diferenciable en  $(\mathbf{x}, t)$  y la matriz  $D\Phi_{(\mathbf{x}, t)}$  es invertible para todo  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, t_f]$ .
- Existe un **campo de velocidades**  $\mathbf{v} : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que se cumple (8.1) para todo  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, t_f]$ .

Es posible escribir la condición c) de forma más compacta: si definimos  $\bar{\Phi} : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \Omega \times [0, t_f]$  dada por  $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = (\Phi(\mathbf{x}, t), t)$ ; entonces la condición c) equivale a que exista  $\mathbf{v}$  tal que  $\partial \Phi / \partial t = \mathbf{v} \circ \bar{\Phi}$ .

## 8. El campo magnético

---

Ilustramos la definición anterior con el ejemplo siguiente. La función  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\Phi(x, y, z, t) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z). \quad (8.2)$$

es un fluido. Lo representamos geométricamente y hallamos el campo de velocidades obteniendo  $\mathbf{v}(x, y, z, t) = (-y, x, 0)$ . Es importante notar la diferencia entre  $\mathbf{v}$  y  $\partial\Phi/\partial t$ : observamos que  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  es la velocidad en el punto  $\mathbf{x}$  y en el instante  $t$ , pero  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$  es la velocidad en el instante  $t$  de una partícula que inicialmente está en el punto  $\mathbf{x}$ . Esta diferencia se muestra claramente en este ejemplo en donde  $\mathbf{v} \neq \partial\Phi/\partial t$ .

### 8.2. La derivada material

Estudiamos ahora la densidad del fluido. La densidad varía según la posición y el tiempo. Así, existe un campo escalar  $f$  que depende de las variables espaciales  $\mathbf{x}$  y del tiempo  $t$ , es decir,  $f : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ . En vez de la densidad; por supuesto, podemos considerar cualquier campo escalar que depende tanto de la posición como del tiempo.

Fijado  $\mathbf{x} \in \Omega$ , sea  $g(t) = f(\Phi(\mathbf{x}, t), t)$ , que estudia el comportamiento de  $f$  según se mueve la partícula que inicialmente ocupa la posición  $\mathbf{x}$ . Es fácil probar que

$$g'(t) = \nabla f(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, t), t).$$

Debido a la condición c) de la definición de fluido, se tiene que

$$g'(t) = \left( \nabla f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Big|_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)}.$$

Esto motiva la siguiente definición. Sea una función  $f : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. La **derivada material** de  $f$  respecto al campo de velocidades  $\mathbf{v}$  es

$$\frac{Df}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

La derivada material de  $f$  es la variación temporal de  $f$  desde el “punto de vista” de una partícula que se mueve en el fluido. Notamos que generalmente es diferente de  $\partial f/\partial t$  que expresa la variación temporal de  $f$  desde el “punto de vista” de un punto fijo. Hacemos los dos siguientes problemas considerando el fluido (8.2):

- Sea el campo  $f(x, y, z, t) = x$ . Calcúlese  $Df/dt$  y  $\partial f/\partial t$ . Explíquese de forma intuitiva la razón de que  $Df/dt > 0$  si y sólo si  $y < 0$ .
- Considérese un campo escalar  $f$  que depende sólo de la distancia al eje  $Z$ . Pruébese que  $Df/dt = 0$  y explíquese geométricamente este resultado.

### 8.3. El teorema del transporte

Estudiamos ahora cómo se mueve una región  $R$  de  $\mathbb{R}^3$ . Denotamos  $R(t) = \{\Phi(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in R\}$ . El volumen de  $R(t)$  es  $\iiint_{R(t)} d\mathbf{x}$  y la masa en  $R(t)$  es  $\iiint_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ , siendo  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la

densidad en la posición  $\mathbf{x}$  y en el tiempo  $t$ . Para estimar la variación de la masa o el volumen, estudiaremos

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

para una función  $f : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. No podemos permutar la derivada con la integral, ya que el dominio de integración depende de  $t$ . Para evitar esta dependencia, usamos el teorema del cambio de variables:

$$\iiint_{R(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \iiint_R f(\Phi(\mathbf{x}, t)) J(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

donde  $J(\cdot, t)$  es el determinante del jacobiano de  $\Phi_t$ , es decir,  $J(\mathbf{x}, t) = \det(D\Phi_{(\mathbf{x}, t)})$ . Ahora se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \iiint_R \frac{\partial}{\partial t} (f(\Phi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \\ &= \iiint_R \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) + f(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Hemos de desarrollar ahora

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \det(D\Phi_{(\mathbf{x}, t)}).$$

Para ello usaremos la condición c) de la definición de fluido: como  $\mathbf{v} \circ \bar{\Phi} = \partial \Phi / \partial t$ , aplicando la regla de la cadena y permutando el orden de derivación obtenemos

$$d\mathbf{v}_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)} d\bar{\Phi}_{(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} (d\Phi_{(\mathbf{x}, t)}).$$

Usando matrices por bloques,

$$\begin{pmatrix} D\mathbf{v}_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\Phi_{(\mathbf{x}, t)} & \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D\Phi_{(\mathbf{x}, t)} & \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix},$$

donde denotaremos a partir de ahora  $D\mathbf{v}$  la matriz  $d\mathbf{v}$  sin la última columna. Luego

$$D\mathbf{v}_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)} D\Phi_{(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} D\Phi_{(\mathbf{x}, t)}. \quad (8.4)$$

Será útil el siguiente lema: Sean  $M(t)$  una matriz variable y  $N$  una matriz constante, ambas cuadradas, de orden 3 y cumpliendo  $M' = NM$ , entonces  $(\det M)' = (\det M)(\det N)$ .

Hacemos la siguiente demostración<sup>1</sup>. Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  las filas de  $M$ , como  $\det M = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ , entonces  $(\det M)' = \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w}' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ . Simplificamos sólo el primer sumando, pues el resto es análogo. Si las entradas de  $N$  son denotadas por  $n_{i,j}$ , puesto que  $M' = NM$ , se tiene  $\mathbf{u}' = n_{11}\mathbf{u} + n_{12}\mathbf{v} + n_{13}\mathbf{w}$ . Luego

$$\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (n_{11}\mathbf{u} + n_{12}\mathbf{v} + n_{13}\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = n_{11} \det M.$$

<sup>1</sup>Este lema admite una prueba para matrices de orden arbitrario y “más corta”: Si  $M$  cumple  $M' = NM$ , entonces existe una matriz  $A$  constante tal que  $M = Ae^{Nt}$ , entonces  $\det M = (\det A)(\det e^{Nt}) = (\det A)e^{\text{Tr}(Nt)} = (\det A)e^{t\text{Tr}N}$ . Ahora es trivial probar el lema.

## 8. El campo magnético

---

Análogamente se obtiene que  $\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = n_{22} \det M$  y que  $\mathbf{w}' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = n_{33} \det M$ . Por tanto se cumple  $(\det M)' = n_{11} \det M + n_{22} \det M + n_{33} \det M = (\text{Tr}N)(\det M)$ .

Debido a este lema, a la ecuación (8.4) y al hecho de que  $J(\mathbf{x}, t) = \det(D\Phi_{(\mathbf{x}, t)})$ ,

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \text{Tr}(D\mathbf{v}_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)})J(\mathbf{x}, t),$$

y como por definición de traza se tiene  $\text{Tr}(D\mathbf{v}_{(\Phi(\mathbf{x}, t), t)}) = \text{div } \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{x}, t), t)$ , entonces

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \text{div } \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \cdot J(\mathbf{x}, t).$$

Hemos probado el siguiente resultado (llamado **Teorema o ecuación del transporte** y generalmente atribuido a Reynolds (1842–1912)).

Para  $f : \Omega \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable se cumple

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} f \, d\mathbf{x} = \iiint_R \left( \frac{Df}{dt} + f \, \text{div } \mathbf{v} \right) J \, d\mathbf{x} = \iiint_{R(t)} \left( \frac{Df}{dt} + f \, \text{div } \mathbf{v} \right) \, d\mathbf{x}, \quad (8.5)$$

en donde se han omitido donde están evaluadas las funciones por comodidad.

## 8.4. La ecuación de continuidad

El teorema del transporte tiene varias consecuencias importantes.

Tomando  $f = 1$  en (8.5) y si denotamos por  $V(t)$  el volumen de  $R(t)$ , entonces  $V'(t) = \iiint_R J \, \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ . Si el fluido ni se expande ni se contrae, se tiene que  $V'(t) = 0$  para todo  $R$ , es decir,  $J \, \text{div } \mathbf{v} = 0$ , como  $J \neq 0$ , entonces  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

En ausencia de fuentes o sumideros, la masa del fluido ha de conservarse (la **ley de conservación de la masa**). Si  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad y  $m(t)$  es la masa de  $R(t)$ , entonces  $m'(t) = 0$  para todo  $R$ ; y un argumento similar al usado anteriormente muestra

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \, \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (8.6)$$

que es la **ecuación de continuidad**<sup>2</sup> ya descubierta por Euler en el siglo XVIII<sup>3</sup>.

Dejamos como ejercicio probar que la ecuación de continuidad se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8.7)$$

Cuando en un material se desplazan cargas eléctricas se crea una corriente eléctrica. Sean  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  la densidad de carga y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  la velocidad de las cargas. Por convenio se adopta como sentido de corriente el del movimiento de las cargas positivas. Si ni  $\rho$  ni  $\mathbf{v}$  dependen del tiempo se dice que la corriente es **estacionaria**. Se define la **densidad de corriente** como  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ . Como experimentalmente se ha observado que la carga debe

<sup>2</sup>Si en la región donde circula el fluido hay un aporte extra (una **fuente**) o un lugar donde se pierde fluido (un **sumidero**) hay que modificar la ecuación (8.6).

<sup>3</sup>En [63] se puede encontrar una deducción informal de la ecuación de continuidad, así como sus aplicaciones.

conservarse, se postula que la carga total en un sistema aislado permanece constante. Este principio, gracias a (8.7), se escribe mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0.$$

Se deja como ejercicio probar que si  $S$  es una superficie cerrada, entonces  $\iint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -dQ/dt$ , donde  $Q$  es la carga total encerrada dentro de  $S$ . Se llama **intensidad eléctrica** que pasa por una superficie  $S$  al escalar  $I = \iint_S \mathbf{J} d\mathbf{S}$ .

## 8.5. La ley de Lorentz y la ley de Biot y Savart

A continuación se estudian la interacción entre cargas eléctricas en movimiento. Estas relaciones son más complicadas que en el caso del campo eléctrico; ya que este campo es creado por cargas, que se miden con escalares; y el campo magnético es creado por corrientes eléctricas, que son medidas por vectores. Por supuesto que no se pretende profundizar en esta rama de la física, para más información se pueden consultar, entre otros, [4, 15, 27, 38, 57]. Aclararemos que toda la teoría desarrollada en esta sección trata sólo de campos magnéticos en el vacío y que no cambian con el tiempo.

Cuando una carga está en movimiento, aparece una nueva fuerza (llamada **magnética**) que actúa sobre otras cargas en movimiento (**partículas de prueba**). Debido a una serie de experimentos se concluyó que la fuerza magnética, denotada en lo sucesivo por  $\mathbf{F}_m$ , depende de la carga  $q$  y de la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula de prueba y cumple

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8.8)$$

para cierto vector  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  que se llama **campo magnético** y la ecuación (8.8) se llama **la ley de Lorentz**. En lo sucesivo se supondrá que  $\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$ .

Para enunciar la ley de Biot y Savart es necesario saber integrar un campo vectorial. Sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\Omega$  es un cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^3$  y las componentes de  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  son integrables en  $\Omega$ . Se define

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left( \iiint_{\Omega} P(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \iiint_{\Omega} Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \iiint_{\Omega} R(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right).$$

Es sencillo probar que  $\mathbf{v} \cdot \iiint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  para cualquier vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  constante. Se puede probar fácilmente

$$\left\| \iiint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\| \leq \iiint_{\Omega} \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}. \quad (8.9)$$

La demostración es fácil y la hacemos: sea  $\mathbf{v} = \iiint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Entonces

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \iiint_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \iiint_{\Omega} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} = \|\mathbf{v}\| \iiint_{\Omega} \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}.$$

**La ley de Biot y Savart** postula que el campo magnético que crea una corriente con densidad de carga  $\mathbf{J}$  que circula en  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sobre un punto  $\mathbf{p}$  viene dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{p} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|^3} d\mathbf{x}, \quad (8.10)$$

donde  $\mu_0$  es una constante que se llama **permeabilidad magnética del vacío**. Supondremos  $\Omega$  es un cerrado y acotado, que las componentes de  $\mathbf{J}$  tienen gradiente continuo y que  $\mathbf{J}$  se anula fuera de  $\Omega$  y de la superficie frontera de  $\Omega$ .

En primer lugar debemos ver si esta integral converge, puesto que si  $\mathbf{p} \in \Omega$ , entonces el denominador en (8.10) se hace infinito y puede causar problemas. La demostración se deja como ejercicio (de hecho, se aplica (8.9) y se procede igual que cuando se probó que la integral (7.3) converge).

## 8.6. Propiedades del campo magnético

Una ley básica del electromagnetismo es que la divergencia del campo magnético es nula en todo punto. Hacemos la siguiente demostración: Sean  $(p, q, r)$  las coordenadas del punto  $\mathbf{p}$  y  $(J_1, J_2, J_3)$  las componentes de  $\mathbf{J}$ . Entonces

$$\operatorname{rot} \left( \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial q} \iiint_{\Omega} \frac{J_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} - \frac{\partial}{\partial r} \iiint_{\Omega} \frac{J_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|}, *, * \right),$$

donde el rotacional se toma respecto a las variables  $(p, q, r)$  y las componentes marcadas con asterisco se calculan de forma similar. Ahora supondremos que las derivadas e integrales pueden intercambiarse (véase [42] para una demostración) y se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left( \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x} \right) &= \left( \iiint_{\Omega} \frac{(y - q) J_3(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} d\mathbf{x} - \iiint_{\Omega} \frac{(z - r) J_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} d\mathbf{x}, *, * \right) \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} ((y - q) J_3(\mathbf{x}) - (z - r) J_2(\mathbf{x}), *, *) d\mathbf{x} \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{B}$  es el rotacional de un campo vectorial diferenciable, entonces  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Además hemos obtenido que si definimos

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x}, \quad (8.11)$$

entonces  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Este campo  $\mathbf{A}$  se llama **potencial vector**. Sin embargo, a diferencia del potencial eléctrico, este potencial no juega un papel importante, debido sobre todo a dos razones: es difícil de calcular y no tiene una interpretación física sencilla.

Como  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , entonces  $\iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ , si  $S$  es cualquier superficie cerrada. Esta última integral se llama **flujo magnético** sobre  $S$  y se denota por  $\Phi_{\mathbf{B}}$ . Físicamente, decir que el flujo magnético sobre cualquier superficie cerrada es nulo, se interpreta diciendo que no existen monopolos magnéticos. Ocurre lo contrario en el caso del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , este campo cumple  $\operatorname{div} \mathbf{E} = -\rho/\epsilon_0$ , y sí existen cargas eléctricas (positivas y negativas, dependiendo del signo de  $\rho$ ). La no existencia de monopolos magnéticos ha sido comprobada en la práctica.

Otra ley básica del electromagnetismo de corrientes estacionarias es  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  en los puntos que no son de la frontera de  $\Omega$ . Hacemos la siguiente demostración: Se tiene

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (8.12)$$

Sean  $(A_1, A_2, A_3)$  las componentes de  $\mathbf{A}$  y  $(J_1, J_2, J_3)$  las de  $\mathbf{J}$ . Por la definición de  $\mathbf{A}$ , se tiene que  $A_1$  es el potencial causado por la distribución continua de cargas que ocupa  $\Omega$  con densidad de carga  $\mu_0 \varepsilon_0 J_1$ . Luego  $A_1$  cumple la ecuación de Poisson fuera de la frontera de  $\Omega$ , es decir  $\nabla^2 A_1 = -\mu_0 J_1$ . Lo mismo es válido para el resto de las componentes. Luego

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (8.13)$$

Ahora comprobamos que la divergencia de  $\mathbf{A}$  es nula: si suponemos que las integrales y derivadas pueden intercambiarse (véase de nuevo [42]), se cumple que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{p}) &= \frac{\partial A_1}{\partial p} + \frac{\partial A_2}{\partial q} + \frac{\partial A_3}{\partial r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \iiint_{\Omega} \frac{J_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial q} \iiint_{\Omega} \frac{J_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial r} \iiint_{\Omega} \frac{J_3(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{x} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{J_1(\mathbf{x})(x - p) + J_2(\mathbf{x})(y - q) + J_3(\mathbf{x})(z - r)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} d\mathbf{x} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Ahora consideramos dos casos: cuando  $\mathbf{p}$  está en el interior de  $\Omega$  y cuando  $\mathbf{p} \notin \Omega$ . Si  $\mathbf{p} \notin \Omega$ , considerando  $\mathbf{p}$  fijo y  $\mathbf{x} \in \Omega$  variable, como  $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$  y usando que  $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div} \mathbf{F}$  para cualquier par de campos escalar  $f$  y vectorial  $\mathbf{F}$ , ambos diferenciables, se tiene

$$\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} \right) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) + \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|}, \quad (8.15)$$

y como se trata de un campo estacionario, por la ecuación de continuidad de la carga, la divergencia de  $\mathbf{J}$  es nula. Y ahora por el teorema de la divergencia, (8.14) y (8.15) se cumple

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{p}) = \iint_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{S},$$

donde  $S$  es la superficie frontera de  $\Omega$ . Pero como  $\mathbf{J}$  se anula en la superficie frontera de  $\Omega$ , entonces la divergencia de  $\mathbf{A}$  se anula fuera de  $\Omega$ .

Ahora supondremos que  $\mathbf{p}$  está en el interior de  $\Omega$ . Podemos encontrar una esfera centrada en  $\mathbf{p}$  y de radio  $\varepsilon$  contenida en  $\Omega$ . Sea  $E_\varepsilon$  esta esfera y  $S_\varepsilon$  la superficie de esta esfera. Por el teorema de la divergencia en la región  $\Omega \setminus E_\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x} \\ &= \iiint_{\Omega \setminus E_\varepsilon} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x} + \iiint_{E_\varepsilon} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x} \\ &= - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{S} + \iiint_{E_\varepsilon} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Es fácil probar que si  $J$  una cota del campo  $\mathbf{J}$ , entonces

$$\left| \iint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} d\mathbf{S} \right| \leq J 4\pi \varepsilon, \quad \left| \iiint_{E_\varepsilon} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x} \right| \leq 4\pi J \varepsilon.$$

## 8. El campo magnético

---

Luego, haciendo tender  $\varepsilon$  a 0 en (8.16), obtenemos que

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3} \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Por tanto la divergencia de  $\mathbf{A}$  es nula. De (8.12) y de (8.13), obtenemos  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  en los puntos que no son frontera de  $\Omega$ . Con lo que la prueba está terminada.

Proponemos los siguientes ejercicios (bajo las hipótesis del teorema anterior):

- Si  $C$  es una curva que no pasa por la frontera de  $\Omega$  e  $I$  es la intensidad que pasa por una superficie que no corta a la frontera de  $\Omega$  y cuya frontera es  $C$ , entonces  $\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 I$ .
- Si  $C$  es una curva cerrada que encierra a una superficie  $S$ , entonces  $\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{r} = \Phi_{\mathbf{B}}$ .

## 8.7. Las ecuaciones de Maxwell

Estudiamos de manera muy breve e incompleta las famosas **ecuaciones de Maxwell** que gobiernan los campos electromagnéticos. Antes de Maxwell se creía que las fuerzas eléctrica y magnética eran diferentes. Una de las contribuciones de Maxwell fue la unificación en una sola teoría de estas dos fuerzas. Hasta ahora se han encontrado 4 ecuaciones que cumplen el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$ : si  $\rho$  es la densidad de carga y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Recordamos que estas ecuaciones son válidas sólo si los campos son estacionarios y en el vacío.

¿Qué ocurre si los campos cambian con el tiempo? A principios del siglo XIX, experimentos hechos por Faraday y Henry mostraron que si el campo magnético cambia con el tiempo entonces aparece una corriente eléctrica. Por lo que la ecuación  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  debe modificarse. La **ley de Faraday** establecida de forma empírica, establece que  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ .

Por otra parte, Maxwell observó que la ecuación de continuidad es incompatible con la ecuación  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ; ya que si aplicamos la divergencia a esta última ecuación, obtenemos que la divergencia de  $\mathbf{J}$  es nula, lo que es incongruente con la ecuación de continuidad.

La contribución de Maxwell fue modificar la ecuación  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  dejando intacta la ecuación de continuidad. Maxwell supuso  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mathbf{C}$ , donde  $\mathbf{C}$  es un campo vectorial que de momento no sabemos nada sobre él. Se puede probar fácilmente que  $\operatorname{div} \mathbf{C} = \mu_0 \partial \rho / \partial t$ . Ahora, por  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$  trivialmente se tiene  $\operatorname{div}(\mathbf{C} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t) = 0$ . Maxwell **postuló**  $\mathbf{C} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ .

Las cuatro ecuaciones siguientes, conocidas como las **ecuaciones de Maxwell**, gobiernan toda la teoría electromagnética.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Se debe decir que estas cuatro ecuaciones no son teoremas matemáticos; sino que son leyes empíricas motivadas por la experimentación y que hasta ahora no han contradicho a ningún experimento realizado.

Además hay que decir que las ecuaciones de Maxwell se deben modificar ante la presencia de materia. Esto es debido, de una forma muy rudimentaria, a que el campo magnético y el eléctrico modifica las propiedades de los cuerpos. Es necesario introducir dos campos más en las ecuaciones de Maxwell. La relación de estos dos campos con  $\mathbf{E}$  y con  $\mathbf{B}$  (que dependen de cada material) junto con las ecuaciones de Maxwell y la ley de Lorentz,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  que nos da la fuerza, son las ecuaciones básicas de la teoría electromagnética<sup>4</sup>.

Proponemos los dos siguientes ejercicios :

- a) Demuéstrese que las cuatro ecuaciones de Maxwell implican las siguientes expresiones, supuestos los campos diferenciables tantas veces como sean precisos.
- 1) Sea  $S$  una superficie cerrada que encierra una carga  $Q$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad 0 = \iint_S \mathbf{B} \cdot dS,$$

- 2) Sea  $S$  una superficie cuya frontera es la curva  $C$  orientada positivamente

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi_{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $I$  es la intensidad que atraviesa  $S$  y  $\Phi_{\mathbf{B}}$  es el flujo magnético que atraviesa  $S$ .

- b) En este ejercicio se verá que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se trasladan como una onda con velocidad la de la luz. Pruébese que de las cuatro ecuaciones de Maxwell se deduce que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \text{rot } \mathbf{J}.$$

Ayuda: úsese la igualdad  $\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla(\text{div } \mathbf{W}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{W})$  siendo  $\mathbf{W}$  un campo vectorial suficientemente diferenciable.

En el vacío y en ausencia de cargas en movimiento ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ) estas dos ecuaciones se reducen a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (8.17)$$

Las ecuaciones (8.17) son las mismas y corresponde a lo que se llama la **ecuación de ondas**. Esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.18)$$

donde  $u(x, y, z, t)$  es el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio de una onda que se mueve con velocidad  $c$  en el punto  $(x, y, z)$  y en el tiempo  $t$ . Maxwell dedujo que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se comportan como ondas que se mueven con velocidad  $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ . Este valor empíricamente hallado es muy parecido al valor de la velocidad de la luz en el vacío, unos  $3 \cdot 10^8$  m/s. Maxwell propuso que la luz es de naturaleza electromagnética. Pronto estas conclusiones teóricas condujeron al descubrimiento de las ondas de radio por Hertz en 1886.

<sup>4</sup>En los conductores además se tiene la ley (experimental) de Ohm.

## **Contenido del Capítulo 8**

### **1. Fluidos.**

- Motivación. Definición. Ejemplo.

### **2. La derivada material.**

- Motivación. Definición. Ejemplo.

### **3. El teorema del transporte.**

### **4. La ecuación de continuidad**

### **5. La ley de Lorentz y la ley de Biot y Savart.**

- Enunciado de la ley de Lorentz.
- Integrales de campos vectoriales.
- Enunciado de la ley de Biot-Savart.

### **6. Propiedades del campo magnético.**

- La divergencia del campo magnético es nulo. El potencial vector
- Expresión del rotacional del campo magnético.

### **7. Ecuaciones de Maxwell.**

- Enunciado de las ecuaciones de Maxwell.
- Forma integral de las ecuaciones de Maxwell.
- El campo eléctrico y el magnético verifican la ecuación de ondas.

**Parte IV.**

## **PROGRAMA DE MATEMÁTICAS**



# Introducción

Como ya hemos comentado, esta asignatura está dirigida a estudiantes de segundo curso. El objetivo principal es la presentación de unas herramientas matemáticas de cierto nivel encaminadas a satisfacer las necesidades matemáticas que el alumno encontrará a lo largo de la carrera. Puesto que hay una presión considerable debido al tiempo docente disponible pensamos que es preferible sacrificar las demostraciones no constructivas en aras de la obtención de la mayor información útil en el tiempo disponible; aunque siempre enunciando con total precisión y rigor las hipótesis necesarias para la validez del teorema. Los detalles excesivamente formales, demasiado abstractos y que puedan obscurecer las intuiciones del alumno se evitan siempre que sea posible.

Hemos distribuido el programa de esta asignatura en seis capítulos:

**Capítulo 1** FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

**Capítulo 2** RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

**Capítulo 3** RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

**Capítulo 4** SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.

**Capítulo 5** RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES MEDIANTE SERIES DE FOURIER.

**Capítulo 6** PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE Y DESARROLLOS EN SERIE DE AUTOFUNCIONES.

Comentamos a continuación, muy brevemente, el desarrollo del programa.

El CAPÍTULO 1 está dedicado al estudio de las funciones de variable compleja. Hemos optado por un enfoque que permite llegar lo más rápidamente posible al Teorema de los Residuos, resultado fundamental para calcular integrales impropias relacionadas con las transformadas directa e inversa de Fourier y de Laplace, que son herramientas fundamentales en otras asignaturas de la carrera.

El CAPÍTULO 2 estudia las transformadas de Fourier, de seno de Fourier y la de coseno de Fourier, así como sus propiedades más importantes. Básicamente en este tema nos ocuparemos en transformar ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias con el fin de resolver aquéllas.

En el CAPÍTULO 3 estudiamos la transformada de Laplace y sus propiedades. Esta transformada tiene la utilidad de transformar ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales en sistemas de ecuaciones lineales. La transformada de Laplace presenta algunas ventajas en relación con las de Fourier, así será aplicable a una clase más amplia de funciones. Una diferencia clara entre las transformadas de Fourier y la de Laplace es que esta última transformada actúa sobre una variable compleja y este hecho repercute en que la correspondiente fórmula de inversión se expresa en términos de cierta integral compleja, en donde se necesitará aplicar las herramientas de la variable compleja que proporciona el Capítulo 1.

En el CAPÍTULO 4 se resuelven ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias. Este estudio permite introducir las funciones de Bessel.

El CAPÍTULO 5 estudia las series de Fourier y sus propiedades. También contiene la descripción del método de separación de variables, utilizando las series de Fourier, que es indispensable para el estudio de las ecuaciones de ondas, del calor y la ecuación de Laplace.

El CAPÍTULO 6 comienza con el método de autofunciones, para a continuación desarrollar un método de resolución para resolver ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas. Un estudio profundo de este método conduce a definir lo que se entiende por un problema de Sturm-Liouville. Al intentar resolver los problemas de Sturm-Liouville surge de manera natural una sucesión de funciones ortonormales entre sí, que constituye una generalización de las series de Fourier. Se estudian las propiedades de estos sistemas de autofunciones y se aplica este estudio a resolver más ecuaciones en derivadas parciales.

La referencia principal del programa de la asignatura es [40]. Aunque en lo sucesivo mencionaremos otras referencias, [40] desarrolla los contenidos de la asignatura convenientemente.

## Índice del programa

**Capítulo 1** Funciones de variable compleja.

- 1.1. Introducción y preliminares.
- 1.2. Funciones holomorfas.
- 1.3. Las funciones exponencial, trigonométricas y logaritmo complejos.
- 1.4. Singularidades aisladas. Series de Laurent. Cálculo de residuos.
- 1.5. Integración en el plano complejo.
- 1.6. El Teorema de los Residuos y su aplicación al cálculo de integrales.

**Capítulo 2** Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Fourier.

- 2.1. Transformada de Fourier y primeras propiedades.
- 2.2. Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita.
- 2.3. Convolución de funciones.
- 2.4. Transformadas de Fourier en senos y cosenos.

**Capítulo 3** Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Laplace.

- 3.1. Primeras propiedades.
- 3.2. La fórmula de inversión de Laplace.
- 3.3. Las ecuaciones integrales de Volterra.
- 3.4. La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales.

**Capítulo 4** Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias.

- 4.1. Soluciones mediante series alrededor de un punto regular.
- 4.2. Soluciones mediante series alrededor de un punto singular-regular.
- 4.3. Funciones de Bessel.

**Capítulo 5** Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de Fourier.

- 5.1. Primeras propiedades de las series de Fourier.
- 5.2. Resolución de la ecuación del calor mediante el método de separación de variables.
- 5.3. Resolución de la ecuación de ondas.
- 5.4. La ecuación de Laplace para un rectángulo.
- 5.5. El problema de Dirichlet para un disco.

**Capítulo 6** Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones.

- 6.1. Introducción al método de autofunciones.
- 6.2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos. Autovalores y autofunciones.
- 6.3. Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos.
- 6.4. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones.



# 1. Funciones de variable compleja

## OBJETIVOS:

Estudiar las propiedades de las funciones de una variable compleja, dirigidas al teorema de los residuos y su aplicación al cálculo de integrales impropias.

Desde el punto de vista técnico, la creación del siglo XIX más importante fue la teoría de funciones de una variable compleja. Esta nueva rama de las matemáticas dominó el siglo XIX casi tanto como las expresiones directas del cálculo habían dominado el siglo XVIII.

Los números complejos surgieron cuando Cardano (1501–1576), al intentar resolver la ecuación de orden 3, observó que era necesario introducir números cuyos cuadrados fuesen negativos. A los números que están formados por sumas de aquéllos y reales se les llamó imaginarios (en contraposición a reales). En su ensayo sobre hidromecánica *Ensayo sobre una nueva teoría de la resistencia de los fluidos* (1752), D'Alembert considera el movimiento de un cuerpo a través de un fluido homogéneo, ideal, carente de peso y en este estudio busca encontrar dos funciones  $p$  y  $q$  que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$p_x = q_y, \quad q_x = -p_y,$$

es decir  $p$  y  $q$  son la parte real e imaginaria de una función compleja. Euler mostró cómo usar funciones complejas para evaluar integrales reales. En la famosa *Théorie analytique des probabilités* (1812) Laplace pasa de integrales reales a complejas tal como lo hizo Euler. La obra de Euler, D'Alembert y Laplace constituyó un progreso, sin embargo ellos dependían de la separación de la parte real e imaginaria de  $f(x + iy)$  para llevar a cabo su trabajo. La función compleja no era aún la entidad básica.

El siguiente paso fundamental lo dio Gauss al describir geométricamente un número complejo (aunque hubo unos antecedentes debidos a Argand y a Wessel) y al introducir el término complejo frente a imaginario. En una carta a Bessel en 1811 pregunta *¿qué se debería interpretar por  $\int f(x) dx$  cuando uno de los límites es complejo?* Más adelante escribe:

Si los límites son 0 y  $a+bi$ , se debería ir con un paso continuo desde 0 hasta  $a+bi$ , pero este paso tiene lugar en una curva y es por tanto posible ir sobre muchas trayectorias. Afirmo ahora que  $\int f(x) dx$  tiene un valor único aún tomada sobre varias trayectorias siempre que  $f(x)$  tome un único valor y no se haga infinita en el espacio comprendido entre las dos curvas.

Poisson discutió en un ensayo publicado en 1820 el uso de las integrales de funciones complejas tomadas sobre trayectorias en el plano complejo. Como ejemplo proporciona

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}.$$

## 1. Funciones de variable compleja

---

Aquí pone  $x = e^{i\theta}$ , donde  $\theta$  va desde  $(2n + 1)\pi$  a  $0$  y obtiene el valor de  $-(2n + 1)\pi i$ . Más adelante nota que el valor de la integral no tiene que ser el mismo cuando es tomada sobre una trayectoria imaginaria o real. Menciona el ejemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2 + x^2} dx,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. Hace  $x = t + ik$ , con  $k > 0$ , y obtiene valores diferentes según  $k$ .

A pesar de que Gauss y Poisson hicieron avances significativos, la teoría de funciones complejas se considera fundada por Cauchy quien desarrolló la teoría hasta dejarla básicamente tal como la conocemos hoy día. En un principio desarrolla la derivación compleja para a continuación demostrar en 1822 de manera rigurosa lo afirmado por Gauss. En 1825 Cauchy es más claro aún acerca de una idea ya aparecida en 1814 como una nota a pie de página: Considera  $\int f(z) dz$  cuando la curva rodea a un punto donde  $f$  no es holomorfa y define el residuo de la función para a continuación, enunciar y demostrar lo que hoy conocemos por el teorema de los residuos. Cauchy desarrolla todos estos puntos para evaluar integrales reales. Más tarde, en 1831, enuncia que toda función holomorfa en un punto admite desarrollo de Taylor alrededor de este punto. En la prueba del teorema, primero demuestra la denominada fórmula integral de Cauchy. Como consecuencia de esta fórmula también dice que una función holomorfa es infinitamente diferenciable.

### 1.1. Introducción y preliminares

Esta sección introduce algunos conceptos que deben ser previos a la teoría de las funciones de variable compleja. Comenzamos definiendo el **valor adherente** de una sucesión real y basándonos en este concepto definimos el **límite superior** y el **inferior**. Subrayamos la doble importancia de estos límites:

- Existencia (si consideramos la recta real ampliada).
- Si ambos límites coinciden, entonces el usual existe y su valor es el mismo.

Suponemos que el alumno está familiarizado con las propiedades básicas de los números complejos, pese a ello las recordamos: representación geométrica (cartesiana y polar), identificación con  $\mathbb{R}^2$ , parte real e imaginaria, conjugación y módulo.

El módulo dota a  $\mathbb{C}$  de una topología que es exactamente la misma que la estudiada en la asignatura de cálculo infinitesimal. En particular, hablamos de la convergencia en el plano complejo. Hacemos especial hincapié en la convergencia de series numéricas, que ahora ampliamos al campo complejo. Demostramos que

- si  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .
- si  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge absolutamente, entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge.

Definimos la convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones y enunciamos el criterio de mayoración de Weierstrass y los dos siguientes resultados: Si  $(f_n)_{n=1}^{\infty} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

son continuas y convergen uniformemente en  $[a, b]$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  es continua en  $[a, b]$  y  $\int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int_a^b f_n(x) dx)$ .

La mayor parte de este capítulo está bien tratada en [3], debiendo señalarse que, al ser éste un texto de variable real, se debe de tener cuidado en los enunciados de los teoremas, pero éstos se pueden adaptar perfectamente al caso complejo. Otro libro interesante es [65], que tiene dos capítulos dedicados a las funciones de variable compleja, pese a ser otro texto de variable real.

## 1.2. Funciones holomorfas

Estamos interesados en definir el concepto de función holomorfa, que corresponde a la idea análoga de función diferenciable. Recuérdese que como podemos dividir números complejos, el cociente diferencial de una función de valores complejos tiene sentido, lo que no ocurre con las funciones de varias variables. Como el concepto que intentamos definir es de índole local, definimos los **discos, abiertos y cerrados** en el plano complejo.

Hacemos la siguiente definición. Una función  $f$  es **holomorfa** en un punto  $z_0$  si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Este límite, cuando existe, lo denotamos  $f'(z_0)$ .

A continuación enunciamos las propiedades inmediatas de las funciones holomorfas:

- Si  $f$  es holomorfa en  $z_0$ , entonces  $f$  es continua en  $z_0$ .
- Si  $f, g$  son holomorfas en  $z_0$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , entonces  $\lambda f + \mu g$  es holomorfa en  $z_0$  y  $(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0)$ .
- Si  $f, g$  son holomorfas en  $z_0$ , entonces  $fg$  es holomorfa en  $z_0$  y  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ .
- Si  $f, g$  son holomorfas en  $z_0$  y  $g(z_0) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es holomorfa en  $z_0$  y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

- Si  $f$  es holomorfa en  $z_0$  y  $g$  es holomorfa en  $f(z_0)$ , entonces  $g \circ f$  es holomorfa en  $z_0$  y  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

Decimos que las demostraciones de estas propiedades se pueden encontrar en cualquier texto de cálculo de una variable real.

Sin embargo es conveniente recalcar que las funciones holomorfas no son las mismas que las funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^2$ . Presentamos el siguiente ejemplo fácil de desarrollar: la conjugación compleja. Si identificamos  $x + iy$  con  $(x, y)$ , este ejemplo proporciona

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & f(z) &= \bar{z}, \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(x, y) &= (x, -y). \end{aligned}$$

## 1. Funciones de variable compleja

---

Es claro que la función considerada de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  es diferenciable; pero es fácil probar que no es holomorfa. Éste es un buen momento para introducir las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**: Sean  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $z = x + iy \in \Omega$ . Entonces las dos siguientes afirmaciones equivalen:

- a)  $f$  es holomorfa en  $z$ .
- b) El campo vectorial  $(\operatorname{Re}f, \operatorname{Im}f)$  es diferenciable en  $(x, y)$  y

$$\frac{\partial(\operatorname{Re}f)}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Im}f)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\operatorname{Re}f)}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im}f)}{\partial x}.$$

En este caso se tiene

$$f'(z) = \frac{\partial(\operatorname{Re}f)}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial(\operatorname{Im}f)}{\partial y}(x, y).$$

Sólo demostramos la implicación a)  $\Rightarrow$  b). Dos consecuencias triviales son: la parte real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas y que si  $f$  toma valores reales y  $\Omega$  es conexo, entonces  $f$  es constante.

De momento sólo disponemos como ejemplos de funciones holomorfas los polinomios y las funciones racionales. ¿De dónde provienen más ejemplos? La respuesta es de las series de potencias.

En un primer lugar enunciamos (sin demostrar) la **fórmula de Cauchy-Hadamard**, que demuestra que las series de potencias convergen en discos abiertos y permite calcular el radio de éstos. Lo que ocurre sobre la frontera del disco de convergencia es una cuestión mucho más delicada. No entramos a considerar esta relación, sino que nos limitamos a dar los ejemplos

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

A continuación señalamos (pero no demostramos) las relaciones fundamentales entre las funciones holomorfas y las series de potencias:

- Una serie de potencias es una función holomorfa en su disco de convergencia y se puede derivar término a término. Como consecuencia una serie de potencias es una función infinitamente derivable en el disco de convergencia.
- Una función holomorfa en un punto admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de este punto. Como consecuencia, las funciones holomorfas son infinitamente derivables en un punto.
- El desarrollo en serie de potencias es único y coincide con el desarrollo en serie de Taylor.

Creemos conveniente explicar los dos ejemplos siguientes en los cuales la variable compleja puede ayudar a comprender mejor el comportamiento de las funciones reales:

La serie de Taylor de  $e^x$  es tan satisfactoria como se quiera; converge para todo  $\mathbb{R}$  y se puede derivar término a término. Pero la serie de Taylor de  $f(x) = 1/(1+x^2)$  es más difícil de entender, función infinitamente derivable y acotada. La serie de Taylor de  $f$  es  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ . Si  $|x| \geq 1$  la serie de Taylor no converge. ¿Por qué? La respuesta nos

viene encima si consideramos la función compleja  $f(z) = 1/(1 + z^2)$ . Su serie de Taylor es la misma (cambiando  $x$  por  $z$ ), su radio de convergencia es 1. No es accidental que este disco no contenga los puntos  $i, -i$ , en los cuales  $f$  no está definida. Si la serie de Taylor tuviera radio de convergencia mayor que 1, la función que define, sería continua en todo este disco, en particular en  $i$  y en  $-i$ , lo cual es imposible.

El uso de los números complejos también arroja alguna luz sobre el extraño comportamiento de la función real

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Para que  $f$  sea continua en 0 definimos  $f(0) = 0$ . Aunque no hemos definido aún la exponencial compleja, es de esperar que se cumpla si  $y$  es real y distinto de 0, entonces

$$f(iy) = \exp\left(-\frac{1}{(iy)^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

El hecho interesante de esta expresión es que se hace infinitamente grande cuando  $y$  se hace pequeño. Así,  $f$  no será ni siquiera continua en 0, cuando se defina la exponencial para números complejos, luego no debe sorprender que la serie de Taylor de  $f$  sólo converja en 0.

También creemos conveniente, para destacar que las propiedades de la variable real no tienen por qué cumplirse en la variable compleja, enunciar (sin demostrar) el teorema de Liouville: Las únicas funciones holomorfas acotadas en todo el plano complejo son las constantes.

Este apartado acaba enunciando el siguiente teorema: Si  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  son funciones holomorfas definidas en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  y para todo conjunto cerrado y acotado  $\Delta \subset \Omega$  la sucesión  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente en  $\Delta$ , entonces la función límite  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $f'$ .

No demostramos este resultado (es consecuencia del teorema de Morera). Tres libros útiles para completar la bibliografía son [14, 19, 39].

### 1.3. La exponencial y el logaritmo complejo

Definimos las funciones exponenciales, trigonométricas y logaritmo complejos pues necesitaremos integrar funciones sobre curvas en  $\mathbb{C}$  que no tienen por qué yacer en  $\mathbb{R}$ ; pero interesa que coincidan con las funciones reales respectivas cuando se evalúan en  $\mathbb{R}$ .

Definimos la **función exponencial** como

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Se pueden comprobar fácilmente las siguientes propiedades (se pueden poner como ejercicios):

- a)  $\exp(z)$  está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- b)  $\exp$  es derivable en todo  $\mathbb{C}$  y  $\exp'(z) = \exp(z)$ .
- c)  $\exp(z) \exp(w) = \exp(z + w)$  para todos  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- d)  $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

## 1. Funciones de variable compleja

---

- e)  $\exp(a + i b) = e^a(\cos b + i \sin b)$  para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  (de aquí se deduce  $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ ).
- f)  $\exp(z) = 1$  si y sólo si  $z = 2k\pi i$ , para  $k$  entero.

A continuación definimos las **funciones trigonométricas complejas**. Para hacer más intuitiva la definición y fácil su manejo (se pueden definir como series de potencias, pero esto complica la demostración de sus propiedades), observamos que si en la penúltima de las propiedades de la exponencial, hallamos  $\exp(i b)$ ,  $\exp(-i b)$ , para  $b$  real tenemos

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}; \quad \sin b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.$$

Estas dos fórmulas se pueden extender al plano complejo y definimos para  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (1.1)$$

Se enuncia que  $\cos$  y  $\sin$  son holomorfas en  $\mathbb{C}$  (la demostración es trivial por (1.1)) y se hallan sus series de potencias. Vemos que las funciones trigonométricas no están acotadas en  $\mathbb{C}$  (a diferencia de lo que pasa en  $\mathbb{R}$ ). Este hecho se puede deducir del teorema de Liouville o directamente desarrollando las expresiones  $\sin(ix)$ ,  $\cos(ix)$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Es preferible, a nuestro juicio, esto último pues el alumno ve más claramente el hecho utilizando herramientas sencillas sin recurrir a teoremas poderosos.

Motivados por las definiciones en  $\mathbb{R}$  de las funciones trigonométricas hiperbólicas, se definen las **funciones trigonométricas hiperbólicas complejas**.

La siguiente función que definimos es el **logaritmo complejo**. Su definición es un poco artificial y hemos de introducir previamente la definición de la función **argumento complejo**. Para hacerla más natural introducimos el siguiente razonamiento no riguroso: Si  $w = \log(z)$  entonces  $e^w = z$ . Si tomamos módulos,  $e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|$ , es decir,  $\operatorname{Re}(w) = \log|z|$ . Por otra parte, como  $z = e^{\operatorname{Re}(w)}e^{i\operatorname{Im}(w)}$ , conseguimos  $e^{i\operatorname{Im}(w)} = z/|z|$ . En resumen, si queremos que  $w$  sea un logaritmo razonable de  $z$  estamos obligados a

$$\operatorname{Re}(w) = \log|z|; \quad \exp(i\operatorname{Im}(w)) = \frac{z}{|z|}.$$

Hacemos reflexionar al alumno que con la parte real no hay ningún problema; sin embargo explicamos la idea geométrica de  $z/|z|$  y lo que debe cumplir la parte imaginaria de  $w$ . Estas consideraciones nos llevan a definir de manera rigurosa un **argumento** de un número complejo  $z \neq 0$  como un número real  $\alpha$  tal que

$$e^{i\alpha} = \frac{z}{|z|}.$$

Señalamos que un número complejo tiene infinitos argumentos; pero éstos distan como mínimo  $2\pi$ . Por lo que podemos definir el **argumento principal** de  $z \neq 0$  (denotado  $\operatorname{Arg}(z)$ ) como el argumento de  $z$  que está en  $]-\pi, \pi]$  y el **argumento sub-pi** (denotado  $\operatorname{Arg}_\pi(z)$ ) como el argumento de  $z$  que está en  $]0, 2\pi]$ . Explicamos la principal dificultad de los argumentos: no son continuos, explícitamente  $\operatorname{Arg}$  sólo es continuo en  $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$  y  $\operatorname{Arg}_\pi$  sólo es continuo en  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ .

Ahora la tarea de definir el logaritmo complejo es fácil. Surge una dificultad que tenemos que ser capaces de que el alumno la entienda, como hemos obtenido diferentes tipos de argumentos de números complejos, obtenemos diferentes tipos de logaritmos:

$$\begin{aligned}\log(z) &= \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad ; \quad \text{Logaritmo principal,} \\ \log_\pi(z) &= \log|z| + i \operatorname{Arg}_\pi(z) \quad ; \quad \text{Logaritmo sub-pi.}\end{aligned}$$

Señalamos que los logaritmos son holomorfos donde sus respectivos argumentos son continuos y su derivada es  $1/z$ . Además, si  $|z| < 1$  entonces  $\log(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + \dots$ . Es importante explicar que la propiedad

$$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

sólo es cierta si  $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \in ] -\pi, \pi ]$ . Análogamente para  $\log_\pi$ .

Una aplicación directa de los logaritmos complejos es evaluar  $z^\alpha$  para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ . Esta aplicación la dejamos para más tarde al evaluar integrales de funciones irracionales porque introducirla ahora es bastante artificial; pese a que el lugar apropiado desde el punto de vista lógico sería ahora.

Como bibliografía aparte de [40] son útiles [39, 69].

## 1.4. Integración en el plano complejo

En esta sección introducimos y desarrollamos el concepto de integral de una función compleja sobre una curva, que es la base del teorema de los residuos. Al principio definimos lo que son los **caminos** (diferenciables a trozos) y **circuitos**. Como ejemplos damos los segmentos y las circunferencias. También definimos el **camino opuesto** y la **yuxtaposición de caminos**.

Decimos que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **integrable** en  $[a, b]$  si la parte real e imaginaria de  $f$  son integrables en  $[a, b]$ . En este caso, definimos la **integral** de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Enunciamos sin demostrar que si  $f, |f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  son integrables, entonces  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ .

A continuación definimos la integral sobre un camino en el plano complejo. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es un camino y  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, definimos la **integral** de  $f$  sobre  $\gamma$  como

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Establecemos las propiedades inmediatas de la integración compleja, todas de muy fácil demostración. Nos detenemos un poco más en la siguiente:

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \sup\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\},$$

## 1. Funciones de variable compleja

---

siendo  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  la **longitud de la curva**  $\gamma$ . Señalamos que  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$  no tiene ni siquiera sentido en  $\mathbb{C}$ , puesto que el miembro derecho es un número complejo y  $\mathbb{C}$  no tiene orden.

También enunciamos el teorema integral de Cauchy. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, en donde  $\Omega$  es un abierto simplemente conexo, entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  para cualquier circuito  $\gamma$  contenido en  $\Omega$ . La demostración es muy fácil (la hacemos en clase) si se usan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el teorema de Green.

Terminamos la sección enunciando los siguientes lemas que se usarán en lo que sigue.

- a) Sea  $S = \{re^{it} : 0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq \pi, r > 0\}$  un sector,  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  continua tal que  $|f(z)| \rightarrow 0$  cuando  $|z| \rightarrow 0$  y sean  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $m > 0$ . Entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0.$$

- b) Existe un lema análogo cuando  $S$  es un sector contenido en el semiplano  $\text{Im}z \leq 0$  y  $m < 0$ .

- c) Sea  $f$  una función continua en el sector  $0 < |z - a| < r$ ,  $0 < \arg_{\pi}(z - a) \leq \alpha$ , (donde  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ) y supongamos que  $(z - a)f(z) \rightarrow A$  cuando  $z \rightarrow a$ . Si  $\gamma_{\varepsilon}$  es el arco de circunferencia  $|z - a| = \varepsilon$  contenido en el sector dado y recorrido en sentido positivo, entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz = iA\alpha.$$

- d) Si  $f$  es continua en el recinto  $|z| > R_0$ ,  $0 \leq \text{Arg}_{\pi}(z) \leq \alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ) y si  $|zf(z)| \rightarrow 0$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , entonces si  $\gamma_R$  es un arco de circunferencia de  $|z| = R$  contenido en el recinto dado se verifica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Es fundamental demostrar estos lemas para que el alumno se vaya familiarizando con este tipo de técnicas. En este momento no presentamos ningún ejemplo porque creemos mucho más oportuno esperar al teorema de los residuos.

### 1.5. Singularidades aisladas, series de Laurent y cálculo de residuos

La integración de funciones complejas sobre un circuito depende, como ya intuyó Gauss, fundamentalmente de los puntos situados en el interior de la región limitada por el circuito y en los cuales la función no es holomorfa. Este hecho se precisará más adelante, en donde se discutirá el significado de los puntos donde la función que hay que integrar no es holomorfa.

Definimos lo que es una **singularidad aislada**, dando ejemplos. Para aclarar la situación expresamos claramente que las funciones logaritmo no poseen una singularidad aislada donde no son holomorfas. Este ejemplo del logaritmo pretende hacer ver al alumno que no es lo mismo “no holomorfía” que singularidad aislada. Es más, un punto de singularidad aislada puede ser de holomorfía, damos el ejemplo de  $f(z) = \text{sen } z/z$  en el origen.

A continuación enunciamos el teorema del desarrollo en serie de Laurent, que permite clasificar las singularidades aisladas. Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y sea  $z_0 \in \Omega$ . Entonces si  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, existe  $r > 0$  tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (1.2)$$

para todo  $z$  tal que  $0 < |z - z_0| < r$ , donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

y  $\gamma$  es cualquier circunferencia centrada en  $z_0$  de radio menor que  $r$  y orientada positivamente.

Por motivos de tiempo omitimos la demostración de este teorema (se puede encontrar en [19]). La convergencia de (1.2) es sobre los cerrados y acotados de  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ . No damos ejemplos de calcular los coeficientes del desarrollo de Laurent, debido a que sólo el coeficiente de  $1/(z - z_0)$  es el que interesa.

En base al desarrollo de Laurent clasificamos las singularidades aisladas: **evitables, polos de orden  $k$  y singularidades esenciales**.

El concepto más importante de la sección es el de **residuo** de una función en un punto  $z_0$ : es el coeficiente de  $1/(z - z_0)$  en (1.2), denotado por  $\text{Res}(f, z_0)$ .

Debido a que saber hallar el residuo es fundamental para el cálculo de integrales, hecho que es preciso comentar a los alumnos, se da a continuación un fórmula para calcular el residuo de las funciones de la forma  $f/g$  y que la singularidad anula a  $f$  y a  $g$ . Proporcionamos un método que dividimos en dos partes:

1. Averiguar el orden del polo mediante el siguiente teorema (que sí probamos): Sea  $z_0$  una singularidad aislada de  $h = f/g$ , donde  $f$  y  $g$  son holomorfas en  $z_0$ . El valor  $z_0$  es una raíz de orden  $k$  de  $f$  y una raíz de orden  $k'$  de  $g$ . Entonces si

- $k \geq k'$ , entonces  $z_0$  es una singularidad evitable de  $h$ .
- $k < k'$ , entonces  $z_0$  es un polo de orden  $k' - k$  de  $h$ .

2. Si  $z_0$  es un polo de orden  $k$  de  $h$ , entonces se puede hallar el residuo de  $z_0$  mediante la fórmula:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)(z - z_0)^k] \right).$$

Hacemos un par de ejemplos sencillos.

## 1.6. El Teorema de los Residuos

Ésta es la sección más importante del capítulo en donde establecemos el teorema de los residuos y aplicamos este teorema para calcular algunas integrales reales. Presentamos ejemplos del uso de los lemas vistos antes.

Motivamos el caso más simple del teorema de los residuos con la siguiente discusión: Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  y  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Sea  $\gamma$  un circuito simple (que no se

autointersecta) contenido en  $\Omega \setminus \{z_0\}$  que rodea a  $z_0$  recorrido en sentido positivo. En primer lugar demostramos (de un modo bastante informal) que si  $\gamma_\varepsilon$  es la circunferencia de radio  $\varepsilon$  centrada en  $z_0$  entonces  $\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$  (véase la figura 1.1).

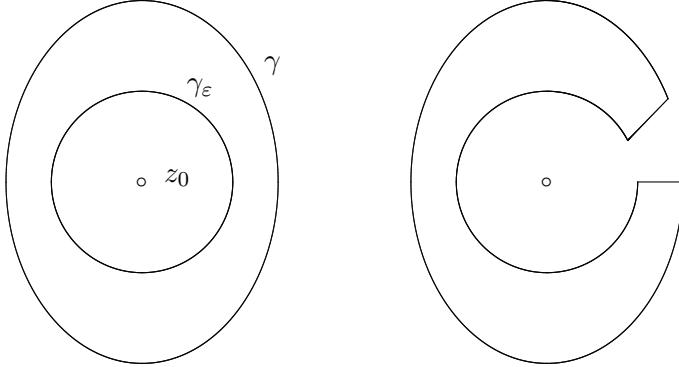


Figura 1.1.: Para demostrar que  $\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$  se considera el camino de la derecha y se hace tender el ángulo de la “abertura” a cero.

Ahora podemos usar el teorema del desarrollo de Laurent e intercambiar el sumatorio por la integral para obtener

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_\varepsilon} (z - z_0)^n dz = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varepsilon^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta. \quad (1.3)$$

Ahora es trivial deducir  $\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$ . Puede parecer sorprendente que sólo el término  $a_{-1}$  contribuya al valor  $\int_\gamma f(z) dz$ . Sin embargo, esto debe ser evidente, ya que el valor de  $\varepsilon$  es indiferente (se puede tomar cualquier circunferencia centrada en  $z_0$  contenida en  $\Omega$ ) y en (1.3), cada sumando del lado derecho es proporcional a  $\varepsilon^{n+1}$ . Podemos esperar que sólo los términos que no dependan de  $\varepsilon$  deben de contribuir al valor de  $\int_\gamma f(z) dz$ . Esto sólo ocurre cuando  $n + 1 = 0$ .

Ahora que hemos motivado el caso más simple del teorema de los residuos. Enunciamos este teorema como sigue: Sean  $\Omega$  un abierto simplemente conexo y  $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ . Si  $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y si  $\gamma$  es un circuito simple orientado positivamente contenido en  $\Omega$  y que no pasa por ninguna de las singularidades, entonces se tiene

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

Este teorema es el resultado más importante del capítulo e intentamos hacer comprender su utilidad mediante ejemplos de integrales reales.

- Si  $0 < a$  y  $0 < b$ , hállese  $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + b^2} dx$ .

Presentamos este ejemplo por varias razones. El circuito es el más simple posible (véase la figura 1.2, izquierda). Si probamos con el candidato natural  $f(z) = z \operatorname{sen}(az)/(z^2 + b^2)$ , no podemos aplicar ninguno de los lemas vistos. Debemos modificar la función:  $f(z) = z \exp(az)/(z^2 + b^2)$ . Por último la aplicación de los lemas previos es sencilla.

2. Calcúlese  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .

Si tomamos la función natural  $f(z) = \sin z/z$  no podemos aplicar ninguno de los lemas previos. Por lo que hay que tomar una parecida:  $f(z) = \exp(iz)/z$ . El origen es una singularidad aislada de  $f$ , por lo que hay que evitar el origen (véase la figura 1.2 derecha). Este ejemplo muestra el uso del lema para arcos pequeños.

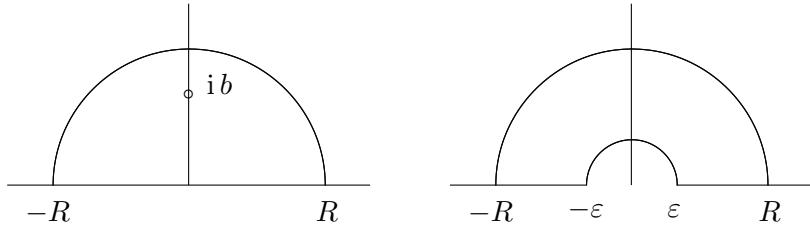


Figura 1.2.: Los circuitos de los ejemplos 1 y 2.

3. Hállese  $\int_0^\infty \exp(-t^2) \cos(2bt) dt$  para  $0 < b$ , si se sabe previamente que  $\int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$ .

Este ejemplo muestra el uso de arcos rectangulares (véase la figura 1.3 izquierda). Normalmente las integrales sobre los arcos verticales (de longitud fija) tienden a 0, mientras que las integrales sobre los tramos horizontales tienden al valor deseado. Es conveniente recordar el teorema integral de Cauchy.

4. Calcúlese  $\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{\sinh x} dx$  para  $0 < b$ .

En este ejemplo tenemos otra vez un circuito rectangular, con dos características interesantes: hemos de evitar que el circuito pase por singularidades y el tramo horizontal superior se elige porque la función  $\sinh$  es  $2\pi i$ -periódica.

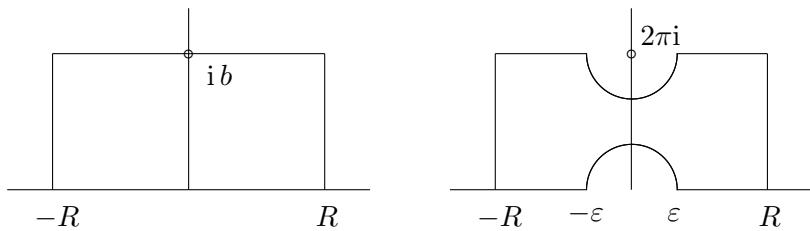


Figura 1.3.: Los circuitos de los ejemplos 3 y 4.

5. Calcúlese  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)^2}}$ .

Este ejemplo es conveniente por varias razones. En primer lugar aparece una raíz cuadrada. Hemos de recordar que esta función no es univaluada. Insistimos que  $z^\alpha$  debe ser evaluado por medio de  $\exp(\alpha \log(z))$ , y según el logaritmo que elijamos aparece una raíz u otra.

Otra característica importante del problema es que los puntos donde la función  $\log$  no es holomorfa no son singularidades aisladas, por eso el circuito (véase la figura 1.4 izquierda) evita a la semirrecta  $[0, +\infty[$ .

## 1. Funciones de variable compleja

---

6. Sean  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ ,  $\operatorname{Re}(z_j) < a$  y  $a > 0$  tales que existen constantes  $M, b, c > 0$  cumpliendo  $|f(z)| < M/|z|^c$  cuando  $|z| > b$ . Pruébese que para  $t > 0$

$$\text{V.P.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{zt} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(e^{zt} f(z), z_j).$$

Este ejemplo es interesante pues la conclusión difiere a lo realizado hasta ahora y proporciona un resultado útil para la transformada de Laplace.

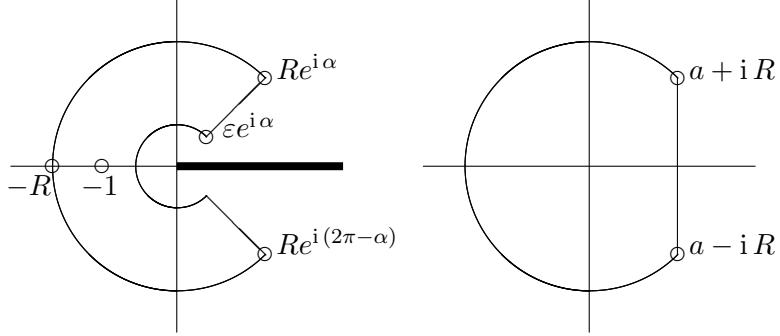


Figura 1.4.: Los circuitos de los ejemplos 5 y 6.

Recomendamos como bibliografía del tema sobre todo [40]. Para profundizar más aspectos colaterales proponemos [14, 39]. Para problemas podemos destacar [69] y para afianzar más los conceptos vistos en cursos previos [3, 65].

# Contenido del Capítulo 1

## 1. Introducción y preliminares.

- Conceptos previos: Valor adherente, límites superior e inferior. Topología en  $\mathbb{C}$ .
- Convergencia uniforme. Criterio de mayoración de Weierstrass.

## 2. Funciones holomorfas.

- Definición de función holomorfa. Propiedades elementales de las funciones holomorfas.
- La propiedad de holomorfía en  $\mathbb{C}$  no equivale a la diferenciabilidad en  $\mathbb{R}^2$ . Ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- Fórmula de Cauchy-Hadamard. Propiedades de las funciones holomorfas y de las series de potencias.
- Teoremas de Liouville y de Weierstrass.

## 3. Las funciones exponencial, trigonométricas y logaritmo complejos.

- Función exponencial. Propiedades.
- Funciones trigonométricas. Propiedades. Funciones trigonométricas hiperbólicas.
- Argumento complejo (principal, sub-pi).
- Logaritmo complejo (principal, sub-pi). Propiedades.

## 4. Singularidades aisladas. Series de Laurent. Cálculo de residuos.

- Singularidades aisladas. Ejemplos.
- Teorema del desarrollo en serie de Laurent. Clasificación de las singularidades.
- Residuos. Cálculo práctico del residuo.

## 5. Integración en el plano complejo.

- Definición de caminos y circuitos. Integración compleja. Propiedades.
- Lemas de la integración compleja.

## 6. El Teorema de los Residuos y su aplicación al cálculo de integrales.

- Teorema de los Residuos.
- Ejemplos de integrales reales resueltas por medio del teorema de los residuos.

## 1. Funciones de variable compleja

## 2. La transformada de Fourier

### OBJETIVOS:

Estudiar las propiedades más importantes de las transformadas de Fourier dirigidas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Pese al éxito e impacto de las series de Fourier<sup>1</sup> como soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, uno de los mayores problemas del siglo XIX fue hallar soluciones de estas ecuaciones en forma explícita, esto es, en términos de las funciones elementales e integrales de las funciones que aparecen como datos en tales ecuaciones.

El método más significativo para resolver ecuaciones en derivadas parciales en forma explícita fue el de la integral de Fourier. La idea se debe a Fourier, Cauchy y Poisson. Es imposible asignar prioridad a este descubrimiento, pues todos presentaron ensayos orales en la Academia de Ciencias en París que no fueron publicados sino hasta algún tiempo después. Pero cada uno escuchó los ensayos de los otros, y resulta imposible aseverar, a partir de las publicaciones, lo que cada uno de ellos tomó de las versiones orales de los restantes. La idea inicial fue tomar la serie de Fourier de una función  $2p$ -periódica y hacer tender  $p$  a  $\infty$ . Los tres matemáticos mencionados no se preocuparon de pasos hoy en día discutibles (intercambio de límites, de sumatorios por integrales,...).

### 2.1. Transformada de Fourier y primeras propiedades

Definimos lo que es una función **absolutamente integrable**, ya que sólo a estas funciones se les puede aplicar la transformada de Fourier. Ahora definimos la **transformada de Fourier** de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente integrable como una función  $\mathcal{F}[f]$  de variable real  $\omega$ , dada por

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Observamos que la definición está bien hecha (la integral converge) debido a que  $f$  es absolutamente integrable. Como ejemplos calculamos las transformadas de  $e^{-|x|}$ ,  $e^{-x^2}$ ,  $\chi_{[-1,1]}$ . El segundo ejemplo muestra la necesidad de utilizar circuitos de variable compleja.

Enunciamos las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:

- Linealidad.

---

<sup>1</sup>Históricamente las series de Fourier aparecieron antes que la transformada de Fourier.

## 2. La transformada de Fourier

---

b) Si  $f$  y  $f'$  son absolutamente integrables, entonces

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega).$$

c) Si  $f$ ,  $f'$  y  $f''$  son absolutamente integrables, entonces

$$\mathcal{F}[f''](\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}[f](\omega).$$

d) Si  $f^{(k)}$  son absolutamente integrables para  $k = 0, 1, \dots, n$ , entonces

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega).$$

e) Si  $f$  es absolutamente integrable y si definimos  $g(x) = f(ax)$  para  $a > 0$ , entonces

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{a} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

f) Si  $f$  es absolutamente integrable y si definimos  $g(x) = f(x - a)$  para  $a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) e^{-ia\omega}.$$

Estas propiedades son de fácil demostración. De una manera bastante imprecisa, decimos que de la propiedad d) se deduce que cuantos más grados de derivabilidad posea una función, su transformada tiende más rápidamente a 0 cuando  $\omega$  tiende a infinito.

También decimos que si  $f$  es absolutamente integrable entonces  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}[f](\omega) = 0$  (no lo demostramos aunque se deduce del lema de Riemann-Lebesgue) y que  $\mathcal{F}[f]$  es continua (de hecho es uniformemente continua).

Explicamos la necesidad de acudir a tablas de integrales que permiten hallar transformadas y antitransformadas de funciones parecidas que aparecen en dichas tablas (aconsejamos [23, 29]). Aplicamos estas propiedades para resolver los siguientes problemas sencillos sin necesidad de calcular integrales.

a) Hallar la transformada de  $f(x) = \exp(-ax^2)$  para  $a > 0$ .

b) Hallar la antitransformada de  $F(\omega) = \exp(-\omega^2)$ .

Una utilidad de la transformada de Fourier es convertir un problema complicado en otro más simple. Es importante notar que una vez resuelto el problema más sencillo hay que obtener la solución del problema original. Esto se logra mediante la transformación inversa.

Señalamos que la transformada de Fourier de dos funciones que difieren en un número finito de puntos coinciden. Esto explica claramente que no se puede definir  $\mathcal{F}^{-1}$  de una manera puramente formal. Otra dificultad es que aunque  $f$  sea absolutamente integrable, es posible que  $\mathcal{F}[f]$  no lo sea, por ejemplo la función  $\chi_{[-1,1]}$  claramente es absolutamente integrable y sin embargo se puede probar (no lo hacemos) que  $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}}$  no es absolutamente integrable.

Enunciamos la **fórmula de inversión de Fourier**<sup>2</sup>: Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente integrable tal que  $f'$  es continua a trozos, entonces para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Señalamos dos hechos que suelen aparecer en la práctica: Si  $f$  es continua en  $x$ , entonces el miembro izquierdo se reduce a  $f(x)$ . Si  $\mathcal{F}[f]$  es absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces se puede suprimir el símbolo de valor principal.

Hemos seguido [40], pero también se pueden consultar [20, 72].

## 2.2. Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita

Sea  $u(x, t)$  la temperatura de una varilla infinita en el punto  $x$  y en el tiempo  $t$ . Supondremos que la temperatura inicial de la varilla es  $f(x) = \exp(-x^2)$ . La ecuación del calor se puede modelar por medio del problema

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= \exp(-x^2), & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Más adelante se resolverá el caso general donde  $\exp(-x^2)$  se reemplaza por una función absolutamente integrable  $f(x)$ .

Se fija una variable (en este caso  $t$ ) y se considera la otra variable activa. La variable activa tiene que estar en todo  $\mathbb{R}$  pues si no, no tendría sentido la transformada de  $u(x, t)$ . La función  $\exp(-x^2)$  tiene que ser absolutamente integrable, ya que si no, no se le podría aplicar la transformada de Fourier. Mediante este ejemplo se explica el método usual: Supongamos que para cada  $t > 0$  fijo la función  $x \mapsto u(x, t)$  es absolutamente integrable y sea  $U(t)(\omega) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega)$ .

1. Transformar todos los miembros del problema original para obtener un problema de valor inicial. En este caso, tras aplicar de modo informal la regla de Leibniz para integrales impropias<sup>3</sup>.

$$-\alpha^2 \omega^2 U(t)(\omega) = \frac{d}{dt} [U(t)(\omega)], \quad t > 0,$$

$$U(0)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\omega^2/4).$$

2. Resolver el problema de valor inicial. Obtenemos en este ejemplo

$$U(t)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t\alpha^2 \omega^2} e^{-\omega^2/4}.$$

<sup>2</sup>En realidad se puede enunciar bajo condiciones más débiles (la condición de Jordan o la de Dini), pero tal como se enuncia es suficiente para las aplicaciones de este curso.

<sup>3</sup>Sea  $f : [a, +\infty[ \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  converge puntualmente en  $]c, d[$  y si  $\int_a^\infty f_y(x, y) dx$  converge uniformemente en  $]c, d[$  entonces se cumple

$$\frac{d}{dy} \left( \int_a^\infty f(x, y) dx \right) = \int_a^\infty f_y(x, y) dx$$

para cada  $y \in ]c, d[$ .

3. Antitransformar la solución del problema fácil mediante la fórmula de inversión o el uso de tablas. En ese caso, aplicamos la fórmula de inversión y puesto que  $u$  es derivable,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(t)(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\omega^2(\alpha^2 t + 1/4)} e^{i\omega x} d\omega.$$

Observamos que la variable que conviene tomar (si fuera posible) como activa es aquella que aparece con un orden de derivación parcial mayor, ya que de este modo la ecuación diferencial ordinaria transformada es de orden menor.

Hemos de indicar que lo que estamos hallando son las soluciones absolutamente integrables del problema. Como ejemplo muy sencillo presentamos el siguiente: Si resolvemos  $f' = f$  mediante la transformada de Fourier obtenemos  $f = 0$ , lo que no es extraño, pues la única solución absolutamente integrable de  $f' = f$  es  $f = 0$ .

### 2.3. Convolución de funciones

Definimos la **convolución** de dos funciones  $f$  y  $g$  absolutamente integrables como la función representada por  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt,$$

si esta integral existe. Se pueden imponer varias condiciones sobre  $f$  y  $g$  para que  $f * g$  exista. Si alguna de las dos condiciones siguientes se cumple, entonces demostramos que la convolución está bien definida:

- a)  $f$  ó  $g$  están acotadas en  $\mathbb{R}$ .
- b)  $|f|^2$  y  $|g|^2$  son absolutamente integrables en  $\mathbb{R}$ .

La demostración de a) es fácil y se deja como ejercicio. Es interesante hacer la de b) pues se recuerda a los alumnos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales. También damos el ejemplo de las dos funciones absolutamente integrables  $f(x) = x^{-1/2}$ ,  $g(x) = (1-x)^{1/2}$ , definidas en  $]0,1[$  y fuera toman el valor 0 para ver que no basta que las funciones sean absolutamente integrables para que exista la convolución.

El motivo de introducir la convolución de dos funciones es el siguiente: Como ya hemos visto, el paso final en resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante la transformada de Fourier consiste en antitransformar una función. Si esta función se puede expresar como el producto de dos transformadas, entonces la **fórmula de convolución** proporciona una manera de hallar la antitransformada. Si  $f, g, f * g$  son absolutamente integrables y si alguna de las dos condiciones a) o b) mencionadas arriba se cumplen, entonces

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Como ejemplo de la fórmula de convolución resolvemos la ecuación del calor de una varilla infinita:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

siendo  $f$  absolutamente integrable.

Como antes seguimos los mismos pasos: Transformación del problema, resolución del problema fácil, antitransformar la solución del problema fácil. La utilización de la fórmula de convolución se hace patente en este ejemplo puesto que si  $U(t)(\omega)$  es la transformada de  $u(x, t)$  considerando  $t$  fija, entonces

$$U(t)(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}.$$

Es claro que podemos expresar  $\exp(-\alpha^2\omega^2 t)$  como  $\mathcal{F}[g](\omega)$  para cierta función  $g$  y aplicar la fórmula de convolución.

Otro ejemplo que resolvemos es la ecuación de Laplace para un semiplano

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & -\infty < x < \infty, y > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

donde  $f$  es absolutamente integrable y  $u(x, y)$  acotada.

De nuevo, los pasos son los mismos. Debemos tomar  $x$  como variable activa (pues la otra no recorre todo  $\mathbb{R}$ ). Sea, para  $y$  fijo,  $U(y)(\omega)$  la transformada de  $x \mapsto u(x, y)$ . Aquí la dificultad del problema estriba en que al transformar el problema se obtiene

$$\frac{d^2U}{dy^2} - \omega^2 U = 0, \quad U(0)(\omega) = F(\omega),$$

en donde  $F = \mathcal{F}[f]$ . La solución de este problema de valor inicial es

$$U(y)(\omega) = C_1(\omega)e^{\omega y} + C_2(\omega)e^{-\omega y}, \quad C_1(\omega) + C_2(\omega) = F(\omega).$$

Pero, como  $u$  está acotada, entonces  $U$  también está acotada, y de las soluciones anteriores hay que tomar sólo

$$U(y)(\omega) = F(\omega)e^{-y|\omega|}.$$

Ahora acabar el problema es fácil si se aplica la fórmula de convolución, obteniendo la **fórmula de Poisson**:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Otro ejemplo es el cálculo de

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega^2}}{1 + \omega^2} \cos \omega x d\omega$$

para  $x > 0$ .

Mediante una manipulación sencilla logramos convertir la integral, como un múltiplo de la antitransformada de  $F(\omega) = e^{-\omega^2}/(1 + \omega^2)$ , con lo que es evidente el uso de la fórmula de convolución.

A parte de los libros mencionados en la sección anterior se pueden consultar [25, 73] para problemas.

## 2.4. Transformadas de Fourier en senos y cosenos

Una de las desventajas de la transformada de Fourier es que la función que hay que transformar tiene que estar definida en todo  $\mathbb{R}$ . En muchas aplicaciones nos encontramos que las funciones sólo están definidas en  $[0, +\infty]$ . Para salvar esta dificultad se definen las **transformadas de Fourier en senos y cosenos**. Si  $f$  es absolutamente integrable en  $[0, +\infty[$  la transformada de Fourier en senos,  $\mathcal{F}_s[f]$ , y la transformada de Fourier en cosenos  $\mathcal{F}_c[f]$  son dos funciones definidas en  $[0, +\infty[$  dadas por

$$\mathcal{F}_s[f](\omega) = \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\omega x) dx, \quad \mathcal{F}_c[f](\omega) = \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) dx.$$

Enunciamos a continuación las propiedades más importantes de estas transformadas:

- a) Linealidad.
- b) Si  $f$  y  $f'$  son absolutamente integrables en  $[0, +\infty[$ , entonces

$$\mathcal{F}_s[f'](\omega) = -\omega \mathcal{F}_c[f](\omega), \quad \mathcal{F}_c[f'](\omega) = f(0) + \omega \mathcal{F}_s[f](\omega).$$

- c) Si  $f$ ,  $f'$  y  $f''$  son absolutamente integrables en  $[0, +\infty[$ , entonces

$$\mathcal{F}_s[f''](\omega) = \omega f(0) - \omega^2 \mathcal{F}_s[f](\omega), \quad \mathcal{F}_c[f''](\omega) = -f'(0) - \omega^2 \mathcal{F}_c[f](\omega).$$

- d) Las fórmulas de inversión: Si  $f$  es absolutamente integrable en  $[0, +\infty[$  tal que  $f$  y  $f'$  son continuas a trozos, entonces

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_s[f](\omega) \operatorname{sen}(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](\omega) \cos(\omega x) dx.$$

Señalamos explícitamente que la propiedad de convolución no se cumple para las transformadas de senos y cosenos, aunque considerando las extensiones pares o impares (según convenga) se puede conseguir algo parecido a la fórmula de convolución.

A continuación ponemos como ejemplo dos ecuaciones en derivadas parciales que se pueden resolver mediante este tipo de transformadas. En el primero no se puede aplicar la transformada en senos pero sí la de cosenos y en el segundo problema no se puede aplicar la transformada en cosenos, pero sí la de senos. Explicamos claramente la razón de que no se pueda utilizar este tipo de transformadas.

$$\left. \begin{array}{l} u_{xx} = u_t 0 \quad x, t > 0, \\ u_x(0, t) = g(t) \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0 \quad x > 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha^2 u_{xx} = u_t 0 \quad x, t > 0, \\ u(0, t) = A \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0 \quad x > 0. \end{array} \right\}$$

El primer problema permite revisar el método de variación de parámetros para resolver una ecuación diferencial ordinaria.

## Contenido del Capítulo 2

### 1. Transformada de Fourier y primeras propiedades.

- Funciones absolutamente integrables. Transformada de Fourier. Ejemplos.
- La transformada de Fourier no es inyectiva. Fórmula de inversión.
- Propiedades de la transformada de Fourier. Ejemplos de la aplicación de estas propiedades para calcular transformadas y antittransformadas mediante el uso de tablas.

### 2. Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita.

- Condiciones necesarias para que en un problema de frontera se pueda aplicar la transformada de Fourier.
- Metodología usual.

### 3. Convolución de funciones.

- Definición de la convolución. Condiciones necesarias para que la convolución exista.
- Teorema de la convolución.
- Ejemplos de la resolución de dos ecuaciones en derivadas parciales y el cálculo de una integral paramétrica mediante la convolución.

### 4. Transformadas de Fourier en senos y cosenos.

- Definición. Propiedades elementales. Fórmulas de inversión.
- Resolución de dos ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Fourier en senos y cosenos.



# 3. La transformada de Laplace

## OBJETIVOS:

Saber las propiedades de la transformada de Laplace. Resolver ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones integrales de Volterra mediante esta transformada.

En el ensayo *Théorie analytique des probabilités*, publicado en 1812, Laplace presentó lo que ahora se llama la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes; pese a que Euler en un trabajo publicado en 1743 había resuelto este tipo de ecuaciones de otro modo. En el método de Laplace se observa que la solución general de la homogénea es una combinación lineal de  $n$  soluciones independientes. Asimismo, Laplace prueba que la solución general de la no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea más una particular. Incidentalmente, la búsqueda de la solución le llevó a hacer integraciones en el plano complejo para resolver las integrales reales que surgían.

En 1823 Poisson descubrió la fórmula de inversión para la transformada de Laplace en donde tuvo que usar un circuito complejo. Tras el éxito de la transformada de Fourier para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, se empezó a usar la transformada de Laplace para resolver este tipo de ecuaciones. Hoy en día la transformada de Laplace es una herramienta indispensable para la resolución de problemas que surgen de la física.

## 3.1. Primeras propiedades

La principal ventaja que posee la transformada de Laplace con respecto a la de Fourier es que es aplicable a una clase de funciones más amplia. Una función  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es **original** si cumple las propiedades siguientes:

- $f$  es localmente integrable y continua a trozos.
- Existen constantes  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$  y  $M > 0$  tales que  $|f(t)| \leq M e^{ts_0}$  para cualquier  $t > t_0$ .

Si  $f$  es una función original definimos la **transformada de Laplace** como

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt.$$

Es sencillo ver que la integral existe si  $\operatorname{Re}(s) > s_0$ . El menor valor  $s_0$  que verifica la condición b) se llama la **abcisa de convergencia**. Este valor proporciona una idea del mayor recinto posible donde la transformada de Laplace existe. A partir de ahora cuando se escriba  $f'(0)$  se sobreentenderá  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t)$  y de forma análoga con las derivadas superiores.

Demostramos las propiedades más importantes de la transformada de Laplace:

### 3. La transformada de Laplace

---

- a) Linealidad.
- b) Si  $f$  es original,  $b \in \mathbb{C}$  y si  $g(z) = f(z)e^{bz}$ , entonces  $\mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[f](s - b)$ .
- c) Si  $f$  es original,  $a > 0$  y si  $g(z) = f(az)$ , entonces  $\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$ .
- d) Si  $f$  es original y si  $g(z) = f(z - a)$ , entonces  $\mathcal{L}[g](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s)$  (la **propiedad de retraso**).
- e)  $\mathcal{L}[1](s) = 1/s$  para  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

En este momento podemos calcular las transformadas de  $e^{at}$ ,  $\cos t$ ,  $\sin t$ ,  $\operatorname{sh} t$  y  $\operatorname{ch} t$ .

No demostramos que si  $f$  es una función original, entonces  $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$  (véase [40]). Como corolario trivial, si una función no tiende a cero cuando  $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ , entonces esta función no puede ser la transformada de otra función.

Enunciamos y probamos las siguientes propiedades más avanzadas. Sea  $f$  una función original.

- a) Si además  $f', \dots, f^{(n)}$  son funciones originales, se tiene

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

- b) Si  $F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$  es original, entonces  $\mathcal{L}[F](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}$ .

- c) Si  $\mathcal{L}[f]$  es derivable, entonces  $\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f] = -\mathcal{L}[tf(t)]$ , o más general, si  $\mathcal{L}[f]$  tiene derivada de orden  $n$  entonces

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f] = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)].$$

Para probar esta propiedad usamos sin rigor la regla de Leibniz para integrales impropias.

- d) Si  $f$  tiene periodo  $T$ , entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Como un ejemplo de la aplicación de la propiedad a) demostramos que  $\mathcal{L}[t^n](s) = n!/s^{n+1}$ .

Enunciamos la **fórmula de convolución**: Si  $f$  y  $g$  son dos funciones originales, entonces  $f * g$  es original y se verifica

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g].$$

Notamos que la integral  $\sqrt{2\pi} f * g(t)$  se reduce a  $\int_0^t f(u)g(t-u) du$ .

Hacemos algunos problemas de antitranformar funciones relativamente sencillas. Un libro en donde vienen bastantes problemas para ir practicando es [64].

### 3.2. La Fórmula de inversión de Laplace

El siguiente resultado, que se conoce como la **fórmula de inversión**, es importante puesto que como un objetivo de la transformada de Laplace es reducir un problema de incógnita  $f$  en otro más sencillo de incógnita  $\mathcal{L}[f]$ ; una vez resuelto éste, tenemos que recuperar la función  $f$ . Naturalmente tenemos que imponer algún tipo de condiciones porque es claro que dos funciones que difieren en un número finito de valores, sus transformadas de Laplace coinciden. Su enunciado es el siguiente: Sea  $f$  una función original tal que  $f$  y  $f'$  son continuas a trozos. Si  $b > s_0$ , donde  $s_0$  es la abcisa de convergencia, entonces para  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-i b}^{a+i b} \mathcal{L}[f](s) e^{st} ds.$$

Recordamos el ejemplo 6 de la sección del teorema de los residuos (en el primer capítulo del temario de esta asignatura) que permite calcular de forma cómoda en numerosas ocasiones la antitransformada. Un caso particular que aparece en muchas ocasiones es cuando  $\mathcal{L}[f]$  es una función racional con el grado del denominador mayor que el del numerador.

También hallamos la antitransformada de  $F(s) = e^{-\sqrt{s}}/\sqrt{s}$  para  $s > 0$ . Incluimos este ejemplo por varios motivos: en primer lugar resulta complicado el uso de tablas y en segundo lugar utilizamos la fórmula de inversión de Laplace mediante el circuito de la figura 3.1 en el plano complejo, viendo otra utilidad del logaritmo complejo.

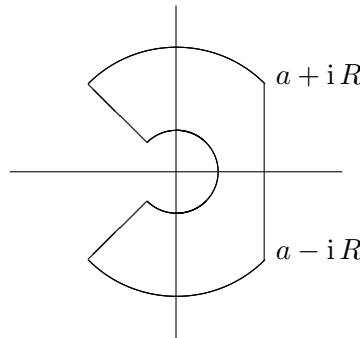


Figura 3.1.: El circuito para hallar la antitrasformada de  $e^{-\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ .

La siguiente herramienta útil para la resolución de antitransformadas es el **teorema de Efrós**: Si  $f$  es una función original y  $F(s)$  es su transformada de Laplace, entonces

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{u^2}{4t} \right) du.$$

No demostramos este teorema (la prueba se puede encontrar en [58]).

Analizamos dos ejemplos: Hallar la antitransformada de  $\exp(-\sqrt{s})/s$  y de  $\exp(-\sqrt{s})/\sqrt{s}$ . El primer ejemplo es fácil de hacer usando el teorema de Efrós. Mientras que si se intenta aplicar este teorema para el segundo ejemplo, resulta que hay que antitransformar la función  $F(s) = e^{-s}$ , que por la propiedad de retardo, hay que antitransformar la función constante 1; pero esto es imposible, puesto que la transformada de una función original debe tender a 0 cuando la parte real de su variable tiende a  $+\infty$ .

### 3.3. Las ecuaciones integrales de Volterra

El objetivo de esta sección es hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\phi(t) dt, \quad (3.1)$$

donde  $f$  y  $k$  son originales. El método es sencillo y consiste en aplicar la transformada de Laplace a (3.1) y usar la fórmula de convolución. El problema se reduce a resolver una ecuación algebraica para  $\mathcal{L}[\phi]$ .

Con esta técnica se puede resolver el problema de la tautócrona. Una cuenta se mueve sobre un alambre sin rozamiento partiendo del reposo y se desea hallar la forma que debe tener el alambre para que el tiempo que tarda la cuenta en alcanzar el punto más bajo sea constante. En primer lugar, demostramos que si la cuenta parte del punto  $(k, h)$  entonces el tiempo  $T$  que tarda en llegar al punto  $(0, 0)$  es

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-y}},$$

en donde  $ds$  es el diferencial de longitud de arco e  $y = y(x)$  es la función cuya gráfica coincide con el alambre. Si  $ds = \phi(y) dy$  para alguna función  $\phi$  (que hay que hallar), entonces hay que resolver

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\phi(y) dy}{\sqrt{h-y}},$$

donde  $T$  es una constante. Este problema se puede resolver fácilmente por medio de la transformada de Laplace, obteniendo que

$$\phi(y) = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Como

$$ds = \phi(y) dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

de las dos últimas ecuaciones se puede encontrar una ecuación diferencial para  $y = y(x)$  que nos da la forma que debe tener el alambre buscado. Este problema se ha obtenido de [64].

El resto de la sección se basa en [40]. También puede encontrarse material suplementario en [5, 74].

### 3.4. La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales

En esta sección resolvemos varias ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Laplace. El primer ejemplo es, para  $p \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{ll} u_t = -u_x & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = p & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

### 3.4. La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales

Tras forzar que sean la variable  $t$  activa y la variable  $x$  pasiva, convertimos (3.2) en el siguiente problema de valor inicial

$$sU(x) = -\frac{dU}{dx}, \quad U(0) = \frac{p}{s}, \quad (3.3)$$

donde  $U(x) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)]$ . La solución de (3.3) es

$$\mathcal{L}[u(x)](s) = \frac{p}{s} e^{-sx}.$$

Se puede hallar  $u(x, t)$  fácilmente mediante la propiedad de retardo.

La siguiente ecuación en derivadas parciales que resolvemos es

$$\left. \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0 & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

siendo  $u(x, t)$  acotada. Desarrollamos este ejemplo por varios motivos:

- Normalmente conviene elegir la variable pasiva la que aparece con menor orden de derivación; pero en este caso no conviene hacer esto.
- Necesitamos usar el hecho de que  $\mathcal{L}[u(x, \cdot)]$  es una función acotada.
- Utilizamos el teorema de Efrós.
- Expresamos las integrales que aparecen en la solución en forma de la integral tabulada erf.

A continuación resolvemos otro ejemplo, la ecuación de la cuerda vibrante de longitud  $c$  con extremos fijos, donde conocemos la posición inicial y sabemos que la velocidad inicial es nula.

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha^2 u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < c, t > 0, \\ u(x, 0) = B \operatorname{sen}(\pi x/c) & 0 \leq x \leq c, \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 < x, \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(c, t) = 0 & t \geq 0. \end{array} \right\}$$

donde  $B$  es una constante real no nula. Resolvemos esta ecuación en derivadas parciales por los siguientes motivos:

- Cuando la variable está acotada no puede tomarse como activa.
- Utilizamos el hecho de que  $\mathcal{L}[f](s) \rightarrow 0$  cuando  $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ .
- Utilizamos el ejemplo 6 de la sección 1.6.

La referencia básica de todo el tema es [40]. Para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Laplace se pueden consultar [5, 57, 74], siendo el primero especialmente indicado para observar las aplicaciones de la transformada de Laplace en electrónica.

## **Contenido del Capítulo 3**

### **1. Primeras propiedades.**

- Funciones originales. Definición de la transformada de Laplace. Propiedades elementales.
- Fórmula de convolución.

### **2. La Fórmula de inversión de Laplace.**

- Fórmula de Poisson. Ejemplos.
- Teorema de Efrós. Ejemplo.

### **3. Las ecuaciones integrales de Volterra.**

- Ejemplo de ecuación integral de Volterra.

### **4. La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales.**

- Ejemplos.

## 4. Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias

### OBJETIVOS:

Conocer el método de los coeficientes indeterminados para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en forma de series de potencias.

Conocer las funciones de Bessel.

Las series fueron consideradas en el siglo XVIII, y lo son hoy todavía, una parte esencial del cálculo infinitesimal. La única manera que tuvo Newton de manejar funciones no polinómicas era desarrollándolas en serie de potencias y derivando e integrando término a término. Los éxitos obtenidos mediante el uso de series fueron siendo más numerosos a medida que las matemáticas se desarrollaban. Las dificultades con el nuevo concepto no fueron identificadas como tales; las series eran polinomios infinitos. Por otro lado; parecía claro, como Euler y Lagrange creían, que toda función podía expresarse en forma de serie de potencias.

Sabemos que Newton y Leibniz utilizaron series para resolver ecuaciones de primer orden mediante el método de coeficientes indeterminados. En 1733 Daniel Bernouilli establece que, para una cadena de densidad uniforme en suspensión que oscila, el desplazamiento  $y(x)$  a una distancia  $x$  del extremo inferior satisface la ecuación diferencial

$$\alpha \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0.$$

Utiliza el método de coeficientes indeterminados y establece una solución que en notación moderna es  $y(x) = AJ_0(2\sqrt{x/\alpha})$ , donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden 0. Ésta es la primera vez donde se utilizan las funciones de Bessel.

Euler prosiguió el trabajo de Daniel Bernouilli en 1736 en donde plantea una ecuación de segundo orden y obtiene la solución en forma de serie. Euler utilizó este método constantemente. Podemos citar que en 1735 el único método que tenía Euler para resolver la ecuación  $y^{(iv)} = y$  era utilizando las series de potencias. En 1766 en un trabajo sobre la membrana oscilante aparece

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{\beta^2}{r^2} \right) u = 0,$$

hoy llamada ecuación de Bessel, que Euler la resolvió por medio de una serie. El primer estudio sistemático de las soluciones de esta ecuación fue hecho por Bessel (1784–1846) en 1824 mientras trabajaba en el estudio de los planetas. En 1867, Hankel (1839–1873) continuó el estudio de las ecuaciones de Bessel.

En 1769 Euler trató la ecuación

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0, \quad (4.1)$$

de la que dió la solución en serie

$$y(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots = F(a, b, c; x). \quad (4.2)$$

Hoy llamada serie hipergeométrica (término usado por Pfaff (1765–1825)) El estudio de las soluciones de (4.1) fué llevado más lejos por Gauss. Demostró de forma rigurosa la convergencia de la serie (4.2) y estableció la fórmula

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

No fue hasta a mediados del siglo XIX cuando se enfatizó en la necesidad de comprobar las operaciones no justificadas sobre series, como la derivación e integración término a término, o que toda función puede desarrollarse en serie de potencias. En la última mitad del siglo XIX se resolvió el problema de la derivación de series de funciones que culminó con el desarrollo del método de Frobenius y el teorema de Fuchs (1833–1902) sobre el comportamiento de las series de las soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

## 4.1. Soluciones mediante series alrededor de un punto regular

El objetivo de esta sección es resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad (4.3)$$

en forma de serie de potencias centrada en  $x_0$  bajo ciertas condiciones que determinaremos después.

Decimos que  $x_0$  es un punto **regular** de (4.3) si  $p(x_0) \neq 0$ . Dividiendo por  $p(x)$  tenemos que (4.3) se puede escribir como

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \quad (4.4)$$

Si  $Q(x)$  y  $R(x)$  son funciones continuas en  $x_0$ , entonces el conjunto de soluciones de (4.4) es un subespacio vectorial de dimensión 2.

Buscamos soluciones de (4.4) en forma de serie:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ . El método que presentamos consiste en forzar a que esta serie verifique la ecuación (4.4), habiendo desarrollado previamente  $R(x)$  y  $Q(x)$  en forma de serie, derivando término a término e igualando los coeficientes correspondientes por la unicidad del desarrollo de Taylor. Presentamos como ejemplo la ecuación de Ayry:  $y'' = xy$ .

Insistimos a los alumnos que la serie obtenida sólo converge en el intervalo de convergencia. Para acotar este intervalo enunciamos el siguiente teorema. Sean  $Q(x)$ ,  $R(x)$  funciones desarrollables en serie de Taylor alrededor de  $x_0$  siendo los radios de convergencia  $r_Q$  y  $r_R$ . Entonces cualquier solución de (4.4) es desarollable en serie de Taylor alrededor de  $x_0$ , cuyo radio de convergencia es mayor o igual que  $\min\{r_Q, r_R\}$ .

Finalizamos la sección resolviendo la ecuación de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy + n(n + 1)y = 0,$$

donde  $n$  es un natural. Notamos que  $x_0 = 0$  es un punto regular, que  $r_Q = r_R = 1$ ; y sin embargo, al resolver la ecuación en forma de serie obtenemos que la ecuación admite una solución polinómica de grado justamente  $n$ , por lo que converge en todo  $\mathbb{R}$ . Por lo que en el teorema, el radio de convergencia puede ser mayor que el mínimo de  $r_Q$  y  $r_R$ .

## 4.2. Soluciones mediante series alrededor de un punto singular-regular

Decimos que un punto  $x_0$  es **singular-regular** de la ecuación (4.3) si la función  $q/p$  es holomorfa o posee un polo simple en  $x_0$  y  $r/p$  es holomorfa o posee un polo simple o doble en  $x_0$ . Observamos que entonces (4.3) puede expresarse como

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad (4.5)$$

donde  $Q$  y  $R$  son holomorfas en  $x_0$ . Notamos que la ecuación de Euler-Cauchy es un caso particular (4.5).

Buscamos soluciones de la forma

$$(x - x_0)^s \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (4.6)$$

Donde  $s$  es un parámetro a priori desconocido. Nuestros objetivos son

1. Determinar los valores de  $s$  para los cuales la ecuación (4.5) admite soluciones de la forma (4.6) con radio de convergencia positivo.
2. Determinar una relación de recurrencia que permita hallar los coeficientes  $a_n$ .

Obligando que la serie (4.6) verifique (4.5) e igualando términos independientes obtenemos la **ecuación indicial**

$$E(s) := s(s - 1) + p(x_0)s + q(x_0) = 0$$

y una ley de recurrencia siempre y cuando que  $E(n + s) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Bajo esta condición se puede resolver (4.5). La situación general, que resuelve todos los restantes casos, se enuncia en el siguiente teorema. Sean  $Q(x)$  y  $R(x)$  holomorfas en  $x_0$ , sea  $r$  el menor de los radios de convergencia de las series de Taylor de  $Q$  y  $R$  y sean  $s, t$  las raíces de la ecuación indicial asociada a (4.5). Entonces (4.5) tiene dos soluciones linealmente independientes  $y_1, y_2$  definidas en  $]x_0 - r, x_0 + r[ \setminus \{x_0\}$  de la forma:

- a) Si  $s - t$  no es un entero

$$y_1(x) = |x - x_0|^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad y_2(x) = |x - x_0|^t \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

- b) Si  $s = t$

$$y_1(x) = |x - x_0|^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad y_2(x) = y_1(x) \log |x - x_0| + |x - x_0|^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

c) Si  $s - t$  es un entero no nulo

$$y_1(x) = |x - x_0|^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad y_2(x) = \alpha y_1(x) \log |x - x_0| + |x - x_0|^t \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

Ilustramos este teorema resolviendo la ecuación  $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$ , teniendo la ecuación indicial una raíz doble en -1.

La bibliografía que recomendamos al alumno es [11, 36, 40, 74].

### 4.3. Funciones de Bessel

En esta sección consideraremos la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \eta^2)y = 0,$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}$ . Independientemente de la importancia que tiene esta ecuación en la física, esta ecuación ilustra adecuadamente los tres casos enunciados en el teorema de la sección anterior. Estudiando la ecuación indicial tenemos tres casos diferentes, aunque estudiamos sólo dos de estos casos:

- $2\eta \notin \mathbb{Z}$ . Desarrollando la solución en serie obtenemos dos soluciones independientes llamadas **funciones de Bessel de primera especie** de órdenes  $\eta$  y  $-\eta$ , denotadas respectivamente  $J_\eta$  y  $J_{-\eta}$ .
- $\eta = 0$ . Desarrollando la solución en serie obtenemos dos funciones independientes, una es la **función de Bessel de primera especie** de orden 0, denotada  $J_0$  y la otra es la **función de Bessel de segunda especie** de orden 0, denotada  $Y_0$ .

Al ser ésta una sección basada en la anterior, la bibliografía es la comentada allí, aunque un libro donde se trata exhaustivamente las funciones de Bessel y sus propiedades es [71].

## Contenido del Capítulo 4

1. **Soluciones mediante series alrededor de un punto regular.**
  - Puntos regulares. Búsqueda de soluciones mediante series de potencias. Ejemplos
  - Dominio de convergencia. Teorema que justifica la resolución por el método de las series de potencias.
2. **Soluciones mediante series alrededor de un punto singular-regular.**
  - Planteamiento de la ecuación indicial.
  - Teorema que da la solución alrededor de un punto singular-regular. Ejemplos.
3. **Funciones de Bessel.**
  - Ecuación de Bessel. Resolución y obtención de las funciones de Bessel.

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias

---

## 5. Series de Fourier

### OBJETIVOS:

Saber las principales propiedades de las series de Fourier. Desarrollar el método de separación de variables.

El análisis de Fourier, una de las más poderosas herramientas de la matemática y de la física, surgió del problema de la cuerda vibrante, estudiado ya por Euler y Daniel Bernouilli en el siglo XVIII. El trabajo de Fourier sobre la representación de funciones como sumas trigonométricas fue publicado en su *Théorie analytique de la chaleur* en 1822. El objetivo de Fourier fue resolver la ecuación del calor:

$$\left. \begin{array}{ll} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < p, \ 0 < t, \\ u(0, t) = u(p, t) = 0 & 0 < t, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq p, \end{array} \right\}$$

donde  $u(x, t)$  representa la temperatura de una barra metálica de longitud  $p$  en el punto  $x$  y en el tiempo  $t$ . Fourier, al intentar resolver esta ecuación por el método que hoy en día conocemos por **separación de variables**, se vio obligado a expresar  $f(x)$  como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/p).$$

Fourier, tras una serie de pasos nada rigurosos dedujo que

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin(n\pi x/p) dx.$$

A pesar de que las series de Fourier se originaron dentro de la física matemática, su importancia sobre el desarrollo del análisis ha sido fundamental. De aquí surgen por citar sólo algunos ejemplos la teoría de los desarrollos en serie de funciones de Sturm-Liouville que veremos en el capítulo siguiente, los conjuntos ortonormales de funciones y la teoría de integración de Lebesgue.

El hecho de que la serie de Fourier converja a la función bajo ciertas condiciones es un fundamental. Dirichlet y Dini a mediados del siglo XIX establecieron dos condiciones diferentes bajo las cuales se cumple la convergencia. Estas condiciones para la convergencia son suficientes pero no necesarias. La mera continuidad de la función no es suficiente para asegurar la convergencia como probó du Bois-Reymond en 1876.

## 5.1. Primeras propiedades de las series de Fourier

Definimos los **coeficientes de Fourier** de una función  $f$  localmente integrable y  $2\pi$ -periódica:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

y su **serie de Fourier**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Para una función  $f$  localmente integrable y  $2L$ -periódica (lo que ocurre en la mayoría de las aplicaciones), mediante un simple cambio de variables se tiene que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx.$$

y que su serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

En este momento es importante observar que dos funciones diferentes,  $2\pi$ -periódicas y localmente integrables en  $[-\pi, \pi]$  pueden tener las mismas series de Fourier. Basta para ello que se diferencien en un número finito de puntos. También es útil observar los siguientes hechos elementales:

- Si  $f$  es par, entonces  $b_n = 0$  y  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ .
- Si  $f$  es impar, entonces  $a_n = 0$  y  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ .

El problema central de la teoría es el siguiente: ¿cuándo una serie de Fourier converge a la función de partida? Los resultados siguientes (debidos a Dirichlet y a Dini, respectivamente) que se enuncian son, por este motivo, claves en todo el tema:

- Sea  $f$  localmente integrable,  $2\pi$  periódica y de variación acotada en un entorno de  $x_0$ . Entonces

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0. \quad (5.1)$$

- Sea  $f$  continua a trozos,  $2\pi$  periódica tal que existen  $f'_-(x_0)$  y  $f'_+(x_0)$ . Entonces se verifica (5.1).

Observamos que si  $f$  es continua en  $x_0$ , el miembro izquierdo de (5.1) se reduce a  $f(x_0)$ .

Como punto final enunciamos el lema de Riemann-Lebesgue: Si  $f$  es integrable en  $[-\pi, \pi]$ , entonces sus coeficientes de Fourier tienden a 0.

## 5.2. Método de separación de variables.

El objetivo de esta sección es introducir el método de separación de variables para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Explicamos algunos ejemplos concretos que surgen de la física.

**La ecuación del calor homogénea.** Si  $u(x, t)$  describe la temperatura de una varilla metálica de longitud  $p$  en el punto  $x$  y en el tiempo  $t$  con temperatura fijas en los extremos nulas y con temperatura inicial  $f(x)$ , se puede probar utilizando argumentos físicos que la función  $u$  verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} &= u_t & 0 < x < p, 0 < t, \\ u(0, t) &= u(p, t) = 0 & 0 < t, \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq p. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $u(x, t) = X(x)T(t)$  (de aquí el nombre de separación de variables), substituyendo en las tres primeras ecuaciones tenemos que existen infinitas soluciones de la forma

$$u_k(x, t) = A_k \sin \frac{k\pi x}{p} \exp \left( -\left( \frac{k\pi c}{p} \right)^2 t \right).$$

Sumando todas las funciones  $u_k$  obtenemos que

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k(x, t)$$

también verifica estas tres ecuaciones. En este punto hemos de resaltar que estamos buscando la solución formal del problema, puesto que en realidad intercambiamos una serie infinita por la derivación. Haciendo  $t = 0$ , obtenemos la serie de Fourier de  $f$  (extendida de forma impar y  $2p$ -periódica), con lo que si  $f$  cumple alguno de los dos teoremas de convergencia ya hemos resuelto el problema.

**La ecuación del calor no homogénea.** El problema es igual al anterior salvo que la condición segunda de la ecuación del calor homogénea, se substituye por  $u(0, t) = A$ ,  $u(p, t) = B$ . Este problema se reduce mediante el cambio

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x),$$

a la resolución de la ecuación del calor homogénea en  $w$  y a la resolución del problema

$$v'' = 0; \quad v(0) = A; \quad v(p) = B.$$

**La ecuación de ondas.** Una cuerda de longitud  $p$  cuyos extremos están fijos y de la cual se conoce la posición y velocidad inicial cumple

$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} &= u_{tt} & 0 < x < p, 0 < t, \\ u(0, t) &= u(p, t) = 0 & 0 < t, \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq p, \\ u_t(x, 0) &= g(x) & 0 \leq x \leq p. \end{aligned}$$

**La ecuación de Laplace** es una de las ecuaciones que más frecuentemente aparece en la física. La ecuación de Laplace en 2 dimensiones tiene la forma  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  y en tres

## 5. Series de Fourier

---

dimensiones  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ . Frecuentemente se utiliza la notación  $\nabla^2 u = 0$ , siendo  $\nabla^2$  el **operador laplaciano**. La ecuación de Laplace aparece en muy diversos campos de la física, por ejemplo, en la distribución de la temperatura estacionaria, el estado estacionario de una membrana elástica o del potencial eléctrico en una placa. Las ecuaciones de la física que contienen a  $\nabla^2$  establecen que la naturaleza siempre actúa para establecer la uniformidad.

Estudiamos la ecuación de Laplace cuando el dominio es un rectángulo. Antes de resolver el caso general planteamos el siguiente problema particular

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0 & 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) &= 0 & 0 \leq y \leq b, \\ u(a, y) &= f(y) & 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Observamos que las tres primeras ecuaciones son homogéneas. Este hecho es fundamental pues se aplica al principio de superposición. Así pues, buscamos una sucesión  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  de funciones que verifiquen las cuatro primeras ecuaciones. Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$  es una candidata formal para la solución del problema (por el principio de superposición). Ahora sólo falta hallar los coeficientes  $\alpha_n$  usando la teoría de las series de Fourier y la última ecuación. Así hallamos la serie que es la solución formal del problema.

Ahora resolvemos la ecuación de Laplace en un rectángulo donde se conoce el comportamiento de la solución en la frontera. El problema es

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= g_1(x) & 0 \leq x \leq a, \\ u(x, b) &= g_2(x) & 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) &= f_1(y) & 0 \leq y \leq b, \\ u(a, y) &= f_2(y) & 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación en derivadas parciales podría parecer difícil, ya que no hay condiciones iniciales homogéneas. Sin embargo este problema tiene una resolución bastante fácil si se descompone la solución  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ , donde cada  $u_i$  verifica un problema parecido al que se acaba de resolver.

Si queremos resolver la ecuación de Laplace planteado en el disco de radio  $c$  centrado en el origen, es natural usar coordenadas polares  $r, \theta$ , donde el disco queda descrito por  $0 \leq r \leq c$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La ecuación de Laplace en polares es

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Si conocemos el valor que toma  $u$  en la frontera del disco tenemos la condición

$$u(c, \theta) = f(\theta),$$

en donde  $f$  es conocida. Puesto que  $0$  ( $ó$   $2\pi$ ) en realidad es una “falsa frontera” exigimos además que  $f(\theta)$ ,  $u(\cdot, \theta)$ ,  $u_{\theta}(\cdot, \theta)$  sean funciones continuas  $2\pi$ -periódicas.

Tras aplicar el método de separación de variables,  $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ , obtenemos que  $R$  debe verificar una ecuación de Euler-Cauchy. Es conveniente recordar esta ecuación vista en primer curso [37]. Además es preciso rechazar las soluciones no acotadas de  $R$  (debido simplemente a una hipótesis física).

En este problema, al igual que los anteriores, obtenemos una solución formal. Pero comprobar la convergencia para  $0 \leq r \leq c$  de la serie

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta,$$

es fácil si se usa el criterio de mayoración de Weierstrass y el lema de Riemann-Lebesgue. Al mismo tiempo conviene demostrar que

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \theta) \, d\theta, \quad r \in [0, c],$$

lo que indica que la solución del problema de Dirichlet en el centro de un disco es igual al valor medio de sus valores a lo largo de la frontera del disco, resultado bastante intuitivo y que conecta la física subyacente al modelo con el rigor matemático. Creemos que nunca hemos de olvidar la fuerte relación entre las ideas provenientes de la física y las ideas matemáticas.

Las referencias de este capítulo son [11, 16, 25, 40, 47, 59, 70].

## **Contenido del Capítulo 5**

### **1. Primeras propiedades de las series de Fourier.**

- Funciones localmente integrables. Coeficientes de Fourier. Series de Fourier de funciones con período arbitrario.
- Criterios de convergencia. Lema de Riemann-Lebesgue.

### **2. Método de separación de variables.**

- La ecuación del calor.
- La ecuación de ondas.
- La ecuación de Laplace para un rectángulo.
- El problema de Dirichlet para un disco.

## 6. Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones

### OBJETIVOS:

Estudiar los problemas de Sturm-Liouville y el desarrollo en serie de autofunciones.

Resolver un tipo de ecuaciones en derivadas parciales mediante autofunciones.

Los problemas que implican ecuaciones en derivadas parciales de la física contienen comúnmente condiciones sobre la frontera del dominio, tales como la condición de que la cuerda vibrante debe estar fija en los extremos o que la temperatura de una barra metálica está fija en sus extremos. Cuando el método de separación de variables se aplica a una ecuación en derivadas parciales, esta ecuación se descompone en dos o más ecuaciones diferenciales ordinarias, y las condiciones de frontera sobre la solución deseada se convierten en condiciones de frontera sobre una ecuación diferencial ordinaria. Esta ecuación diferencial ordinaria contiene generalmente un parámetro y sólo para valores particulares se obtienen soluciones no triviales. Estos valores se llaman autovalores y la solución para cualquier autovalor es llamada autofunción. Más aún, para satisfacer la condición inicial del problema es necesario expresar una función dada en serie de autofunciones.

Estos problemas de determinar los autovalores y autofunciones de una ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera y de desarrollar una función dada en términos de una serie infinita de autofunciones, que datan de aproximadamente de 1750, se hicieron más prominentes al tiempo que se introducían nuevos sistemas de coordenadas y nuevas clases de funciones tales como las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre.

Sturm (1803–1855) y Liouville (1809–1882) decidieron atacar el problema general para cualquier ecuación diferencial de segundo orden. Sturm trabajó desde 1833 en problemas de ecuaciones en derivadas parciales, principalmente sobre el flujo del calor en una barra metálica de densidad variable. Liouville, informado por Sturm de los problemas sobre los que estaba trabajando, se dedicó a la misma materia.

### 6.1. Introducción al método de autofunciones

Comenzamos el tema con un breve repaso de la resolución de la ecuación del calor e intentamos destacar las propiedades más destacables: si intentamos resolver

$$c^2 u_{xx} = u_t, \quad u(0, t) = u(p, t) = 0$$

por el método de separación de variables,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , tenemos que  $X$  debe satisfacer

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) = X(p) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

## 6. Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones

---

Vimos que existe una sucesión  $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que problema (6.1) tiene solución no trivial, digamos  $X_n$ . Después obtuvimos la solución de la ecuación del calor en forma de serie:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t).$$

Por último, si queremos que  $u$  cumpla la condición  $u(x, 0) = f(x)$  debemos expresar  $f$  en serie de  $X_k$ .

Para fijar más los conceptos de desarrollo en serie de autofunciones aplicamos estas ideas para resolver la siguiente ecuación del calor no homogénea:

$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} &= u_t + h(x, t) & 0 < x < p, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= 0, & 0 \leq t, \\ u(p, t) &= 0, & 0 \leq t, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq p. \end{aligned}$$

Conjeturamos como solución

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t),$$

donde  $X_k$  son las soluciones no nulas obtenidas en la ecuación del calor homogénea. Si forzamos que  $u$  verifique la ecuación en derivadas parciales, nos vemos obligados a desarrollar  $h$  en serie de  $X_k$ .

Este ejemplo es interesante por varios motivos: permite introducir de modo natural los problemas de Sturm-Liouville, se prevé que se generalizará la teoría de las series de Fourier y al mismo tiempo se intuye la idea fundamental del método de autofunciones: el desarrollo en serie por medio de autofunciones.

También se puede advertir de la estrecha conexión que tiene este tema con el tema de espacio vectorial euclídeo estudiado en la asignatura de álgebra lineal: dados los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ , observamos las siguientes analogías:

$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{C}([-\pi, \pi])$
Posee una base ortogonal.	$\{1, \cos x, \sin x, \dots\}$ es un sistema ortogonal.
Todo vector de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de la base anterior.	“Muchas” funciones se ponen en serie del sistema anterior.

Aunque advertimos que la analogía se hará todavía más patente cuando introduzcamos cierto operador autoadjunto. Es muy conveniente para el alumno repasar los textos [2, 37].

### 6.2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Tras aplicar el método de separación de variables a

$$\begin{aligned} (pu_x)_x - qu - ru_t &= 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u_x(0, t) + h_1 u(0, t) &= 0, & 0 \leq t, \\ u_x(c, t) + h_2 u(c, t) &= 0, & 0 \leq t, \end{aligned}$$

siendo  $r, p, q$  funciones solamente de  $x$ . Además  $r, p, p', q$  son continuas y  $r, p > 0$ , obtenemos el siguiente problema llamado de **Sturm-Liouville**:

$$\left. \begin{array}{l} (py')' - qy - \lambda ry = 0, \\ y'(0) + h_1 y(0) = 0, \\ y'(1) + h_2 y(1) = 0. \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Los **autovalores** del problema son los valores de  $\lambda$  tales que (6.2) tiene solución no nula. Estas soluciones se llaman **autofunciones** asociadas a  $\lambda$ .

Definiendo el subespacio  $V$  y el operador lineal  $L$  dados por

$$\begin{aligned} V &= \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}) : f'(0) + h_1 f(0) = f'(1) + h_2 f(1) = 0\}, \\ L : V &\rightarrow V; \quad L(f) = \frac{1}{r}[(pf')' - qf], \end{aligned} \quad (6.3)$$

pretendemos dos objetivos: que el alumno entienda la conveniencia de la economización de las expresiones por medio de una notación adecuada y demostrar que conceptos teóricos del álgebra lineal (aplicaciones lineales) tienen aplicación directa en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Demostramos los siguientes hechos básicos de este operador:

- $L$  es lineal.
- $\lambda$  es un autovalor si y sólo si existe  $y \in V \setminus \{0\}$  tal que  $L(y) = \lambda y$ , es decir  $\lambda$  es un valor propio de  $L$ .
- $f$  es una autofunción asociada a  $\lambda$  si y sólo si  $f$  es un vector propio asociado a  $\lambda$ .
- El conjunto de autofunciones asociado a un cierto autovalor es un subespacio vectorial de  $V$ .

Una igualdad útil que probamos es la **identidad de Lagrange**: Si  $u, v$  son dos funciones dos veces diferenciables, entonces

$$\int_0^1 r[L(u)v - uL(v)] dx = [p(u'v - uv')]_0^1.$$

A partir de ahora consideramos a  $V$  dotado del siguiente producto escalar: Sean  $u, v \in V$ ,

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 r(x)u(x)\overline{v(x)} dx. \quad (6.4)$$

Gracias a la identidad de Lagrange podemos demostrar fácilmente que  $L$  es autoadjunto, es decir,  $\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle$  para todos  $u, v \in V$ . A partir de que  $L$  sea autoadjunto se obtienen automáticamente las siguientes afirmaciones:

- Si  $\lambda$  es un autovalor del problema de Sturm-Liouville, entonces  $\lambda$  es real.
- Si  $\lambda$  y  $\mu$  son dos autovalores diferentes y  $f, g$  son dos autofunciones asociadas, entonces  $f$  y  $g$  son ortogonales respecto al producto escalar (6.4).

La siguiente propiedad de los espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita es fundamental: si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es una base ortonormal de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, entonces dado  $x \in V$  se tiene  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ . Enunciamos el siguiente resultado relacionado con esta afirmación: Dado un problema de Sturm-Liouville se verifica:

- Existe una sucesión de autovalores reales  $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ .
- El conjunto de autofunciones asociado a un autovalor es un subespacio de dimensión 1.
- Si  $f$  y  $f'$  son funciones continuas a trozos en  $]0, 1[$ , entonces para cada  $x \in ]0, 1[$

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

considerando el producto escalar (6.4) y  $\phi_n$  la autofunción asociada a  $\lambda_n$  de norma 1. Esta serie se llama **serie de Sturm-Liouville** de  $f$ .

Observamos que este resultado generaliza la teoría de las series de Fourier y que . si se trunca la serie de Sturm-Liouville de  $f$  hasta el orden  $n$  se tiene la aproximación por mínimos cuadrados de  $f$  sobre el subespacio generado por  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ .

### 6.3. Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos

Un problema de Sturm-Liouville es el siguiente problema de frontera:

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= \mu r(x)y + f(x), \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) + h_1 y(0) &= 0, \\ y'(1) + h_2 y(1) &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

verificando  $p, q, r$  las mismas condiciones que en la sección previa,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $f$  una función cuya segunda derivada es continua a trozos en  $]0, 1[$ .

El método que describimos a los alumnos en este momento nos da una solución formal. El problema (6.5) es equivalente a hallar  $y \in V$  tal que  $L(y) = \mu y + f/r$ , estando  $L$  y  $V$  definidos en (6.3).

Sea la solución  $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)$ , donde  $\phi_n$  son las autofunciones de norma 1 y  $b_n \in \mathbb{R}$  están por determinar. La expresión de  $\Phi$  en forma de serie es rigurosa, puesto que  $\Phi$  tiene segunda derivada continua, pero la manipulación de la serie exige un paso no riguroso (este paso, expresado simbólicamente, es  $L(\Sigma) = \Sigma(L)$ ). Tras imponer que  $L(\Phi) = \mu \Phi + f/r$  obtenemos

$$\frac{f}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu) \phi_n,$$

en donde se ve la necesidad de desarrollar  $f/r$  en serie de autofunciones. Dependiendo del valor de  $\mu$  se obtienen el (los) valor(es) posible(s) de  $b_n$ .

## 6.4. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones

Veremos cómo encontrar soluciones de determinadas ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones de correspondientes problemas de Sturm-Liouville. Este método sirve para resolver ecuaciones en derivadas parciales del siguiente problema:

$$\begin{aligned}(p(x)u_x)_x - q(x)u = r(x)u_t + F(x, t), \quad 0 < x < 1; \quad 0 < t \\ u_x(0, t) + h_1 u(0, t) = 0, \quad 0 < t \\ u_x(1, t) + h_2 u(1, t) = 0, \quad 0 < t \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

Más que dar un desarrollo excesivamente teórico del método, explicamos el método con un ejemplo concreto. Los pasos son:

1. Separación de variables en el problema homogéneo.
2. Hallar los autovalores y las autofunciones en el problema de Sturm-Liouville correspondiente.
3. Normalizar las autofunciones.
4. Expresar la solución  $u(x, t)$  en forma de serie de Sturm-Liouville.
5. Resolver las ecuaciones diferenciales que cumplen los coeficientes de  $u(x, t)$ .

Normalmente hay tres pasos conflictivos en donde el alumno se encuentra menos seguro. El primero es, como ya hemos repetido, que las operaciones son formales. El segundo es la necesidad de desarrollar  $F(x, t)$  en serie de Sturm-Liouville, los alumnos no distinguen claramente entre variable activa y pasiva; pese a que esta distinción ya ha surgido antes. El tercer paso problemático es que al tratar de resolver las ecuaciones diferenciales para los coeficientes de la serie de  $u(x, t)$  surgen normalmente ecuaciones diferenciales que es preciso resolver variación de parámetros.

Las referencias básicas son [11, 25, 40, 60].

## Contenido del Capítulo 6

### 1. Introducción al método de autofunciones.

- Breve descripción de resolución de la ecuación del calor.
- Resolución de la ecuación del calor no homogénea.

### 2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos.

- Planteamiento de un problema de Sturm-Liouville homogéneo.
- Definición de autovalores y autofunciones de un problema de Sturm-Liouville.
- Operador lineal asociado. Propiedades.

### 3. Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos.

- Forma de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo. Planteamiento usando el operador lineal asociado.
- Solución general. Condiciones de existencia y unicidad de soluciones.

### 4. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones.

- Planteamiento general de la ecuación.
- Método de resolución.

# A. Examen de Álgebra Lineal

## Problema 1

Una persona se mueve en una serie de puntos como indica la figura:

$$P_0 \bullet — P_1 \bullet — P_2 \bullet — \cdots — P_{n-1} \bullet — P_n \bullet — P_{n+1} \bullet$$

Decide ir al punto de la derecha o de la izquierda lanzando una moneda. El “paseo” termina cuando alcanza los puntos  $P_0$  ó  $P_{n+1}$ . El propósito del problema es calcular la probabilidad de que la persona llegue al punto  $P_{n+1}$  partiendo de  $P_r$ . Para ello se definen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

- Halle los valores y vectores propios de  $A_2$  y de  $A_3$ . Halle todos los valores de  $t \in [0, \pi]$  de modo que  $\cos t$  sea valor propio de  $A_2$ . Lo mismo para  $A_3$ .
- Conjeture  $n$  valores de  $t \in [0, \pi]$  de modo que  $\cos t$  sea valor propio de  $A_n$ . Pruebe que  $(\sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt)^t$  es un vector propio de  $A_n$  asociado al valor propio  $\cos t$ .

Observe que la relación matricial que regula el proceso descrito al principio es

$$\mathbf{p}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x} & 0 \\ \mathbf{0} & A_n & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{y} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_k,$$

donde  $\mathbf{x} = (1/2, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{y} = (0, \dots, 0, 1/2)$  y  $\mathbf{p}_k$  es un vector columna de  $\mathbb{R}^{n+2}$  cuya  $i$ -ésima coordenada es la probabilidad de que la persona esté en el punto  $i-1$  tras  $k$  pasos.

- Sea  $M$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , sean  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dos vectores fila de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $N$  la siguiente matriz cuadrada de orden  $n+2$  formada por bloques:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u} & 0 \\ \mathbf{0} & M & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que

$$N^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u}(I + M + \cdots + M^{k-1}) & 0 \\ \mathbf{0} & M^k & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{v}(I + M + \cdots + M^{k-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

## A. Examen de Álgebra Lineal

---

- d) Si  $I - M$  es invertible, pruebe que  $I + M + \cdots + M^{k-1} = (I - M^k)(I - M)^{-1}$ .
- e) Si  $M$  es diagonalizable, todos sus valores propios tienen módulo menor que 1 y si  $I - M$  es invertible, entonces pruebe que si  $k \rightarrow \infty$ , entonces  $N^k$  tiende a .

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{u}(I - M)^{-1} & 0 \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{v}(I - M)^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

- f) Sabiendo que  $A_n$  es invertible y que los valores propios de  $A_n$  tienen módulo menor que 1, utilice los apartados anteriores para demostrar que la probabilidad de que la persona acabe en  $P_{n+1}$  partiendo de  $P_r$  es  $\mathbf{y}(I - A_n)^{-1}\mathbf{e}_r$ , siendo  $\mathbf{e}_r$  el vector columna  $r$ -ésimo de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que dicha probabilidad es  $r/(n + 1)$ . Ayuda: demuestre previamente que  $(1, 2, 3, \dots, n - 1, n)(I - A_n) = (n + 1)\mathbf{y}$ .

### Problema 2

Este problema estudia el comportamiento de  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  respecto a los valores de  $f$  y  $f'$  en  $a \neq b$ . Para ello se considera la aplicación lineal  $\Phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$\Phi(f) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b))^t.$$

- a) Sea  $\Phi_n$  la restricción de  $\Phi$  a  $\mathcal{P}_n$ . Halle la matriz de  $\Phi_n$  en las bases canónicas. Llame  $A_n$  a esta matriz.
- b) Halle el núcleo de  $\Phi_2$  (en función de  $a$  y  $b$ ).
- c) Obtenga la factorización  $LU$  de  $A_2$ . Use esta factorización para hallar el (los) polinomio(s)  $p \in \mathcal{P}_2$  tal(es) que  $\Phi_2(p) = (1 + a, 1, 1 + b, 1)^t$ . Si no existe(n), diga la razón.
- d) Para  $a = 0$  y  $b = 1$ , demuestre que no existe ningún  $p \in \mathcal{P}_2$  tal que  $\Phi_2(p) = \Phi(\cos \pi x)$ .
- e) Para  $a = 0$  y  $b = 1$ , obtenga la factorización  $QR$  de la matriz  $A_2$ . Use esta factorización para hallar la solución por mínimos cuadrados de  $\Phi_2(p) = \Phi(\cos \pi x)$ . Compare los resultados.

## B. Examen de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

### Problema 1

En este problema se estudia el efecto de un terremoto sobre un edificio de dos pisos. Supondremos que el piso  $i$  tiene masa  $m_i$  y que están unidos por un conector cuya acción se parece a un muelle (normalmente, los elementos estructurales de un edificio son de acero, que es un material muy elástico). Se puede demostrar que si  $x_i(t)$  es el desplazamiento horizontal del piso  $i$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) + F_e \cos(wt), \\ m_2 x_2'' &= -k_1(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donde  $k_0$  es la constante de proporcionalidad de la fuerza de restitución entre el primer piso y el suelo,  $k_1$  es la constante de proporcionalidad de la fuerza de restitución entre los dos suelos. Se supone que la fuerza externa del terremoto, cuya amplitud es  $F_e$ , actúa sólo sobre el primer piso y es de tipo oscilatorio (un terremoto suele durar entre 2 y 3 segundos, por lo que si  $T = 2\pi/w$  es la duración, entonces normalmente  $2 < T < 3$ ).

- Transforme (B.1) en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{Y}, \mathbf{F}$  son vectores de funciones y  $A$  es una matriz cuadrada.

En el resto de los apartados tome  $k_0 = 6, k_1 = 4, m_1 = m_2 = 1, w = 3$ .

- Resuelva el sistema homogéneo asociado.
- Si  $F_e = 21$ , halle una solución particular del sistema no homogéneo.
- Si  $F_e = 21$  y  $x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ , resuelva el sistema completo.

### Problema 2

Una cuenta está restringida a resbalar sin fricción a lo largo de una varilla rígida recta de longitud  $2L$ . La varilla gira en el plano vertical con velocidad angular constante  $w > 0$  en torno a un punto fijo  $P$  en la mitad de la varilla; pero el diseño permite que la cuenta se deslice por toda la varilla. Sea  $r(t)$  la distancia (con signo) de la cuenta a  $P$ . La ecuación diferencial que satisface  $r(t)$  es

$$r'' = w^2 r - g \operatorname{sen}(wt). \quad (\text{B.2})$$

- Resuelva la ecuación homogénea asociada a (B.2).
- Halle una solución particular de (B.2).

- c) Halle  $r(t)$  sabiendo que cumple (B.2) y que inicialmente está en la posición  $r_0$  y tiene velocidad inicial  $v_0$  (es decir,  $r(0) = r_0$ ;  $r'(0) = v_0$ ). Determine  $r_0$  y  $v_0$  para que la cuenta tenga un movimiento armónico simple (es decir, que  $r(t)$  sea una oscilación pura). Halle una condición suficiente sobre  $r_0$  y  $v_0$  para que la cuenta salga disparada de la varilla.
- d) En este apartado se investigará de forma numérica en qué tiempo  $T$  la cuenta sale de la varilla suponiendo que  $r(0) = 0$  y  $v_0 = r'(0) = 1$ . En este apartado tome  $w = 3$ ;  $L = 1$  y  $g = 9'8$ . Para ello se plantea el problema de contorno

$$r'' = 9r - 9'8 \operatorname{sen}(3t), \quad r(0) = 0, \quad r(T) = 1.$$

Mediante diferencias finitas exprese  $r(T/3)$  y  $r(2T/3)$  en función de  $T$ . A continuación aproxime  $r'(0) = 1$  mediante una diferencia finita para encontrar una ecuación numérica que debe cumplir  $T$ .

- e) Este apartado ofrece otro enfoque para resolver la ecuación diferencial (B.2). Sea  $s(t)$  una función que cumple  $s'' = w^2 s$  (que debe hallar). Mediante el cambio de variables  $r(t) = u(t)s(t)$  transforme (B.2) en una ecuación diferencial de primer orden que deberá identificar y resolver. Ayuda: para este apartado necesitará el valor de las siguientes integrales:

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \operatorname{sen}(bx)) + C,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)) + C.$$

## C. Examen de Análisis Vectorial

**Problema 1** Es sabido que el potencial eléctrico  $U$  en zonas libres de cargas cumple  $\nabla^2 U = 0$ . En este problema, se abordará un pequeño estudio de estas funciones.

- a) Sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales continuas, donde  $R$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $C \subset R$  una curva cerrada sin autointersecciones recorrida en sentido positivo que encierra el recinto  $\Omega$ . Pruebe que

$$\oint_C -f \frac{\partial f}{\partial y} dx + f \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_{\Omega} (\|\nabla f\|^2 + f \nabla^2 f) dx dy.$$

- b) Pruebe que si  $U$  cumple  $\nabla^2 U = 0$  en  $\Omega$  entonces está determinada por sus valores en  $C$ . Para ello considere dos campos  $U_1, U_2$  tales que  $\nabla^2 U_1 \nabla^2 U_2 = 0$  en  $\Omega$  y que  $U_1 = U_2$  en  $C$ , defina  $f = U_1 - U_2$  y aplique el apartado anterior para probar que  $f = 0$  en  $\Omega$ .
- c) Verifique la expresión del apartado a) para  $f(x, y) = x^2$  y las dos curvas siguientes: La circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y el cuadrado de vértices  $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ .

**Problema 2** El campo dipolar magnético en un punto  $\mathbf{x}$  respecto al origen es dado por

$$\mathbf{B}_d(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})}{r^5} \mathbf{x} - \frac{1}{r^3} \mathbf{m} \right],$$

donde  $\mathbf{m}$  es el momento dipolar magnético que se supone constante y  $r = \|\mathbf{x}\|$ . Tras situar los ejes de coordenadas de manera adecuada, podemos suponer que  $\mathbf{m} = (0, 0, m)$ .

- a) Calcule (sin usar el teorema de la divergencia)  $\iint_S \mathbf{B}_d d\mathbf{S}$  si  $S$  es la esfera centrada en el origen y de radio  $R$ .
- b) Demuestre que  $\operatorname{div} \mathbf{B}_d = 0$ .
- c) Calcule  $\iint_S \mathbf{B}_d d\mathbf{S}$  si  $S$  es el cilindro  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, -H \leq z \leq H\}$  si  $H > 0$ .

C. Examen de Análisis Vectorial

## D. Examen de Matemáticas

### Problema 1

Úsese el rectángulo de vértices  $-R, R, R + 2\pi i, R - 2\pi i$  y la función

$$f(z) = \frac{\exp(i z)}{1 + \cosh z}$$

para calcular

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + \cosh x} dx,$$

donde  $a > 0$ .

### Problema 2

Resuelva mediante la transformada de Laplace la siguiente ecuación integral

$$\phi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \phi(t) \cos(x - t) dt.$$

D. Examen de Matemáticas

## Bibliografía

- [1] Acheson, D. *From calculus to chaos: an introduction to dynamics.* Oxford University Press, 1997.
- [2] Anton, H. *Introducción al álgebra lineal.* Ed. Limusa, 1988.
- [3] Apostol, T. *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, 1974.
- [4] Bellver, C.; González, A.; Rodríguez, M. *Campos electromagnéticos.* Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1995.
- [5] Bellman, R; Cooke K.L. *Differential difference equations.* Academic Press, 1974.
- [6] Benítez, J. *Una aplicación geométrica del método de los mínimos cuadrados.* Sociedad “Puig Adam” de profesores de matemáticas. Número 44 (45 – 50), 1996.
- [7] Benítez, J.; Thome, N. *Applications of differential geometry to cartography.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 35, Number 1, pp. 29-38 (2004).
- [8] Benítez, J. *Why can we not make a perfect map?* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Volume 36, Number 8, pp 944 - 946 (2005).
- [9] Blakeley, R.J. *Potential theory in gravity and magnetic applications.* Cambridge University Press. 1996.
- [10] Boehm, W.; Prautzsch, H. *Geometric concepts for geometric design.* A K Peters. 1994.
- [11] Boyce, W.E.; DiPrima, R. C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Editorial Limusa, S.A, 2000.
- [12] Bradley, G.L. *Cálculo de varias variables.* Prentice Hall, 1998.
- [13] Bronson, R. *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales modernas con transformaciones de Laplace.* McGraw-Hill, 1983.

## Bibliografía

---

- [14] Cartan, H. *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*.  
Selecciones científicas, 1968.
- [15] Christy, R.W.; Milford, F.J.; Reitz, J.R. *Foundations of Electromagnetic Theory*.  
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1993.
- [16] Churchill, R.W; Browne, J. W. *Fourier series and boundary value problems*.  
McGraw-Hill, 1978.
- [17] Colley, S.J. *Vector calculus*.  
Prentice-Hall, 2002.
- [18] Courant, R. *Differential and Integral Calculus, Vol II*.  
Wiley Interscience, 1936.
- [19] Dieudonné, J. *Cálculo Infinitesimal*.  
Ed. Omega. 1971.
- [20] Dim, H.; McKean, H.P. *Fourier series and integrals*.  
Academic Press, 1972.
- [21] do Carmo, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces*.  
Prentice-Hall, 1976. (Hay traducción castellana: Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Universidad, 1995)
- [22] Elsgoltz, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*.  
Ed. Mir, 1969.
- [23] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F; Tricomi, F.G. *Tables of integrals transforms*.  
Ed. McGraw Hill, 1954.
- [24] Farin, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide*.  
Academic Press, 1997.
- [25] Farlow S.J. *Partial differential equations for scientists and engineers*.  
Wiley, 1968.
- [26] Feller, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*.  
Limusa, 1975 .
- [27] Feynmann, R. *The Feynmann Lectures of Physics, Mainly Electromagnetism and Matter*.  
Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
- [28] Flanders, H. *Differential forms with applications to the physical sciences*.  
Academic Press, 1963.
- [29] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. *Table of integrals, series and products*.  
Academoc Press, 1980.
- [30] Gravesen, J. *de Casteljau's algorithm revisited*.  
Mathematical Methods for curves and surfaces II, 221-228. Vanderbilt University Press, 1998.

- [31] Greub, N. *Linear Algebra*.  
Ed. Springer Verlag, 1970.
- [32] Halmos, P.R. *Finite dimensional vector spaces*.  
Springer-Verlag, (1987).
- [33] Hestenes, D. *New foundations of classical mechanics*.  
Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [34] Horn, R.A.; Johnson C.R. *Matrix Analysis*.  
Cambridge University Press, 1985.
- [35] Hunter, S.C.; *Mechanics of Continuous Media*. (2nd edition).  
Ellis Horwood Limited, 1983.
- [36] Ince, E.L. *Ordinary differential equations*.  
Ed. Dover, 1956.
- [37] Izquierdo, J.; Torregrosa, J.R. *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales*.  
Ed. Universidad Politécnica de Valencia, 1997.
- [38] Jackson, J.D. *Classical electrodynamics*.  
John Wiley, 1975.
- [39] Jameson, G.J.O. *Primer curso de funciones complejas*.  
Ed. CECSA, 1973.
- [40] Jódar, L. *Segundo Curso de matemáticas constructivas*.  
Ed. Universidad Politécnica de Valencia, 1998.
- [41] Jordán, C; Torregrosa, J.R. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*.  
Ed. McGraw Hill. Serie Schaum, 1987.
- [42] Kellogg, O.D. : *Foundations of potential theory*.  
Springer Verlag, 1967.
- [43] Kline, M. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*.  
Alianza Editorial, 1992.
- [44] Kline, M. *Why Johnny can't add*.  
<http://www.marco-learningsystems.com/pages/kline/kline.html>.  
Traducción en castellano: *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Ed. Siglo XXI, 1984.
- [45] Krasnov, M.L; Makarenko, G.I; Kiseliov, A.I. *Cálculo Variacional (ejemplos y problemas)*.  
Ed. Mir, 1992.
- [46] Lancaster, P; Tismenetsky, H. *The theory of matrices*.  
Academic Press, 1985.
- [47] Marcellán, F; Casasus, L; Zarzo, A. *Ecuaciones diferenciales, problemas lineales y aplicaciones*.  
McGraw Hill, 1990.

## Bibliografía

---

- [48] Maron, M.J. *Numerical Analysis*.  
Ed. McMillan, 1987.
- [49] Marsden, J.E; Hugues, T.J.R. *Mathematical foundations of elasticity*.  
Prentice-Hall, 1983.
- [50] Marsden, J; Tromba, A. *Cálculo Vectorial*  
Ed. Addison Wesley, 1998.
- [51] Meyer, C. D. *Matrix analysis and applied Linear Algebra*.  
SIAM 2000.
- [52] Paige, L.J.; Swift, J.D.; Slobko, T.A. *Elementos de álgebra lineal*.  
Ed. Reverté, 1982.
- [53] Pólya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*.  
Ed. Trillas, 1965.
- [54] Pólya, G. *Métodos matemáticos de la ciencia*.  
Euler, 1994.
- [55] Poole, D. *Álgebra lineal, una introducción moderna*.  
Thomson, 2004.
- [56] Proskuriakov, I.V. *2000 Problemas de álgebra lineal*.  
Ed. Reverté, 1982.
- [57] Ramo, S; Whinnery, J.R.; van Duzer, T. *Fields and Waves in Communication Electronics*.  
John Wiley and Sons, 1994.
- [58] Rubinstein, I; Rubinstein, L. *Partial differential equations in classical mathematical physics*.  
Cambridge University Press, 1993.
- [59] Tolstov, G.P. *Fourier Series*.  
Ed. Dover, 1962.
- [60] Sagan, H. *Boundary and eigenvalues problems in mathematical physics*.  
Ed. John Wiley, 1961.
- [61] Schey, H.M. *Div, grad, curl and all that: An informal text on vector calculus*.  
W. W. Norton & Company, 2005.
- [62] Simmons, G. F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*.  
Mc Graw Hill, 1993.
- [63] Snieder, R. *A Guided Tour Of Mathematical Methods For The Physical Sciences*.  
Cambridge University Press, 2004.
- [64] Spiegel, M.R. *Transformadas de Laplace*.  
Ed. McGraw-Hill, 1991.

- [65] Spivack, M. *Calculus*.  
Ed. Reverté, 1978.
- [66] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*.  
Brandeis University, 1970.
- [67] Stewart, I. *The problems of mathematics*.  
Oxford University Press, 1992.
- [68] Strang, G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*.  
Fondo educativo interamericano, 1982.
- [69] Volkovyski, L; Lunts, G.; Aramanovich, L *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*.  
Ed. Mir, 1977.
- [70] Williams W.E. *Fourier Series and boundary value problems*.  
Ed. George Allen and Irvin, 1973.
- [71] Watson, G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions*.  
Cambridge University Press, 1966.
- [72] Weaver, J. *Theory of discrete and continuous Fourier analysis*.  
Ed. Wiley, 1989.
- [73] Weinberger, H.F. *Curso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*.  
Ed. Reverté, 1970
- [74] Yosida, K. *Equations différentielles et intégrales*.  
Ed. Dunod, 1971.
- [75] Zill, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*.  
International Thomson Editores, 1997.