

Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting

Oskar Maria Baksalary y Julio Benítez.

Aceptado en Linear Algebra and its Applications

Antecedentes

PROBLEMA RESUELTO 1.

(Baksalary y Baksalary, 2000, *LAA*)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{X} = c_1 \mathbf{P}_1 + c_2 \mathbf{P}_2 \end{array} \right\} \mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \iff \text{¿}c_1, c_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2?$$

PROBLEMA RESUELTO 2.

(Baksalary, Baksalary y Styan, 2002, *LAA*)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \\ \mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \\ \mathbf{X} = c_1\mathbf{P} + c_2\mathbf{T} \end{array} \right\} \mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \iff \text{¿}c_1, c_2, \mathbf{P}, \mathbf{T}\text{?}$$

PROBLEMA RESUELTO 2.

(Baksalary, Baksalary y Styan, 2002, *LAA*)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \\ \mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \\ \mathbf{X} = c_1\mathbf{P} + c_2\mathbf{T} \end{array} \right\} \mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \iff \exists c_1, c_2, \mathbf{P}, \mathbf{T}?$$

$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}$$



Existen únicos proyectores $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$:
 $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3.$

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{P} + c_2\mathbf{T} = c_1\mathbf{P} + c_2\mathbf{P}_2 - c_2\mathbf{P}_3.$$

Problema

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3^2 = \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{X} = c_1 \mathbf{P}_1 + c_2 \mathbf{P}_2 + c_3 \mathbf{P}_3 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{¿} c_1, c_2, c_3, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \text{?}$$

Problema

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3^2 = \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{X} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \iff \text{¿}c_1, c_2, c_3, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3?$$

UN ENFOQUE (TEDIOSO).

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \iff$$

$$\begin{aligned} & c_1(c_1 - 1)\mathbf{P}_1 + c_2(c_2 - 1)\mathbf{P}_2 + c_3(c_3 - 1)\mathbf{P}_3 + \\ & c_1c_2(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1) + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ & = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

¿Cómo se puede simplificar
este problema?

Usar la teoría espectral:

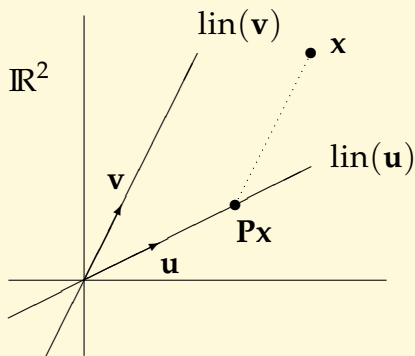
$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \Rightarrow \exists \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2: \begin{cases} \mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i, i = 1, 2, \\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2. \end{cases}$$

Usar la teoría espectral:

$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \Rightarrow \exists \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2: \begin{cases} \mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i, i = 1, 2, \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \\ & -\mathbf{I} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} \\ &= \underbrace{\mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}}_{\mathbf{P}_1} - \underbrace{\mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{I} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}}_{\mathbf{P}_2} = \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{P}$ un proyector 2×2 tal que $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores columna linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$.



$$\mathbf{P} = (\mathbf{u} \ \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{u} \ \mathbf{v})^{-1}.$$

Todo proyector $\mathbf{P}$ es diagonalizable.

Luego existe $\mathbf{W}$ invertible tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}.$$

Puede que algún sumando no esté presente.

Todo proyector $\mathbf{P}$ es diagonalizable.

Luego existe $\mathbf{W}$ invertible tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}.$$

Puede que algún sumando no esté presente.

IDEA:

$$\mathbf{X} \mapsto \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{W}^{-1},$$

donde $\mathbf{W}$ es invertible y “lo más conveniente posible”.

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Intento: Diagonalización simultánea.

Teorema: Sean $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^k$ matrices diagonalizables tales que $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i$ para todos i, j . Entonces existe $\mathbf{W}$ invertible tal que $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{W}$ es diagonal para todo $i = 1, \dots, k$.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{W} \text{diag}(\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni}) \mathbf{W}^{-1}, \quad i = 1, 2, 3; \lambda_{ji} \in \{0, 1\}.$$

La idempotencia de $c_1 \mathbf{P}_1 + c_2 \mathbf{P}_2 + c_3 \mathbf{P}_3$ implica que

$$c_1 \lambda_{j1} + c_2 \lambda_{j2} + c_3 \lambda_{j3} \in \{0, 1\}.$$

¡ Demasiadas alternativas !

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Existe $\mathbf{W}$ invertible tal que $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$.

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Existe $\mathbf{W}$ invertible tal que $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$.

Se representa

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}.$$

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Existe $\mathbf{W}$ invertible tal que $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$.

Se representa

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}.$$

PRIMER CASO

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Existe $\mathbf{W}$ invertible tal que $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$.

Se representa

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{A}_3 = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{B}_3 = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{XS} = \mathbf{SX}, \mathbf{TY} = \mathbf{YT}.$$

$\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ proyectores $\Rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son proyectores.

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{XS} = \mathbf{SX}, \mathbf{TY} = \mathbf{YT}.$$

$\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ proyectores $\Rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son proyectores.

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 &= \\ &= \mathbf{W} [c_1(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0}) + c_2(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}) + c_3(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})] \mathbf{W}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}.$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{XS} = \mathbf{SX}, \mathbf{TY} = \mathbf{YT}.$$

$\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ proyectores $\Rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son proyectores.

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 &= \\ &= \mathbf{W} [c_1(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0}) + c_2(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}) + c_3(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})] \mathbf{W}^{-1}. \end{aligned}$$

$$c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 \text{ es proyector} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S} \text{ es proyector} \\ \text{y} \\ c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T} \text{ es proyector} \end{cases}$$

$c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$, $\mathbf{X}$ son proyectores y conmutan



$(c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S})\mathbf{X}$ es proyector



$(c_1 + c_2)\mathbf{X} + c_3\mathbf{XS}$ es proyector.

PRIMER CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

PRIMER CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

Teorema: Sean $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^k$ matrices normales tales que $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i$ para todos i, j . Entonces existe $\mathbf{W}$ unitaria tal que $\mathbf{W}^* \mathbf{A}_i \mathbf{W}$ es diagonal para todo $i = 1, \dots, k$.

Se puede suponer que $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son diagonales.

Todas las soluciones obtenidas previamente son válidas.

SEGUNDO CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_i$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$.

SEGUNDO CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_i$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$.

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO. POSIBILIDAD 1

$$\mathbf{XS} = \mathbf{SX}, \quad \mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}.$$

SEGUNDO CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^{-1}$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO. POSIBILIDAD 2

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}.$$

Se ha reducido el problema original al siguiente:

PROBLEMA.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \\ \mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \\ \mathbf{XS} \neq \mathbf{SX} \end{array} \right\} \quad \text{¿ Cuándo } c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S} \text{ es proyector?}$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ implica

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = c_1(1 - c_1)\mathbf{I} + c_2(1 - 2c_1 - c_2)\mathbf{X} + c_3(1 - 2c_1 - c_3)\mathbf{S}.$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ implica

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = c_1(1 - c_1)\mathbf{I} + c_2(1 - 2c_1 - c_2)\mathbf{X} + c_3(1 - 2c_1 - c_3)\mathbf{S}.$$

Existe $\mathbf{U}$ invertible tal que $\mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{U}^{-1}$.

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ implica

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = c_1(1 - c_1)\mathbf{I} + c_2(1 - 2c_1 - c_2)\mathbf{X} + c_3(1 - 2c_1 - c_3)\mathbf{S}.$$

Existe $\mathbf{U}$ invertible tal que $\mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{U}^{-1}$.

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}.$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ implica

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = c_1(1 - c_1)\mathbf{I} + c_2(1 - 2c_1 - c_2)\mathbf{X} + c_3(1 - 2c_1 - c_3)\mathbf{S}.$$

Existe $\mathbf{U}$ invertible tal que $\mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{U}^{-1}$.

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX} \implies \mathbf{S}_2 \neq \mathbf{0} \text{ ó } \mathbf{S}_3 \neq \mathbf{0}.$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ implica

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = \underbrace{c_1(1 - c_1)}_{\alpha}\mathbf{I} + \underbrace{c_2(1 - 2c_1 - c_2)}_{\beta}\mathbf{X} + \underbrace{c_3(1 - 2c_1 - c_3)}_{\gamma}\mathbf{S}.$$

Existe $\mathbf{U}$ invertible tal que $\mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{U}^{-1}$.

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{XU} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-1}\mathbf{SU} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX} \implies \mathbf{S}_2 \neq \mathbf{0} \text{ ó } \mathbf{S}_3 \neq \mathbf{0}.$$

$$c_2c_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}.$$

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Se substituye esto en

$$c_2c_3(\mathbf{XS} + \mathbf{SX}) = c_1(1 - c_1)\mathbf{I} + c_2(1 - 2c_1 - c_2)\mathbf{X} + c_3(1 - 2c_1 - c_3)\mathbf{S}$$

y se obtiene

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2c_3}\mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})^2.$$

SEGUNDO CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

SEGUNDO CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

Existe $\mathbf{W}$ unitaria tal que

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^*$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores ortogonales.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

Existe $\mathbf{W}$ unitaria tal que

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^*$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores ortogonales.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO (hermítico). Posibilidad 1

$$\mathbf{XS} = \mathbf{SX}, \quad \mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}.$$

SEGUNDO CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_1$ para $i \in \{2, 3\}$. $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

Existe $\mathbf{W}$ unitaria tal que

- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^*$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{W}(\mathbf{S} \oplus \mathbf{T})\mathbf{W}^*$.
- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ son proyectores ortogonales.
- $\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}$ ó $\mathbf{YT} \neq \mathbf{TY}$.
- $c_1\mathbf{I} + c_2\mathbf{X} + c_3\mathbf{S}$ y $c_2\mathbf{Y} + c_3\mathbf{T}$ son proyectores.

SEGUNDO CASO (hermítico). Posibilidad 2

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}.$$

SEGUNDO CASO (hermítico). POSIBILIDAD 2

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}.$$

Se obtuvo en el caso no necesariamente hermítico

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})^2.$$

SEGUNDO CASO (hermítico). POSIBILIDAD 2

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}.$$

Se obtuvo en el caso no necesariamente hermítico

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})^2.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{S}$ son hermíticas.

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})(\mathbf{X} - \mathbf{S})^*.$$

SEGUNDO CASO (hermítico). POSIBILIDAD 2

$$\mathbf{XS} \neq \mathbf{SX}.$$

Se obtuvo en el caso no necesariamente hermítico

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})^2.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{S}$ son hermíticas.

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{S})(\mathbf{X} - \mathbf{S})^*.$$

Luego

$$\frac{c_1(c_1 - 1)}{c_2 c_3} > 0.$$

TERCER CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

TERCER CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$$

TERCER CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}, \text{ siendo } \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{Y} \text{ proyectores}$$

TERCER CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}, \text{ siendo } \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{Y} \text{ proyectores}$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}, \text{ donde } \mathbf{L} \neq \mathbf{0} \text{ ó } \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$$

Supondremos de ahora en adelante que $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$.

La idempotencia de $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ implica

$$\begin{aligned} & 2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ &= c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & 2c_1c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1c_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{XK} + \mathbf{KX} & \mathbf{XL} + \mathbf{LY} \\ \mathbf{YM} + \mathbf{MX} & \mathbf{YN} + \mathbf{NY} \end{pmatrix} \\ &= c_1(1 - c_1) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2(1 - c_2) \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} + c_3(1 - c_3) \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La idempotencia de $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ implica

$$\begin{aligned} & 2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ &= c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & 2c_1c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1c_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{XK} + \mathbf{KX} & \mathbf{XL} + \mathbf{LY} \\ \mathbf{YM} + \mathbf{MX} & \mathbf{YN} + \mathbf{NY} \end{pmatrix} \\ &= c_1(1 - c_1) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2(1 - c_2) \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} + c_3(1 - c_3) \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{XL} + \mathbf{LY}) = \mathbf{0}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{XL} + \mathbf{LY}) = \mathbf{0}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{U}\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{0}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{U}\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{0}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + c_2(\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y) = \mathbf{0}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
 Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{U}\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{0}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + c_2(\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y) = \mathbf{0}.$$

Recordemos que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proyectores.
 Existen matrices invertibles $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_X} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V} \underbrace{(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})}_{\mathbf{D}_Y} \mathbf{V}^{-1}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{L} + c_2(\mathbf{U}\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y\mathbf{V}^{-1}) = \mathbf{0}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + c_2(\mathbf{D}_X\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{D}_Y) = \mathbf{0}.$$

$$(c_1 + c_3 - 1) \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

Intento: Substituir estas condiciones en

$$2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2)$$

$$= c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3.$$

?????

TERCER CASO

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

y

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_2 + c_3 = 1.$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

y

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_2 + c_3 = 1.$$

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	★	★	★
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	★	★	★
$c_2 + c_3 = 1$	★	★	★

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

y

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_2 + c_3 = 1.$$

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	★	$c_1 = 0$	★
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	★	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	★	$c_1 = 0$	★

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_3 = 1.$$

y

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad \text{ó} \quad c_2 + c_3 = 1.$$

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_2 \\ 3c_1 + c_3 = 0 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_2 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$

Ahora basta substituir estas condiciones en

$$\begin{aligned} & 2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ &= c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

TERCER CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

TERCER CASO (hermítico)

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ y además $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_3 \neq \mathbf{P}_3\mathbf{P}_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ para $i = 1, 2, 3$.

Existe $\mathbf{W}$ unitaria tal que

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{0})\mathbf{W}^{-1},$$

$\mathbf{P}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})\mathbf{W}^{-1}$, siendo $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ proyectores ortogonales,

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^* & \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}, \text{ donde } \mathbf{L} \neq \mathbf{0}, \mathbf{K} = \mathbf{K}^*, \mathbf{N} = \mathbf{N}^*.$$

La idempotencia de $\mathbf{P}_3$ implica (entre otras cosas)

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}^*\mathbf{L} + \mathbf{N}^2.$$

Se obtuvo en el caso no hermítico

La idempotencia de $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ implica

$$\begin{aligned} 2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ = c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 2c_1c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1c_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{XK} + \mathbf{KX} & \mathbf{XL} + \mathbf{LY} \\ \mathbf{YM} + \mathbf{MX} & \mathbf{YN} + \mathbf{NY} \end{pmatrix} \\ = c_1(1 - c_1) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2(1 - c_2) \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} + c_3(1 - c_3) \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se obtuvo en el caso no hermítico

La idempotencia de $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ implica

$$2c_1c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_1c_3(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_1) + c_2c_3(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) \\ = c_1(1 - c_1)\mathbf{P}_1 + c_2(1 - c_2)\mathbf{P}_2 + c_3(1 - c_3)\mathbf{P}_3.$$

Por tanto

$$2c_1c_2 \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1c_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2c_3 \begin{pmatrix} \mathbf{XK} + \mathbf{KX} & \mathbf{XL} + \mathbf{LY} \\ \mathbf{YM} + \mathbf{MX} & \mathbf{YN} + \mathbf{NY} \end{pmatrix} \\ = c_1(1 - c_1) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2(1 - c_2) \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} + c_3(1 - c_3) \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

$$c_2c_3(\mathbf{YN} + \mathbf{NY}) = c_2(1 - c_2)\mathbf{Y} + c_3(1 - c_3)\mathbf{N}.$$

Se obtuvo en el caso no hermítico

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ 3c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$	$c_1 = 0$	$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases}$	$c_1 = 0$	$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$

Se obtuvo en el caso no hermítico

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ 3c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$	$c_1 = 0$	$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases}$	$c_1 = 0$	$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases}$

Se substituye $c_2 + c_3 = 1$ en

$$c_2 c_3 (\mathbf{Y}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Y}) = c_2(1 - c_2)\mathbf{Y} + c_3(1 - c_3)\mathbf{N},$$

y se consigue

$$\mathbf{Y}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{N}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2$$

Como $\mathbf{Y}$ es proyector,

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} + (\mathbf{N} - \mathbf{Y})^2 = \mathbf{0}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2$$

Como $\mathbf{Y}$ es proyector,

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} + (\mathbf{N} - \mathbf{Y})^2 = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{N}$ son hermíticos,

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} + (\mathbf{N} - \mathbf{Y})(\mathbf{N} - \mathbf{Y})^* = \mathbf{0}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Y} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} = \mathbf{L}^* \mathbf{L} + \mathbf{N}^2$$

Como $\mathbf{Y}$ es proyector,

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} + (\mathbf{N} - \mathbf{Y})^2 = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{N}$ son hermíticos,

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} + (\mathbf{N} - \mathbf{Y})(\mathbf{N} - \mathbf{Y})^* = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{0} \quad !!!!!$$

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_2 \\ 3c_1 + c_3 = 0 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$

	$c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_1 + c_3 = 1$
$2c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_2 \\ 3c_1 + c_3 = 0 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{c_1 + c_2} = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$
$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 + c_2 + c_3 = 1$	$c_2 = 0$
$c_2 + c_3 = 1$	$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{c_1 + c_2} = 0 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$	$c_1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{c_1 = c_2} \\ c_1 + c_3 = 1 \end{array} \right\}$