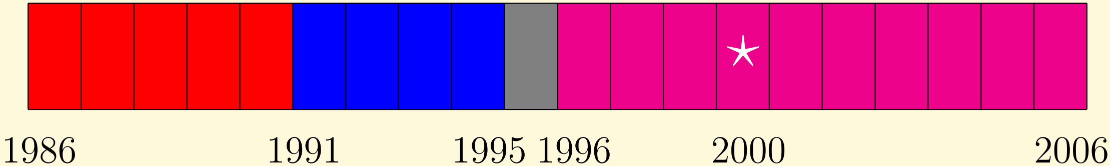
Historial académico, docente e investigador

Julio Benítez López

Breve resumen



Licenciatura en CC. Matemáticas.

Profesor asociado en la U.P.V.

Profesor Titular de Escuela Universitaria (interino).

Profesor Titular de Escuela Universitaria.

⋆ Doctor en CC. Matemáticas. Sobresaliente Cum Laude.
Diferenciabilidad en espacios de Banach.

Publicaciones, libros

1. *Diferenciabilidad en Espacios de Banach.*
   Universidad Politécnica de Valencia. (2000).

Publicaciones, artículos

1. *On restricted weak upper semicontinuous and reflexivity.*
   Bolletino della Union Matematica Italiana. (1999).
   Coautor: Vicente Montesinos.

2. *A characterization of restricted weak upper semicontinuous differentials of convex functions.*
   Bulletin of the Australian Mathematical Society. (2001).
   Coautor: Vicente Montesinos.

3. *Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that commute.*
   Linear Algebra and its Applications. (2005).
   Coautor: Néstor Thome.

4. *Characterizations and linear combinations of k-generalized projectors.*
   Linear Algebra and its Applications. (2005).
   Coautor: Néstor Thome.

5. *Matrices whose powers approximate the identity.*
   Applied Mathematics Letters. (2006).

6. *k-Group Periodic Matrices.*
   SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. (2006).
   Coautor: Néstor Thome.

7. *The generalized Schur complement in group inverses and $k+1$-potent matrices.*
   Linear and Multilinear Algebra. (2006).
   Coautor: Néstor Thome.

8. *Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting.*
   Aceptado en Linear Algebra and its Applications y aparecerá en el número especial dedicado a R. Horn por su sexagésimo quinto cumpleaños.
   Coautor: Oskar Maria Baksalary.

Libros docentes

1. *Álgebra Lineal, geometría y trigonometría.*
   Universidad Politécnica de Valencia (1994).
   Coautor: María José Felipe Román.

2. *Primeras Jornadas Docentes del Departamento de Matemática Aplicada.*
   Capítulo. Introdución a Matlab.
   Universidad Politécnica de Valencia. (2002).
   Coautor: José Luis Hueso Pagoaga.

3. *Problemas resueltos de Análisis Vectorial y Aplicaciones.*
   Universidad Politécnica de Valencia (2003).
   Coautor: Néstor Thome.

Artículos docentes

1. *Una aplicación geométrica de los mínimos cuadrados.*
   Sociedad "Puig Adam" de profesores de matemáticas. (1996).

2. *Sobre el wronskiano e independencia lineal. Un ejemplo de abstracción en álgebra lineal.*
   Sociedad "Puig Adam" de profesores de matemáticas. (2001).

3. *Applications of differential geometry to cartography.*
   International Journal of Mathematical Education in Science in Technology. (2004).
   Coautor: Néstor Thome.

4. *Why it is impossible to make a perfect map?*
   International Journal of Mathematical Education in Science in Technology. (2005).

Comunicaciones presentadas a congresos

De investigación

1. *Combinación lineal de proyectores vs. matrices $\{4\}$-periódicas de grupo.*
   CEDYA 2003.
   Coautor: Néstor Thome.

2. *Una versión revisada de resultados sobre matrices idempotentes y tripotentes.*
   CEDYA 2005.
   Coautor: Néstor Thome.

Comunicaciones presentadas a congresos

Docentes

1. *Coordenadas Curvilíneas Ortogonales.*
   Jornadas de Innovación Docente: La enseñanza de las Matemáticas y proyecto EUROPA.
   Dept. Matemática Aplicada. U.P.V. (2001).
   Coautor: Néstor Thome.

2. *La motivación en la enseñanza de la Metemática. Una aplicación del Análisis Vectorial a la Física.*
   Jornadas de Innovación Docente: La enseñanza de las Matemáticas y proyecto EUROPA.
   Dept. Matemática Aplicada. U.P.V. (2001).
   Coautor: Néstor Thome.

3. *Algunos aspectos de innovación educativa en la asignatura de análisis vectorial de la E.T.S.I. de Telecomunicación de la Universidad Politécnica de Valencia.*
   I jornadas de innovación educativa. Metodologías activas y evaluación.
   U.P.V. (2001).
   Coautores: Néstor Thome y Juan Ramón Torregrosa.

4. *Soporte Multimedia en la Docencia del Análisis Vectorial.*
   I Jornada sobre enseñanza en las escuelas técnicas de telecomunicación.
   U.P.V. (2003).
   Coautores: Néstor Thome y Juan Ramón Torregrosa.

Proyecto Docente

Julio Benítez López

Índice

1. Metodología docente.
2. Programa de Álgebra Lineal.
3. Programa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
4. Programa de Análisis Vectorial.
5. Programa de Matemáticas.

1. Metodología docente

La enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas

- Qué matemáticas hay que impartir y cómo hacerlo.
- ¿Cómo motivar al alumno en las clases de matemáticas?
- Errores:
  - Suponer que un estudiante de una carrera técnica está interesado en las matemáticas como un fin en sí mismas.
  - Esquema

$$\text{Definición} \Rightarrow \text{Ejemplos} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Teorema} \Rightarrow \text{Demostración} \Rightarrow \text{Corolarios}$$

- ¿Para qué sirven las matemáticas?
- Conexión con otras asignaturas de la carrera.

Esquema propuesto

$$\text{Problema real} \Rightarrow \text{Formulación matemática} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Teoría} \Rightarrow \text{Validación} \Rightarrow \text{Predicciones}$$

Características generales

- No distinción entre clases teóricas y de problemas.
- Ejemplos
  - Comprobación de la teoría..
  - Los positivos y los negativos.
  - No se referirán sólo a las matemáticas, sino también a otras ciencias.
- Evitar las demostraciones no constructivas.

Evaluación

Optaremos por el clásico examen.

1. Amplitud (evitar el factor suerte).
2. Cuestiones teóricas y problemas (evitar los exámenes de naturaleza memorística).
3. Uso correcto del lenguaje propio de la asignatura.
4. Simultaneidad en todos los alumnos del mismo curso (evitar los agravios comparativos entre exámenes distintos).
5. Un mismo profesor debe corregir la misma pregunta a todos los alumnos, incluso a los de grupos a los cuales el profesor no imparta clase.

Índice

Programa de Álgebra Lineal (1)

Seis Créditos

1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
2. Matrices.
3. Sistemas de ecuaciones lineales.
4. Espacios vectoriales.
5. Aplicaciones lineales.

(...)

Programa de Álgebra Lineal (y 2)

(...)

6. Curvas de Bézier.
7. Espacio vectorial euclídeo.
8. Aproximación por mínimos cuadrados.
9. Teoría espectral.
10. Aplicaciones de la teoría espectral.

1. Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1.1 La geometría y el álgebra de vectores.

1.2 El producto escalar.

1.3 Usos geométricos del producto escalar.

1.4 El producto vectorial.

1.5 Ecuaciones de rectas y planos.

2. Matrices

2.1 Primeras definiciones.

2.2 Potencias de matrices.

2.3 Determinante de una matriz cuadrada.

2.4 Inversa de una matriz cuadrada.

2.5 Matrices por bloques.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Sistemas lineales.

3.2 El método de eliminación de Gauss.

3.3 Factorización LU de una matriz.

3.4 Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz.

3.5 Pivotación parcial.

4. Espacios vectoriales

4.1 Definiciones y primeras propiedades.

4.2 Subespacios vectoriales.

4.3 Bases en un espacio vectorial.

4.4 Cálculo coordenado en un espacio vectorial de dimensión finita.

5. Aplicaciones lineales

5.1 Definición y ejemplos.

5.2 La matriz asociada a una aplicación lineal.

5.3 Aplicaciones afines.

5.4 El núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

6. Curvas de Bézier

6.1 El algoritmo de De Casteljau.

6.2 Curvas de Bézier y polinomios de Bernstein.

6.3 Propiedades de las curvas de Bézier.

6.4 Vectores tangentes.

7. Espacio vectorial euclídeo

7.1 Producto escalar.

7.2 Norma y ángulo en un espacio euclídeo.

7.3 Proyecciones sobre subespacios.

7.4 Bases ortogonales y proceso de Gram-Schmidt.

7.5 Matrices ortogonales. Factorización QR.

8. Aproximación por mínimos cuadrados

8.1 Método de los mínimos cuadrados.

8.2 Ajuste de datos.

8.3 Mínimos cuadrados ponderados.

8.4 Distancia entre variedades lineales.

9. Teoría espectral

9.1 Conceptos básicos.

9.2 Diagonalización de matrices.

9.3 Diagonalización de matrices simétricas.

10. Aplicaciones de la teoría espectral

10.1 Potencias de matrices.

10.2 Cálculo de sucesiones dadas por recurrencia lineal.

10.3 Cadenas de Márkov lineales.

10.4 Identificación de cónicas y cuádricas.

Índice

Programa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tres Créditos

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden.
2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.
3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.
4. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.
5. Cálculo variacional.

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 Ecuaciones separables y reducibles a separables.

1.2 Ecuaciones exactas y reducibles a exactas.

1.3 Ecuaciones lineales de primer orden.

1.4 Algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.5 Trayectorias ortogonales y oblicuas.

2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

2.1 La ecuación lineal de orden n.

2.2 La ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes.

2.3 Búsqueda de soluciones particulares de la ecuación no homogénea.

2.4 Ecuación de Euler-Cauchy.

3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

3.1 Vibraciones en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos.

4. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

4.1 Introducción.

4.2 Propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.3 Sistemas homogéneos de coeficientes constantes.

4.4 Búsqueda de una solución particular en los sistemas no homogéneos.

4.5 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

5. Cálculo variacional

5.1 Introducción.

5.2 La ecuación de Euler.

5.3 Integrales con más de una función argumento.

5.4 Problemas condicionados.

Índice

Programa de Análisis Vectorial

Cuatro Créditos y Medio

1. Curvas parametrizadas.
2. Integrales de línea.
3. Superficies parametrizadas.
4. Integrales de superficie.
5. Campos conservativos y solenoidales.
6. Coordenadas curvilíneas ortogonales.
7. El campo gravitatorio y electrostático.
8. El campo magnético.

1. Curvas parametrizadas

1.1 Ejemplos.

1.2 Vectores tangentes.

1.3 Curvas regulares.

1.4 Longitud de arco.

1.5 Movimiento de una partícula.

2. Integrales de línea

2.1 Integrales curvilíneas de campos escalares.

2.2 Integral curvilínea de un campo vectorial.

2.3 El teorema de Green.

3. Superficies parametrizadas

3.1 Definición y ejemplos de superficies parametrizadas.

3.2 El plano tangente.

4. Integrales de superficie

4.1 Integrales de superficie de campos escalares.

4.2 Integrales de superficies de campos vectoriales.

4.3 El teorema de Gauss-Ostrogradsky.

4.4 El teorema de Stokes.

5. Campos conservativos y solenoidales

5.1 Campos conservativos.

5.2 Campos solenoidales.

6. Coordenadas curvilíneas ortogonales

6.1 Repaso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

6.2 Definición de las coordenadas curvilíneas ortogonales.

6.3 Los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales.

7. El campo gravitatorio y electrostático

7.1 El potencial gravitatorio y electrostático.

7.2 La ley de Gauss.

8. El campo magnético

8.1 Fluidos.

8.2 La derivada material.

8.3 El teorema del transporte.

8.4 La ecuación de continuidad.

8.5 La ley de Lorentz y la ley de Biot y Savart.

8.6 Propiedades del campo magnético.

8.7 Las ecuaciones de Maxwell.

Índice

- Metodología docente.
- Programa de Álgebra Lineal.
- Programa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Programa de Análisis Vectorial.

5. Programa de Matemáticas.

Programa de Matemáticas

Seis Créditos

1. Funciones de variable compleja.

2. La transformada de Fourier.

3. La transformada de Laplace.

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias.

5. Series de Fourier.

6. Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones.

1. Funciones de variable compleja

1.1 Introducción y preliminares.

1.2 Funciones holomorfas.

1.3 La exponencial y el logaritmo complejo.

1.4 Integración en el plano complejo.

1.5 Singularidades aisladas, series de Laurent y cálculo de residuos.

1.6 El Teorema de los Residuos.

2. La transformada de Fourier

2.1 Transformada de Fourier y primeras propiedades.

2.2 Resolución de la ecuación del calor en una varilla infinita.

2.3 Convolución de funciones.

2.4 Transformadas de Fourier en senos y cosenos.

3. La transformada de Laplace

3.1 Primeras propiedades.

3.2 La Fórmula de inversión de Laplace.

3.3 Las ecuaciones integrales de Volterra.

3.4 La transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales.

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias

4.1 Soluciones mediante series alrededor de un punto regular.

4.2 Soluciones mediante series alrededor de un punto singular-regular.

4.3 Funciones de Bessel.

5. Series de Fourier

5.1 Primeras propiedades de las series de Fourier.

5.2 Método de separación de variables.

6. Problemas de Sturm-Liouville y desarrollos en serie de autofunciones

6.1 Introducción al método de autofunciones.

6.2 Problemas de Sturm-Liouville homogéneos.

6.3 Problemas de Sturm-Liouville no homogéneos.

6.4 Resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante series de autofunciones.

Proyecto de investigación

Julio Benítez López

Índice

Diferenciabilidad en espacios de Banach

Disitintas formas de diferenciabilidad

Definición. Sean D abierto de X, $f : D \to \mathbb{R}$ y $x \in D$.

- f es **Gâteaux diferenciable** (GD) en x si

$$df_x(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

existe $\forall\ u \in B_X$ y $df_x \in X^*$.

- f es **Fréchet diferenciable** (FD) en x si

$$f'(x)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

existe $\forall\ u \in B_X$, es uniforme para $u \in B_X$ y $f'(x) \in X^*$.

- f es **fuertemente subdiferenciable** (SSD) en x si

$$d^+f_x(u) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

existe $\forall\ u \in B_X$ y es uniforme para $u \in B_X$.

Teorema (Mazur-1933). Sean D un abierto convexo de X y $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Si X es separable entonces el conjunto de puntos donde f es GD es un subconjunto G_δ denso de D.

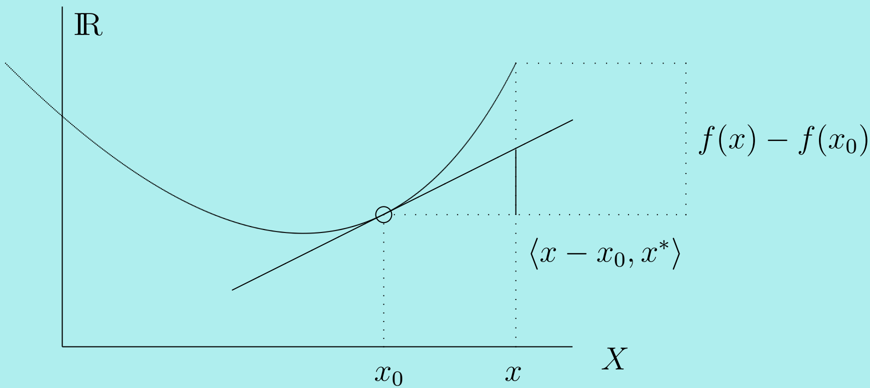
Definición. X es **un espacio de Asplund** si cualquier función continua convexa definida en un abierto convexo $D \subset X$ es FD en un subconjunto G_δ denso de D.

$$
\begin{tikzcd}
\|\cdot\| \text{ FD} \arrow[r, "\text{Ekeland, Lebourg (1976)}"] & X \text{ es Asplund} \\
\text{Existe un bump FD} \arrow[u, "\text{Fácil}"] \arrow[ur, "\text{Leach, Whitefield (1972)}"] \arrow[r, "\text{Trivial}"'] & \text{Existe un bump SSD} \arrow[u, "???"']
\end{tikzcd}
$$

- Existe un espacio de Asplund que no posee una norma GD. (Haydon, 1990).
- Interesa encontrar condiciones geométricas que no impliquen la GD de la norma para que el espacio sea de Asplund.

Proposición. Sean D un abierto convexo de X, $f : D \to \mathbb{R}$ convexa y sea $x_0 \in D$. Entonces f es GD en x_0 si y sólo si existe un único $x^* \in X^*$ tal que

$$\langle x - x_0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x_0), \qquad \forall x \in D.$$



Definición. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, propia e inferiormente $\|\cdot\|$-semicontinua. Si $x \in \mathrm{dom}(f)$ y $\epsilon \geq 0$, la **ϵ-subdiferencial de f en x** es

$$\partial_\epsilon f(x) = \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \epsilon,\ \forall y \in X\}.$$

La **subdiferencial** es $\partial f = \partial_0 f$.

Proposición. Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y convexa, siendo D un abierto convexo, entonces $\partial f(x)$ es w^*-compacto, convexo no vacío de X^*.

Continuidad de la subdiferencial

Definición. Sea $\Phi : X \to \mathcal{P}(X^*)$ y τ una topología en X^*.

- Φ es **superiormente τ semicontinua en** $x \in X$ (τUSC) si para cada τ-abierto U que verifique $\Phi(x) \subset U$, existe un entorno V de x tal que $\Phi(y) \subset U$ para todo $y \in V$.

- Φ es **inferiormente τ semicontinua en** $x \in X$ (τLSC) si para cada τ-abierto U que verifique $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$, existe un entorno V de x tal que $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$ para todo $y \in V$.

- Φ es **restringida superiormente τ semicontinua en** $x \in X$ (RτUSC) si para cada U, τ-entorno de 0 en X^*, existe V, entorno de x tal que $\Phi(y) \subset \Phi(x) + U$ para todo $y \in V$.

- ∂f es siempre es w^*USC.
- ∂f es $\|\cdot\|$LSC $\Longleftrightarrow$ f es FD .
- ∂f es w^*LSC $\Longleftrightarrow$ f es GD.
- ∂f es R$\|\cdot\|$USC $\Longleftrightarrow$ f es SSD.
- $\partial\|\cdot\|$ es RwUSC $\Rightarrow$ X de Asplund. (Contreras y Payá 1994).
- ∂f es RwUSC $\Longleftrightarrow$ (Benítez y Montesinos, 2000).

DEFINICIÓN. Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia, convexa e inferiormente semicontinua. La **conjugada de Fenchel** de f es

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in X\}, \quad f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

- f^* es convexa, inferiormente w^*-semicontinua y propia.

TEOREMA. (Fenchel-Moreau) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia inferiormente semicontinua y convexa. Si $x \in \mathrm{dom}(f)$, entonces $f(x) = f^{**}(x)$.

Teorema. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa, siendo D un abierto convexo no vacío de X y $x \in D$. Equivalen

1. ∂f es RwUSC en x.
2. Para todo N, w-entorno de 0 en X^*, existe $\epsilon > 0$ tal que $\partial_\epsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.
3. Dados $\epsilon > 0$ y $u^{**} \in S_{X^{**}}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f(x)}{t} - \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \epsilon,$$

   para cualquier $0 < t < \delta$.

En la definición de FD, GD y SSD no se exige que f sea convexa; sin embargo una hipótesis esencial en el teorema anterior es que f sea convexa.

Problema. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, en donde D es un abierto de X. ¿Existe una caraterización mediante cocientes diferenciales para f (y sólo para f) de modo que si f es convexa, se obtenga el teorema anterior?

Definición. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, siendo D un abierto de X. La **derivada de Clarke** en $x \in D$ es

$$f^{\circ}(x, v) = \limsup_{y \to x; \lambda \downarrow 0} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}.$$

La **subdiferencial de Clarke es**

$$\partial^{\circ} f(x) = \{x^* \in X^* : f^{\circ}(x, v) \geq \langle v, x^* \rangle, \forall v \in B_X\}.$$

Índice

- Diferenciabilidad en espacios de Banach.

2. Análisis matricial.

3. Diseño geométrico asistido por ordenador.

Análisis Matricial

Combinaciones lineales de matrices

PROBLEMA GENERAL. $A \neq B \in \mathbb{C}^{n\times n} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{c} A \text{ cumple } \mathcal{P}_A \\ B \text{ cumple } \mathcal{P}_B \\ X = aA + bB \end{array}\right\} \; X \text{ cumple } \mathcal{P}_X \Longleftrightarrow \text{¿}a, b, A, B?$$

Problema resuelto. (Baksalary y Baksalary, 2000)

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B^2 & = & B \\ X & = & aA+bB \end{array}\right\} X^2 = X \Longleftrightarrow ¿a, b, A, B?$$

Problema resuelto. (Baksalary, Baksalary y Styan, 2002)

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B^3 & = & B \\ X & = & aA+bB \end{array}\right\} X^2 = X \Longleftrightarrow ¿a, b, A, B?$$

PROBLEMA RESUELTO. (Benítez y Thome, 2005)

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B^{k+1} & = & B \\ AB & = & BA \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} X^2 = X \iff ¿a, b, A, B?$$

Diagonalización simultánea.

Problema.

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B^{k+1} & = & B \\ AB & \neq & BA \\ X & = & aA+bB \end{array}\right\} \quad X^2 = X \iff ¿a, b, A, B?$$

$\exists S : S^{-1}BS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ \lambda_i^{k+1} = \lambda_i$.
$B \leftrightarrow S^{-1}BS$; $A \leftrightarrow S^{-1}AS$.
Si $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq \mu.$$

$$X^2 = X, A^2 = A \ \Rightarrow \cdots \Rightarrow \ a + b(\lambda + \mu) = 1.$$

Problema. Generalizar este argumento para matrices $n \times n$.

Problema.

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B & \text{es} & \text{diagonalizable} \\ AB & \neq & BA \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} X^2 = X \Longleftrightarrow ¿a, b, A, B?$$

Conjetura.

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B & \text{es} & \text{diagonalizable} \\ AB & \neq & BA \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} \begin{array}{c} X^2 = X \Longrightarrow \\ \exists \lambda, \mu \in \sigma(B) : \left\{ \begin{array}{c} \lambda \neq \mu, \\ 1 = a + b(\lambda + \mu). \end{array} \right\} \end{array}$$

Problema.

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B & \text{no es} & \text{diagonalizable} \\ AB & \neq & BA \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} \quad X^2 = X \iff ¿a, b, A, B?$$

Conjetura.

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A \\ B & \text{no es} & \text{diagonalizable} \\ AB & \neq & BA \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} X^2 = X \Longrightarrow \\ \exists \lambda, \mu \in \sigma(B) : 1 = a + b(\lambda + \mu). \end{array}$$

Dos maneras posibles de atacar este último problema.

1. $B = SJS^{-1}$, en donde J es la forma canónica de Jordan de B.
2. Usar la densidad en $\mathbb{C}^{n\times n}$ de las matrices diagonalizables de orden n.

Se define $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ dada por

$$\Phi(X, Y) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (xX + yY)^2 = xX + yY\}$$

y se denota por $\mathbb{C}_{\mathsf{P}}^{n\times n}$ el conjunto de los proyectores de orden n.

Problema. Estúdiense las propiedades topológicas de Φ. ¿Qué ocurre si se restringe Φ a $\mathbb{C}_{\mathsf{P}}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n}$?

Problema resuelto. (Baksalary y Benítez, 2006)

$$\left.\begin{array}{c} A^2 = A \\ B^2 = B \\ C^2 = C \\ X = aA + bB + cC \\ \star \left\{ \begin{array}{c} AB = BA, AC = CA, BC = CB \text{ ó} \\ AB = BA, AC = CA, BC \neq CB \text{ ó} \\ AB = BA, AC \neq CA, BC \neq CB. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} X^2 = X \\ \Updownarrow \\ ¿a, b, c, A, B, C? \end{array}$$

- $AB = BA = 0, (a, b) = (1, -1) \Rightarrow (aA + bB)^3 = aA + bB.$

Problema. Substituir $\star$ por $AB \neq BA$, $AC \neq CA$, $BC \neq CB$.

PROBLEMA RESUELTO. (Bakasalry, Baksalary y Groß, 2006)

$$\left.\begin{array}{rcl} A^2 & = & A^+ \\ B^2 & = & B^+ \\ \star\ AB = BA & = & \alpha A^2 + \beta B^2 \\ X & = & aA + bB \end{array}\right\} X^2 = X^+ \Longleftrightarrow ¿a, b, A, B?$$

PROBLEMA. Substituir $\star$ por $AB = BA$.

TEOREMA. (Hartwig y Spindelböck, 1986.) *Equivalencia de las EP-matrices.* Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Son equivalentes

- A y A^+ tienen el mismo espacio columna.
- $AA^+ = A^+A$.
- $\exists U$ unitaria y K invertible: $A = U(K \oplus 0)U^*$.

PROBLEMA. Sean A_1 y A_2 dos EP-matrices. Existen dos matrices unitarias U_i y dos matrices invertibles K_i tales que

$$A_1 = U_1(K_1 \oplus 0)U_1^*, \qquad A_2 = U_2(K_2 \oplus 0)U_2^*.$$

¿Qué condición sobre U_1, U_2, K_1 y K_2 es necesaria y suficiente para que $A_1A_2 = A_2A_1$?

Aspectos topológicos de la teoría de matrices

TEOREMA. (Benítez 2006) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Equivalen

- Para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|A^{k+1} - A\| < \epsilon$.
- A es diagonalizable y $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \sqrt[k]{1}$.

Burde (2005) estudió la ecuación $XA - AX = X^p$, para $p \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA. Sea A una matriz cuadrada. Hállese la matriz X tal que alguna de las dos condiciones de debajo se cumple:

- $\|XA - XA - X^p\| < \epsilon$ para un $p \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ dados.
- Para cada $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|XA - AX - X^p\| < \epsilon$.

Teorema. Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, entonces las siguientes afirmaciones equivalen:

1. $\lim_{k\to\infty} A_k^{+} = A^{+}$.
2. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que el rango de A_k coincide con el rango de A para todo $k \geq k_0$.
3. $\sup\{\|A_k^{+}\| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Problema. ¿Existe una caracterización similar al teorema para la continuidad de la inversa de grupo?

Índice

- Diferenciabilidad en espacios de Banach.
- Análisis matricial.

3. Diseño geométrico asistido por ordenador.

Diseño geométrico asistido por ordenador

El algoritmo de de Casteljau

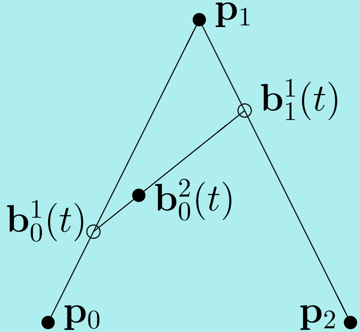
- Sean $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^3$ y $t \in [0,1]$.
- Se construyen

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$$

y

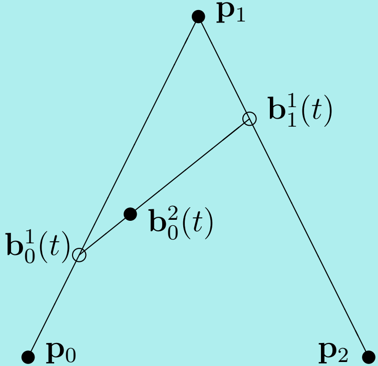
$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

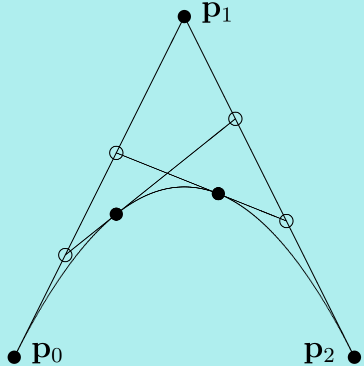


Cuando t varía entre 0 y 1, el punto $\mathbf{b}_0^2(t)$ describe una curva.

Las curvas de Bézier

- La curva $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2](t) = \mathbf{b}_0^2(t)$ se llama **curva de Bézier**.
- Los puntos $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ se llaman **puntos de control**.





El algoritmo de de Casteljau

- Sean $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^3$ y $t \in [0,1]$.
- Se construyen

$$\mathbf{b}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_i + t\mathbf{p}_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

- Luego

$$\mathbf{b}_i^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^1(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^1(t), \qquad i = 0, \ldots, n-2.$$

- Y así progresivamente hasta

$$\mathbf{b}_0^n(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^{n-1}(t) + t\mathbf{b}_1^{n-1}(t).$$

La curva $\mathbf{b}_0^n : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ se llama **curva de Bézier** con **puntos de control** $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

$$\mathbf{b}_0^n = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n].$$

Forma cerrada de las curvas de Bézier

TEOREMA. La curva generada por el algoritmo de de Casteljau con puntos de control $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ es

$$\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n](t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t)\mathbf{p}_k, \quad t \in [0, 1],$$

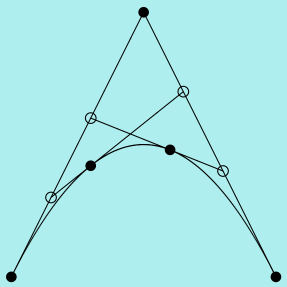
siendo $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ los **polinomios de Bernstein**.

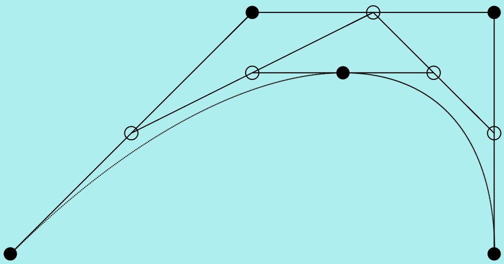
Propiedades

- $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n](0) = \mathbf{p}_0$ y $\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n](1) = \mathbf{p}_n$.
- Invarianza afín: Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es afín, entonces

$$T(\mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n](t)) = \mathcal{B}[T(\mathbf{p}_0), \ldots, T(\mathbf{p}_n)](t).$$

- Vectores tangentes.





Dos defectos del algoritmo de de Casteljau

- No se pueden dibujar cónicas excepto parábolas.
- No es proyectivamente invariante.

Breve repaso del plano proyectivo real

- En $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se define la r.b.e.

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \qquad \iff \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}.$$

- El **plano proyectivo real** es $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$.
- Sus elementos son **puntos proyectivos**.
- La proyección canónica se denota $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^2$.
- Una **recta proyectiva** es un plano en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen.
- El conjunto de las rectas proyectivas se denota por $\Lambda(\mathbb{P}^2)$.
- $\pi^* : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \Lambda(\mathbb{P}^2),\ \pi^*(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0\}$.

Los puntos afines

- La ecuación de la **recta del infinito** es $z = 0$.
- Un **punto afín** no pertenece a la recta del infinito.
- Si $\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$ es el conjunto de los puntos afines, las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{i} & \mathcal{A}(\mathbb{P}^2) \\ (x,y)^{\mathrm{T}} & \longmapsto & \pi(x,y,1)^{\mathrm{T}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\mathbb{P}^2) & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^2 \\ \pi(x,y,z)^{\mathrm{T}} & \longmapsto & \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)^{\mathrm{T}} \end{array}$$

son biyectivas y $j \circ i = I_{\mathbb{R}^2}$, $i \circ j = I_{\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)}$.

La razón doble

Sean $\pi(\mathbf{v}_1), \pi(\mathbf{v}_2), \pi(\mathbf{v}_3), \pi(\mathbf{v}_4) \in \mathbb{P}^2$ alineados tales que

$$\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{v}_4 = \gamma\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_2$$

- La **razón doble** de $\pi(\mathbf{v}_1), \pi(\mathbf{v}_2), \pi(\mathbf{v}_3), \pi(\mathbf{v}_4)$ es

$$\mathrm{rd}(\pi(\mathbf{v}_1), \pi(\mathbf{v}_2), \pi(\mathbf{v}_3), \pi(\mathbf{v}_4)) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

- La razón doble se conserva bajo las aplicaciones proyectivas.
- Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{rd}(i(\mathbf{a}), i(\mathbf{b}), i(\mathbf{c}), i(\mathbf{d})) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{ac}}/\overrightarrow{\mathbf{bc}}}{\overrightarrow{\mathbf{ad}}/\overrightarrow{\mathbf{bd}}}$$

Algoritmo (tres puntos iniciales) (Benítez, 2006)

$P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$, $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$, $u \in [0,1]$.

Se construyen

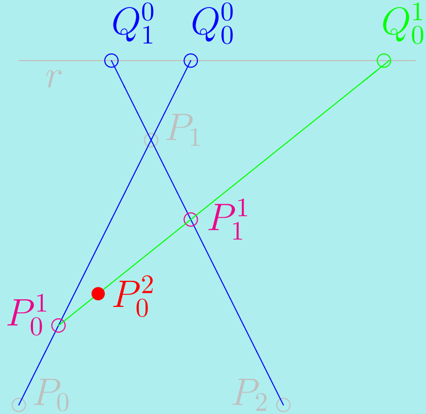
$$\begin{aligned} Q_0^0 &= r \cap \mathcal{L}(P_0, P_1), \\ Q_1^0 &= r \cap \mathcal{L}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rd}(P_0, P_1, P_0^1, Q_0^0) &= u, \\ \mathrm{rd}(P_1, P_2, P_1^1, Q_1^0) &= u, \end{aligned}$$

$$Q_0^1 = r \cap \mathcal{L}(P_0^1, P_1^1),$$

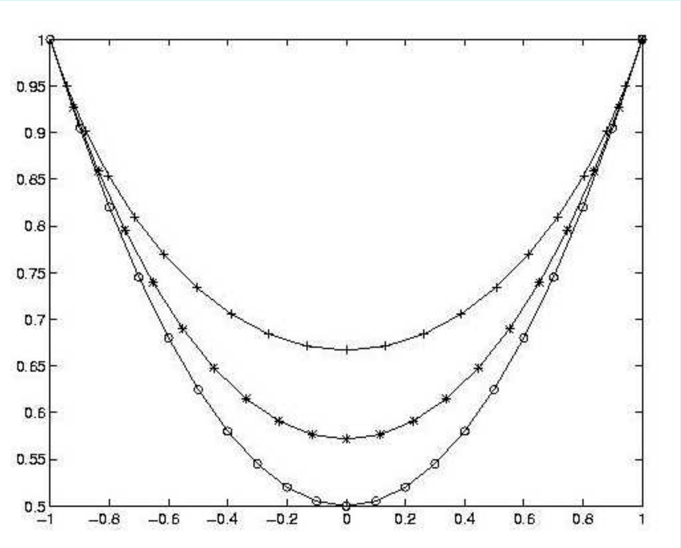
$$\mathrm{rd}(P_0^1, P_1^1, P_0^2, Q_0^1) = u.$$

El punto $P_0^2(u)$ describe una curva en $\mathbb{P}^2$.



Puntos de control: $i(-1,1), i(0,-1), i(1,1)$.

Rectas:
$y=2 \Rightarrow +$;
$y=4 \Rightarrow *$;
recta impropia $\Rightarrow \circ$.



Tres propiedades geométricas del algoritmo:

- Invarianza proyectiva.
- Dualidad.
- Si la recta auxiliar es la impropia, entonces el algoritmo se reduce al de de Casteljau.

PROBLEMA. ¿Qué ocurre si se "mueve" la recta auxiliar? ¿Es este cambio continuo?

- Dotar de una topología a $\Lambda(\mathbb{P}^2)$ (principio de dualidad).
- Dotar de una "métrica" a $\Lambda(\mathbb{P}^2)$.

Dado $P = \pi(\mathbf{v}) \in \mathbb{P}^2$, se denota $P^* = \{r \in \Lambda(\mathbb{P}^2) : P \in r\}$.
TEOREMA La siguiente aplicación es una métrica en $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus P^*$.

$$\mathrm{d}^*_P(\pi^*(\mathbf{w}_1), \pi^*(\mathbf{w}_2)) = \left\| \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} \right\|.$$

PROBLEMA. Sean $P, Q \in \mathbb{P}^2$. En $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus (P^* \cup Q^*)$ hay dos métricas: d^*_P y d^*_Q. ¿Cuál es la relación entre ambas?

Problema. Sean $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$ y $t \in [0,1]$.
Sean $r, s \in \Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P_0^*, \ldots, P_n^*\}$ tales que

$$R(r) = \alpha(P_0, \ldots, P_n; r)(t), \qquad R(s) = \alpha(P_0, \ldots, P_n; s)(t)$$

¿Cómo es una estimación de $\mathrm{d}(j(R(r)), j(R(s)))$ en términos de $\mathrm{d}^*_{P_i}(r, s)$ para $i = 0, \ldots n$?

Cónicas proyectivas

• Para $n = 2$, el algoritmo produce una cónica proyectiva.
• Una cónica proyectiva es $\mathcal{C} = \{\pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{x}^{\mathrm{T}} B \mathbf{x} = 0\}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y B es una matriz simétrica 3×3.

TEOREMA. Si P_0, P_1, P_2 no son colineales, entonces la curva producida por el algoritmo es parte de la cónica proyectiva

$$\{\pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} J A)\mathbf{x} = 0\},$$

donde $A = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^{-1}$, $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$ y $r = \pi^*(\mathbf{w})$ con $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_i = 1$ y

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Significado geométrico de la recta auxiliar

TEOREMA. Si $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ no están alineados, entonces la recta $\pi^*(\mathbf{w})$ es tangente a la curva $\beta = \alpha(P_0, P_1, P_2; \pi^*(\mathbf{w}))$.

Supongamos que existe

$$\mathbf{r}(\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} j(\beta(t)),$$

entonces

$$j(\pi^*(\mathbf{w})) \text{ es tangente en } \mathbf{r}(\infty).$$

PROBLEMA. Generalícese este algoritmo en $\mathbb{P}^3$.

Algoritmo propuesto en $\mathbb{P}^2$	Generalización en $\mathbb{P}^3$
$Q_i^j = r \cap \mathcal{L}(P_i^j, P_i^{j+1})$	???

- En $\mathbb{P}^2$ dos rectas distintas se cortan en un sólo punto.
- En $\mathbb{P}^3$ lo último no es cierto.
- En $\mathbb{P}^3$ un plano y una recta no contenida en este plano siempre se cortan en un sólo punto.

! Substituir la recta auxiliar en $\mathbb{P}^2$ por un plano auxiliar en $\mathbb{P}^3$.

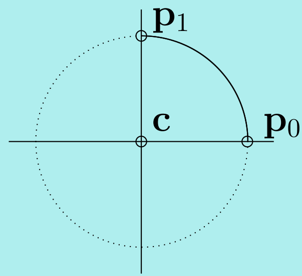
PROBLEMA Una cuádrica en $\mathbb{P}^3$ (superficie) es $\{\pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^3 : \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}\} = 0$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ y A es una matriz simétrica 4×4. La generalización directa del algoritmo describe una curva.

Ejemplo 1

Dados $\mathbf{c}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^2$ con

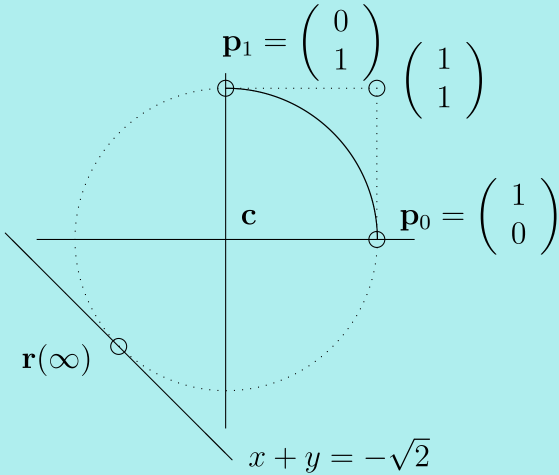
$$\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}\| = \rho, \qquad \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \perp \mathbf{p}_1 - \mathbf{c},$$

dibujar el cuadrante $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ de la circunferencia centrada en $\mathbf{c}$ y de radio ρ.

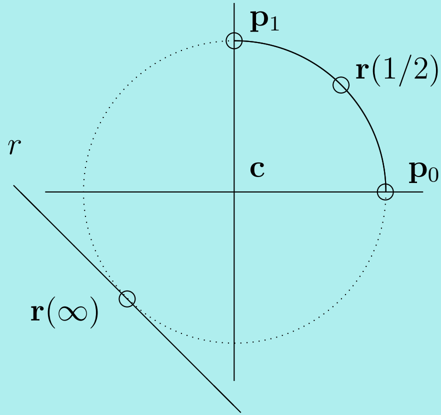


Por la invarianza afín de las curvas racionales de Bézier, podemos suponer

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

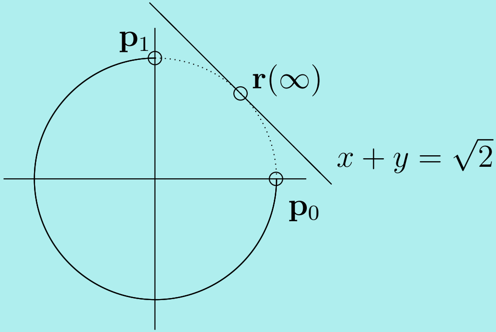


$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



$$\mathbf{r}(1/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(\infty) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{4} \\ \\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

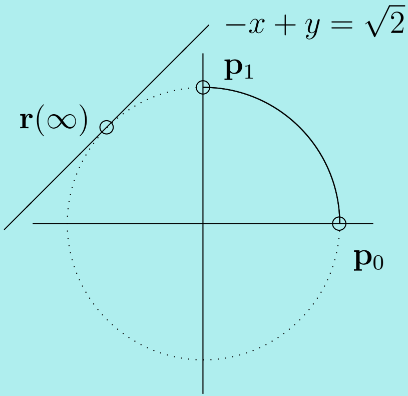
Ejemplo 2

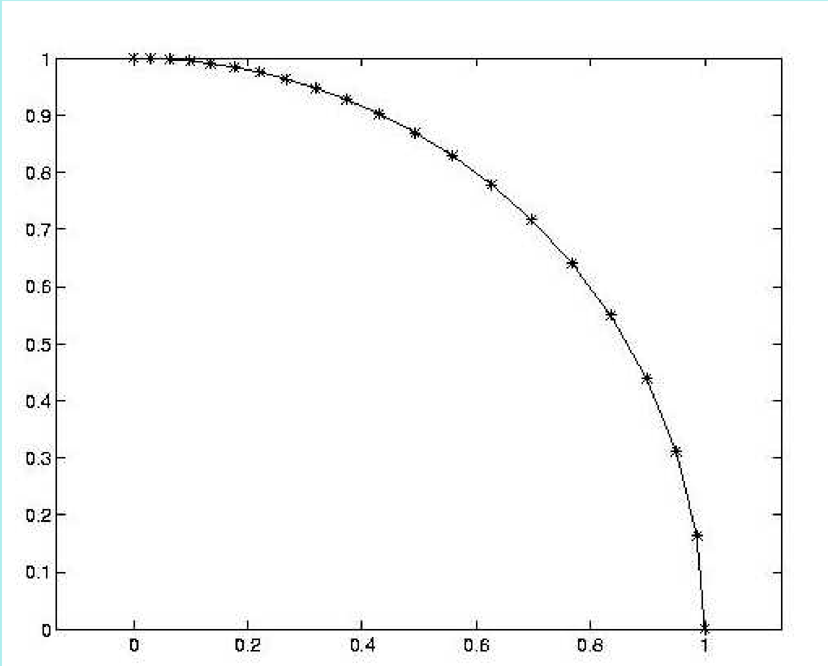


$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3: Importancia de la recta auxiliar

¿Qué ocurre si r se mueve manteniéndose tangente a la circunferencia?





1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

- Hay más puntos cerca de $\mathbf{r}(1) = (0,1)$ que de $\mathbf{r}(0) = (1,0)$.
- $\mathbf{r}(1/2) \simeq (0.4309, 0.9024)$ está más próximo a $\mathbf{r}(1)$ que a $\mathbf{r}(0)$.
- $\|\mathbf{r}'(1)\| \simeq 0.5859$ y $\|\mathbf{r}'(0)\| \simeq 3.4142$;

PROBLEMA. Sea $\mathbf{r}$ la curva producida por el algoritmo.

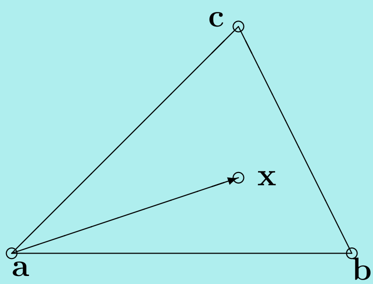
- Estúdiese la variación de la recta tangente.
- Sea $0 < t_0 < \cdots < t_m < 1$. Estímese $\mathrm{d}(\mathbf{r}(t_{i+1}), \mathbf{r}(t_i))$ para $i = 0, \ldots, m-1$.
- $\mathbf{r}(1/2)$.
- ¿Cuándo $\mathrm{d}(\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1/2)) = \mathrm{d}(\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(1/2))$?
- $\|\mathbf{r}'(0)\|$, $\|\mathbf{r}'(1)\|$.

Superficies de Bézier

DEFINICIÓN. Sean **abc** un triángulo en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}$ está en la envoltura afín de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Entonces existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

(α, β, γ) son las **coordenadas baricéntricas** de $\mathbf{x}$ respecto a **abc**.



Para $m \in \mathbb{N}$, sean

$$\Delta_m = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : i + j + k = m\},$$
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Para $(i, j, k) \in \Delta_m$ y $(x, y, z) \in T$, sean

$$B^m_{ijk}(x, y, z) = \frac{m!}{i!j!k!} x^i y^j z^k.$$

Definición. Sea $\{\mathbf{b}_{ijk} \in \mathcal{E}^n : (i, j, k) \in \Delta_m\}$ un conjunto de $(m+1)(m+2)/2$ puntos de $\mathcal{E}^n$ (llamados **red triangular de control**). La superficie $\mathbf{r} : T \to \mathcal{E}^n$ dada por

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B^m_{ijk}(x, y, z)\mathbf{b}_{ijk}$$

se llama **parche triangular de Bézier**.

ALGORITMO. (De Casteljau) Sea una red triangular de control $\{\mathbf{b}_{ijk} : (i, j, k) \in \Delta_m\}$ y $(x, y, z) \in T$.

Sean $\mathbf{b}^0_{ijk} = \mathbf{b}_{ijk}$ para $(i, j, k) \in \Delta_m$.

Supóngase construidos $\mathbf{b}^l_{ijk} \in \mathcal{E}^k$ para $l = 0, \ldots, n$ e $(i, j, k) \in \Delta_{n-l}$. Sean

$$\mathbf{b}^{l+1}_{ijk}(x, y, z) = x\mathbf{b}^l_{i+1,j,k}(x, y, z) + y\mathbf{b}^l_{i,j+1,k}(x, y, z) + z\mathbf{b}^l_{i,j,k+1}(x, y, z).$$

Entonces

$$\mathbf{b}^m_{000}(x, y, z) = \sum_{(i,j,k)\in\Delta_m} B^m_{ijk}(x, y, z)\mathbf{b}_{ijk}.$$

Problema. Generalícese el algoritmo de Casteljau para superficies de modo que sea proyectivamente invariante y que permita dibujar cuádricas en $\mathbb{P}^3$.

	Afinmente invariante	Proyectivamente invariante
Curvas	Razón simple	Razón doble
Superficies	Coord. baricéntricas	???