

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Julio Benítez López

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Presentado por Julio Benítez López

Cuerpo de Profesores Titulares de Universidad.

Área de conocimiento: Matemática Aplicada.

Una rama de la ciencia seguirá en vida mientras
sigan apareciendo problemas en abundancia.
La carencia de problemas presagia su extinción
o el fin de su desarrollo independiente.

David Hilbert

Índice General

0	Introducción	1
1	Diferenciabilidad en espacios de Banach	3
1.1	Introducción	3
1.2	Conceptos y resultados básicos	4
1.3	La subdiferencial como operador monótono	8
1.4	Continuidad de la subdiferencial	9
1.5	Aplicaciones bastantes suaves	12
1.6	Normas ásperas y funciones bump	15
1.7	Problemas Abiertos	16
2	Análisis matricial	21
2.1	Notación, conceptos y resultados básicos	21
2.2	Propiedades de matrices heredadas por combinaciones lineales	22
2.3	Aspectos topológicos de la teoría de matrices	26
2.4	Problemas abiertos	28
3	Diseño geométrico asistido por ordenador	35
3.1	Introducción	35
3.2	El algoritmo de de Casteljau y las curvas de Bézier	35
3.3	Curvas racionales de Bézier	38
3.4	Superficies de Bézier	46
3.5	Problemas abiertos	48

0 Introducción

Las horas dedicadas a la docencia por un profesor universitario son menos que las que imparte un profesor de enseñanza media o primaria. ¿Por qué? No debemos olvidar que el profesor de universidad es además de personal docente, investigador. La investigación debe ser uno de los pilares básicos en los que se base la universidad española, entre otros motivos para asegurar una docencia de calidad y un desarrollo del país en donde vivimos.

Un proyecto de investigación, es ante todo, un proyecto y como tal, una parte importante son las cuestiones abiertas. Estas preguntas sin respuesta son vitales para el buen desarrollo de las matemáticas; pues hacen avanzar a éstas de manera progresiva. En cada capítulo de este proyecto de investigación aparece una sección de *problemas abiertos*, en donde se puede observar que los temas propuestos de investigación tienen continuidad natural y se prestan a ser investigados con más profundidad.

Aunque el rigor matemático es, desde luego, una parte fundamental de toda investigación matemática, se ha intentado en este proyecto explicar de manera intuitiva e informal los distintos aspectos que aparecen, pues de este modo es posible que se puedan resolver de manera más cómoda los problemas que aquí se plantean. Como es bien sabido, Gauss dijo que “*cuando se finaliza un noble edificio no deben quedar visibles los andamios*”; pero, continuando con esta metáfora, Gauss no solamente retiró los andamios sino que destruyó los planos. Jacobi dijo que “*sus demostraciones son rígidas, heladas... lo primero que hay que hacer es descongelarlas*”; mientras que Abel se refirió a Gauss como “*un zorro que borra con la cola sus huellas de la arena*”.

Un aspecto que merece ser destacado es la diversidad de los temas propuestos como se puede observar rápidamente en el índice. La formación de un matemático debe ser completa, pues a veces de manera insospechada puede haber vínculos entre varias ramas de las matemáticas que aparentemente estás desconectadas. Como un ejemplo, varias investigaciones del capítulo dedicado al análisis matricial han surgido de cuestiones de la estadística.

Asimismo, no parece oportuno en este proyecto diferenciar entre matemática aplicada y pura; pues a menudo resultados teóricos tienen gran aplicabilidad. Podemos ver que en este proyecto se estudia el plano proyectivo real y su topología como espacio cociente que resulta ser de interés en el diseño geométrico asistido por ordenador. Un ejemplo clásico es la teoría de números, sin ninguna aplicación práctica hasta que en 1977, Rivet, Shamir y Adleman, científicos del M.I.T., idearon un sistema de cifrado público (llamado RSA) basado en la teoría de números primos.

Quiero expresar mi agradecimiento a mis compañeros de la unidad docente del Departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.I.T. de la Universidad Politécnica de Valencia por su constante apoyo moral.

0. Introducción

1 Diferenciabilidad en espacios de Banach

1.1 Introducción

El estudio de la diferenciabilidad de las funciones definidas sobre espacios de dimensión infinita ha estado presente desde el principio de la construcción de la teoría de operadores a comienzos del siglo XX. Uno de los primeros esfuerzos importantes para elaborar una teoría abstracta de espacios de funciones y de funcionales fue realizado por Fréchet en su tesis doctoral de 1906. En lo que Fréchet llamó **cálculo funcional**, intentó unificar en términos abstractos las ideas contenidas en los trabajos de Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard y otros matemáticos del siglo XIX. En su tesis, Fréchet introdujo los espacios métricos y proporcionó las nociones de continuidad y diferenciabilidad que extienden las correspondientes a funciones reales en el marco de estos espacios generales. Merece la pena recordar su definición de diferencial, pues es el modelo de definiciones posteriores realizadas en situaciones más generales. Si $y \equiv y(x)$ es una función continua definida en $[a, b]$ con valores reales, Fréchet supone la existencia de un funcional lineal L tal que

$$F[y + \eta] - F[y] - L[\eta] = \varepsilon M(\eta),$$

donde $\eta \equiv \eta(x)$ es una “variación sobre $y(x)$ ”, $M(\eta)$ es el máximo del valor absoluto de η sobre $[a, b]$ y ε tiende a 0 cuando M tiende a 0. Entonces L es, por definición, la **diferencial** de F en y .

En los años 20, Banach introdujo los espacios normados completos con el propósito de generalizar la teoría de las ecuaciones integrales. A partir de este momento se comienzan a estudiar las propiedades de la diferenciabilidad de las funciones convexas y más concretamente de la norma en el marco de estos espacios. Resultados iniciales en la teoría son, sólo por mencionar algunos, el Teorema de Mazur (1933) sobre la diferenciabilidad de las funciones convexas en espacios separables, y la caracterización de Šmulyan (1940) de la diferenciabilidad de la norma en términos del comportamiento de los funcionales soporte de la bola cerrada unidad del dual.

Comienza así el estudio de la estructura de un espacio de Banach que es consecuencia de la existencia de una norma equivalente con ciertas propiedades. El principal atractivo de este tipo de resultados radica en la posibilidad de deducir propiedades topológicas a partir de la forma de su bola unidad. Como ejemplo podemos citar los teoremas de Milman-Pettis: *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*, y de Fan-Glicksberg: *Todo espacio de Banach dual con norma Fréchet diferenciable es reflexivo*.

Nuestro principal objetivo en la parte del proyecto de investigación dedicada a la teoría de los espacios de Banach es el estudio de las diferentes formas de diferenciabilidad de funciones convexas en un espacio de Banach. Por otra parte dedicamos atención al impacto que tienen estos diferentes tipos de diferenciabilidad sobre la estructura topológica de los espacios de

Banach, y en especial, a los espacios de Asplund.

1.2 Conceptos y resultados básicos

Antes de comenzar, establecemos una notación estándar que usaremos en lo sucesivo. Los espacios de Banach que aparecen son espacios sobre los números reales. La letra mayúscula X denota, siempre que no haya confusión, un espacio de Banach. Denotaremos por B_X la bola unidad cerrada de X , esto es $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. La esfera unidad S_X es $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Una función **bump** en X es una función real definida en X con soporte acotado no vacío. El dual topológico de X , esto es $\{x^* : X \rightarrow \mathbb{R} : x^* \text{ es lineal y continua}\}$ será denotado por X^* y el dual topológico de X^* será denotado por X^{**} . Si $x \in X$, $x^* \in X^*$ y $x^{**} \in X^{**}$ entonces se denota $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$ y $\langle x^{**}, x^* \rangle = x^{**}(x^*)$.

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es **inferiormente τ -semicontinua**, donde τ es cualquier topología en X , si $\{x \in X : f(x) \leq r\}$ es τ -cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$. Se puede probar que f es τ -inferiormente semicontinua si y sólo si para todo $x \in X$ y toda red $(x_d)_{d \in D}$ que τ -converge a x , entonces $f(x) \leq \liminf_{d \in D} f(x_d)$. El **dominio efectivo** de f es el subconjunto de X dado por $\text{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$. La función f se dice **propia** si $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. Se puede demostrar muy fácilmente que si I es un conjunto arbitrario de índices y si $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ son τ -continuas para todo $i \in I$, entonces $\sup_{i \in I} f_i$ es inferiormente τ -semicontinua. En particular, toda norma equivalente en un espacio X es inferiormente w -semicontinua y que toda norma dual en X^* es inferiormente w^* -semicontinua.

El **epigrafo** de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde $D \subset X$, es el subconjunto de $X \times \mathbb{R}$ dado por $\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) : x \in D, f(x) \leq \lambda\}$. Si D es convexo, entonces f es una función convexa si y sólo si $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo.

1.1 DEFINICIÓN. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un abierto no vacío del espacio de Banach X y sea $x_0 \in D$. Se dice que

(a) f es **Gâteaux diferenciable** en x_0 si

$$df_{x_0}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$$

existe para todo $u \in B_X$ y si, al mismo tiempo, $df_{x_0} \in X^*$. El funcional lineal df_{x_0} se llama **la diferencial Gâteaux** de f en x_0 .

(b) f es **Fréchet diferenciable** en x_0 si

$$f'(x_0)(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$$

existe para todo $u \in B_X$, es uniforme para $u \in B_X$ y si, al mismo tiempo, $f'(x_0) \in X^*$. El funcional lineal $f'(x_0)$ se llama **la diferencial Fréchet**¹ de f en x_0 .

(c) Si el límite

$$d^+ f_{x_0}(u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}, \quad u \in B_X$$

¹La razón de que la diferencial Gâteaux y la diferencial Fréchet se denoten de distinta manera es únicamente por motivos históricos.

existe, este límite se llama **derivada direccional de f por la derecha en la dirección u** .

Las funciones convexas, y en particular la norma, tienen unas propiedades adicionales que hacen que su estudio merezca especial atención. La siguiente proposición, (véase, por ejemplo, [27]), caracteriza la Gâteaux diferenciabilidad de las funciones convexas.

1.2 PROPOSICIÓN. *Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa definida en un abierto convexo no vacío D del espacio de Banach X y sea $x_0 \in D$. Entonces*

- (a) *existe $d^+ f_{x_0}(u)$ para todo $u \in B_X$ y es un funcional sublineal.*
- (b) *f es Gâteaux diferenciable en x_0 si y sólo si $-d^+ f_{x_0}(-u) = d^+ f_{x_0}(u)$ para todo $u \in X$ y también si y sólo si existe un único funcional lineal $x^* \in X^*$ satisfaciendo*

$$\langle x - x_0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in D. \quad (1.1)$$

La parte (b) de la proposición anterior es importante pues caracteriza una propiedad topológica (la diferencial Gâteaux) en términos de la desigualdad (1.1). Véase la figura 1.1.

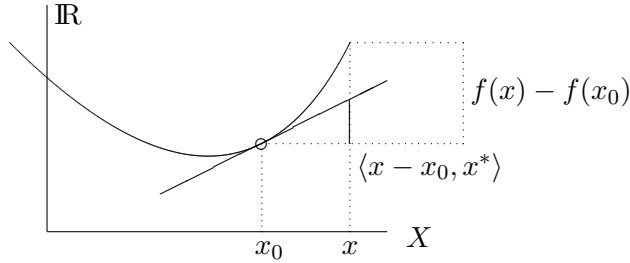


Figura 1.1:

Los funcionales lineales que satisfacen (1.1) juegan un papel importante en el estudio de las funciones convexas.

1.3 DEFINICIÓN. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente $\|\cdot\|$ -semicontinua. Si $x \in \text{dom}(f)$, se define la **subdiferencial de f en x** como el subconjunto de X^**

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in X\},$$

mientras que $\partial f(x) = \emptyset$ si $x \notin \text{dom}(f)$.

Si particularizamos la definición 1.3 al caso $f = \|\cdot\|$ obtenemos la **función dualidad de X** . En este caso se puede probar sin ninguna dificultad que para $x \in S_X$ se tiene

$$\partial \|\cdot\|(x) = \{x^* \in S_{X^*} : \langle x, x^* \rangle = 1\} = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = 1, \langle y, x^* \rangle \leq 1 \forall y \in B_X\},$$

que significa, desde el punto de vista geométrico, que el hiperplano de ecuación $\langle \cdot, x^* \rangle = 1$; donde $x^* \in \partial \|\cdot\|(x)$, pasa por el punto x y deja la bola unidad a un lado. O, equivalentemente, manejando el espacio dual, que todos los elementos de $\partial \|\cdot\|(x)$ forman la cara de B_{X^*} determinada por el hiperplano de ecuación $\langle x, \cdot \rangle = 1$.

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Notemos que una función continua convexa es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si $\partial f(x)$ consta de un sólo elemento. Por tanto, si f no es Gâteaux diferenciable en x , entonces $\text{diam}(\partial f(x)) \neq 0$. La siguiente proposición (véase [4]) muestra la relación entre $\text{diam}(\partial f(x))$ y la aplicación $y \mapsto d^+ f_x(y) + d^+ f_x(-y)$.

1.4 PROPOSICIÓN. *Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa definida en D , subconjunto abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X , y si es continua en $x \in D$, entonces*

$$\text{diam}(\partial f(x)) = \sup\{d^+ f_x(y) + d^+ f_x(-y) : y \in S_X\}.$$

Como una consecuencia inmediata se tiene que, bajo las condiciones de la proposición anterior, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) f es Gâteaux diferenciable en x .
- (b) $\partial f(x)$ consta de un sólo elemento.
- (c) $\text{diam} \partial f(x) = 0$.
- (d) $d^+ f_x(y) = d^- f_x(y)$ para todo $y \in S_X$.

La siguiente definición es importante en la teoría de diferenciabilidad de los espacios de Banach.

1.5 DEFINICIÓN. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente $\|\cdot\|$ -semicontinua. Si $x \in \text{dom}(f)$, $\varepsilon > 0$, definimos la ε -**subdiferencial** de la función f en x como*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon, \forall y \in X\}.$$

Es claro que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $\partial_{\varepsilon_1} f(x) \subset \partial_{\varepsilon_2} f(x)$. Además, se puede demostrar (véase [27]) que, bajo las condiciones de la definición 1.5, $\partial_\varepsilon f(x)$ es siempre un subconjunto w^* -cerrado no vacío de X^* para cualquier $\varepsilon > 0$.

Cuando $f = \|\cdot\|$, la definición 1.5 posee un significado geométrico aún más claro. Es fácil comprobar que si $x \in S_X$, entonces

$$\partial_\varepsilon \|\cdot\|(x) = \{y^* \in B_{X^*} : \langle x, y^* \rangle \leq 1 - \varepsilon\},$$

lo cual significa que $\partial_\varepsilon \|\cdot\|(x)$ es el subconjunto de los puntos de B_{X^*} que están entre los hiperplanos de ecuaciones $\langle x, \cdot \rangle = 1 - \varepsilon$, $\langle x, \cdot \rangle = 1$. Éste último es el hiperplano en el cual está contenido $\partial \|\cdot\|(x)$. Es decir, $\partial_\varepsilon \|\cdot\|(x)$ es una sección determinada por x en B_{X^*} .

Las funciones convexas en la recta real poseen muchos puntos de diferenciabilidad, más concretamente, si f es una función convexa definida en un intervalo abierto no vacío D de \mathbb{R} , entonces $f'(x)$ (o df_x , ya que en espacios de dimensión finita la Gâteaux diferenciabilidad coincide con la Fréchet diferenciabilidad) existe para todo punto de $D \setminus N$, donde N es un subconjunto numerable de D . El siguiente teorema se debe a Mazur y generaliza al resultado anterior.

1.6 TEOREMA (Mazur). *Si X es un espacio de Banach separable y si f es una función convexa continua definida en un abierto convexo no vacío D de X , entonces el conjunto de puntos donde f es Gâteaux diferenciable es un subconjunto G_δ denso de D .*

Observemos que hay espacios no separables en los cuales la condición del teorema de Mazur sigue siendo válida. Los intentos por caracterizar aquellos espacios en los cuales las funciones convexas y continuas son siempre genéricamente diferenciables ha motivado la siguiente terminología:

1.7 DEFINICIÓN. *Un espacio de Banach X se dice que es un espacio de Asplund si cualquier función continua convexa definida en un abierto convexo no vacío D de X es Fréchet diferenciable en un subconjunto G_δ denso de D .*

Se ha realizado un esfuerzo para encontrar condiciones geométricas suficientes para que un espacio sea de Asplund. El propio Asplund probó en [2] que *un espacio de Banach cuyo dual es estrictamente convexo es de Asplund*. Posteriormente, I. Ekeland y G. Lebourg, [11], probaron que *todo espacio con norma Fréchet diferenciable es de Asplund*. En 1978, C. Stegall, [29], consigue dar una forma definitiva a una larga serie de trabajos previos demostrando el siguiente resultado:

1.8 TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

- (i) X es un espacio de Asplund.
- (ii) X^* posee la propiedad de Radon-Nykodým².
- (iii) Todo subespacio separable de X tiene dual separable.

Durante años se conjeturó que todo espacio de Asplund admite una norma equivalente Fréchet diferenciable, conjetura errónea como ha demostrado R. Haydon, [18], encontrando un espacio $\mathcal{C}(K)$ de Asplund que ni siquiera tiene una norma Gâteaux diferenciable. A la vista de este ejemplo interesa encontrar condiciones geométricas que no necesariamente impliquen la Gâteaux diferenciabilidad de la norma para que el espacio sea de Asplund. En la búsqueda de propiedades de este tipo, se estudió la relación entre la diferenciabilidad de la norma y la aplicación dualidad de un espacio de Banach.

Dada una función continua y convexa f definida en un abierto convexo no vacío A de un espacio de Banach X podemos extender f a una función con dominio X , que seguimos denotando del mismo modo, definiendo

$$f(x) = \begin{cases} \liminf_{y \rightarrow x} f(y) & x \in \overline{A}, \\ +\infty & x \notin \overline{A}. \end{cases}$$

Se puede demostrar fácilmente que la función resultante es inferiormente semicontinua y convexa.

El siguiente concepto ha encontrado diversas aplicaciones en la teoría de los espacios de Banach.

1.9 DEFINICIÓN. *Sean X un espacio de Banach y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa e inferiormente $\|\cdot\|$ -semicontinua³. La **conjugada de Fenchel** de f es la función definida en X^* dada por*

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in X\}.$$

²Un espacio de Banach X tiene la propiedad de **Radon-Nykodým** si cualquier K acotado no vacío de X cumple que para cada $\varepsilon > 0$ existen $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$ tales que $\text{diam}(\{x \in K : \langle x, x^* \rangle > \sup_K(x^*) - \alpha\}) < \varepsilon$.

³Esta definición se puede hacer para una función propia y convexa arbitraria, véase, por ejemplo, [27].

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Es trivial demostrar que f^* es convexa. Es inferiormente w^* -semicontinua por ser el supremo de funciones w^* -continuas. Además f^* es propia, ya que si tomamos $\varepsilon > 0$, $x \in \text{dom}(f)$ y $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$, entonces

$$\langle y - x, x^* \rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon, \quad \forall y \in X.$$

Es decir, $f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle - f(x) + \varepsilon < +\infty$.

Es trivial demostrar que bajo las condiciones de la definición 1.9 entonces

$$\langle x, x^* \rangle \leq f(x) + f^*(x^*). \quad (1.2)$$

para cualquier $(x, x^*) \in X \times X^*$. Además si $\varepsilon \geq 0$, entonces $\partial_\varepsilon f(x)$ se puede caracterizar de la manera siguiente: $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ si y sólo si $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle + \varepsilon$ (aquí, hemos tomado $\partial_0 f = \partial f$). En particular, se tiene $x^* \in \partial f(x)$ si y sólo si $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.

Es sencillo probar que la conjugada de Fenchel de la norma viene dada por

$$\|x^*\|^* = \begin{cases} 0 & x^* \in B_{X^*}, \\ +\infty & x^* \notin B_{X^*}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Nótese que por (1.3), si particularizamos (1.2) para $x^* \in S_{X^*}$ se tiene $\langle x, x^* \rangle \leq \|x\|$ para cualquier $x \in X$. Ésto obviamente implica $\langle x, x^* \rangle \leq \|x\| \|x^*\|$ para cualquier $(x, x^*) \in X \times X^*$. Por eso, cuando se intenta generalizar propiedades de la norma al caso de las funciones convexas e inferiormente semicontinuas, una idea útil es substituir $\langle x, x^* \rangle \leq \|x\| \|x^*\|$ por la desigualdad (1.2).

Obsérvese que si $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, entonces f^* también es convexa, propia e inferiormente semicontinua (de hecho es inferiormente w^* -semicontinua), por lo que a f^* se le puede aplicar la definición 1.9 obteniendo la función **biconjugada de Fenchel**.

$$f^{**} = (f^*)^* : X^{**} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

El siguiente resultado, conocido como teorema de Fenchel-Moreau, muestra que esta función extiende la función original (véase [6] para una demostración sencilla que usa el teorema de Hahn-Banach en $X \times \mathbb{R}$).

1.10 TEOREMA. *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función inferiormente semicontinua y convexa. Si $x \in \text{dom}(f)$, entonces $f(x) = f^{**}(x)$.*

1.3 La subdiferencial como operador monótono

Una propiedad que se deduce fácilmente de la definición de la subdiferencial de una función convexa es la siguiente: Si f es una función continua convexa definida en el abierto convexo no vacío D , entonces

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in D, \quad x^* \in \partial f(x), \quad y^* \in \partial f(y).$$

Las aplicaciones multivaluadas que cumplen esta condición son muy importantes y han sido extensamente estudiadas desde los años sesenta en conexión con el análisis no lineal. Las siguientes definiciones son clásicas y pueden encontrarse, por ejemplo, en [27]:

1.11 DEFINICIÓN. Una aplicación multivaluada $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$, donde A es un subconjunto de un espacio de Banach X , se dice que es un **operador monótono** si

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in A, \quad x^* \in \Phi(x), \quad y^* \in \Phi(y).$$

Un subconjunto G de $X \times X^*$ es **monótono** si $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ siempre que $(x, x^*), (y, y^*) \in G$. Si $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ es un operador monótono, entonces su grafo es un subconjunto monótono. Un subconjunto monótono se dice **maximal monótono** si es maximal en la familia de subconjuntos monótonos de $X \times X^*$ ordenada por inclusión. Decimos que un operador monótono es **maximal monótono** si su grafo es un subconjunto maximal monótono.

Es fácil ver, a partir de la definición, que un operador monótono $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ es maximal monótono si y sólo si la siguiente condición es cierta: Dados cualesquiera $y \in X, y^* \in X^*$ tales que

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad x^* \in \Phi(x),$$

entonces se sigue necesariamente que $y^* \in \Phi(y)$. El siguiente teorema se debe a Rockafellar [28]).

1.12 TEOREMA. Sea X un espacio de Banach y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa e inferiormente semicontinua. Entonces ∂f es maximal monótona.

1.13 DEFINICIÓN. Un punto y de un subconjunto A de un espacio de Banach Y se dice un **punto soporte** de A si existe $y^* \in Y^*, y^* \neq 0$ tal que y^* alcanza el supremo sobre A en y . Cualquier y^* que cumpla esta definición se dice que es un **funcional soporte** de A en y , o que y^* **soporta** a A en y .

La terminología geométrica surge del hecho de que un hiperplano cerrado se dice que soporta a A si uno de los dos semiespacios cerrados que define el hiperplano contiene a A , el otro semiespacio abierto no corta a A y este hiperplano corta a A . Si y^* soporta a A en y , entonces $H = \{z \in Y : \langle z, y^* \rangle = \sup_A \langle \cdot, y^* \rangle\}$ es tal hiperplano.

La siguiente proposición (véase [4]) relaciona los funcionales soporte de un epigrafo de una función convexa con la subdiferencial; y es una consecuencia del teorema de maximalidad de Rockafellar:

1.14 PROPOSICIÓN. Sean X un espacio de Banach, f una función continua y convexa definida en un abierto convexo no vacío y x un punto de dicho abierto. Entonces, los funcionales soporte de $\text{epi}(f)$ en $(x, f(x))$ son los múltiplos positivos de los funcionales lineales $\phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ de la forma

$$\phi(y, \lambda) = \langle y, x^* \rangle - \lambda, \quad x^* \in \partial f(x). \quad (1.4)$$

1.4 Continuidad de la subdiferencial

La aplicación subdiferencial es un ejemplo de una aplicación multivaluada. La siguiente definición establece nociones de continuidad para este tipo de aplicaciones:

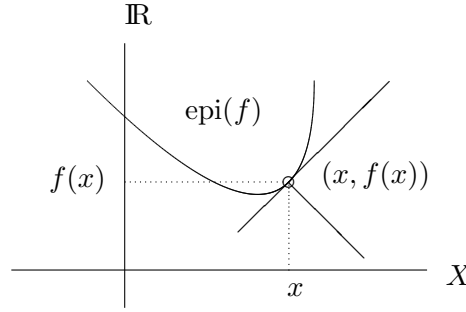


Figura 1.2: Obsérvese que la “normal apunta hacia abajo”. Éste es el significado geométrico del signo negativo de λ en (1.4).

1.15 DEFINICIÓN. Sean (A, τ) y (B, τ') dos espacios topológicos y sea una aplicación multivaluada $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$. Se dice que

- (a) Φ es **superiormente $\tau - \tau'$ -semicontinua** en $x \in A$ si para cada τ' -abierto U que verifique $\Phi(x) \subset U$, existe un τ -entorno V de x tal que $\Phi(y) \subset U$ para todo $y \in V$.
- (b) Φ es **inferiormente $\tau - \tau'$ -semicontinua** en $x \in A$ si para cada τ' -abierto U que verifique $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$, existe un τ -entorno V de x tal que $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$ para todo $y \in V$.

Nos interesa el caso en que Φ sea la subdiferencial de una función convexa y continua definida en un conjunto D abierto, convexo y no vacío de un espacio de Banach X . Siempre consideraremos al espacio de Banach X dotado de la topología de la norma, mientras que en X^* consideraremos alternativamente las topologías de la norma, la w o la w^* . Usaremos la nomenclatura **superiormente (inferiormente) τ -semicontinua** cuando τ sea una de las topologías mencionadas anteriormente sobre X^* . En la siguiente proposición se considera el caso en que τ es la topología w^* .

1.16 PROPOSICIÓN. Si f es una función continua convexa definida en el abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X , entonces la subdiferencial $x \mapsto \partial f(x)$ es superiormente w^* -semicontinua.

La demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [27]. El caso particular en el que $f = \|\cdot\|$ fue demostrado en 1964 por Cudia en [9]. La siguiente proposición (véase [4]) fue demostrada en [9] para el caso particular cuando f es la norma.

1.17 PROPOSICIÓN. Sea f una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío D del espacio de Banach X . Dado $x \in D$, entonces

- (a) f es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si ∂f es inferiormente w^* -semicontinua en x .
- (b) f es Fréchet diferenciable en x si y sólo si ∂f es inferiormente $\|\cdot\|$ -semicontinua en x .

Como se mencionó previamente, si la aplicación dualidad es univaluada en un punto x del espacio de Banach X , entonces la norma de X es Gâteaux diferenciable en x . Como interesa

encontrar condiciones geométricas más débiles que la diferenciabilidad Gâteaux que impliquen que X sea de Asplund, no hay más remedio que substituir la semicontinuidad inferior por otra noción más débil. La semicontinuidad superior ha sido poco estudiada. La razón de este desinterés se debe en, nuestra opinión, a tres razones fundamentales: No se conoce una caracterización mediante cocientes diferenciales, no es estable frente a sumas directas, y sobre todo, existe una noción parecida a la semicontinuidad superior que ha resultado ser la más adecuada a la hora de trabajar con la función dualidad. Este tipo de continuidad fue introducida en [13] y ha encontrado interesantes aplicaciones.

1.18 DEFINICIÓN. Si (A, τ) es un espacio topológico, (B, τ') es un espacio vectorial topológico y $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(B) \setminus \emptyset$. Diremos que Φ es **restringida superiormente $\tau - \tau'$ -semicontinua** en $x \in A$ si para cada U , τ' -entorno de 0 en B , existe V , τ -entorno de x en A , tal que $\Phi(y) \subset \Phi(x) + U$ para todo $y \in V$.

Es claro que la semicontinuidad superior implica la semicontinuidad restringida superior, y si $\Phi(x)$ es τ' -compacto ambas nociones coinciden. Igual que en la definición 1.15, estaremos interesados sólomente en el caso en que se considera la topología de la norma en $A \subset X$ y a $B = X^*$ le dotamos de las topologías de la norma y w . El caso en que a X^* se le dota de la topología w^* es trivial por la Proposición 1.16 y por ser $\partial f(x)$ siempre w^* -compacto (si f es continua en x).

El caso particular en donde la aplicación dualidad es restringida $\|\cdot\|$ -semicontinua superiormente fue estudiado en primer lugar en [17], probando que la aplicación dualidad es restringida $\|\cdot\|$ -semicontinua superiormente en $x \in X$ si y sólo si el límite

$$d^+ \|\cdot\|_x(u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + tu\| - \|x\|}{t}$$

(que existe para todo $u \in X$) es uniforme para $\|u\| \leq 1$. La siguiente definición fue introducida en [12].

1.19 DEFINICIÓN. Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D un abierto no vacío de un espacio de Banach X y $x \in D$. Decimos que la función f es **fuertemente subdiferenciable en x** si el límite

$$d^+ f_x(u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

es uniforme para $u \in X$.

Son bastantes los trabajos dedicados a este tipo de extensión de la diferenciabilidad Fréchet. Merecen destacarse [1, 8, 12, 13, 15, 16, 17].

Para la aplicación subdiferencial de funciones convexas y continuas definidas en un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X este último concepto tiene una apropiada caracterización geométrica, demostrada por primera vez en [17].

1.20 PROPOSICIÓN. Si f es una función convexa y continua en el abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X , entonces f es fuertemente subdiferenciable en $x \in D$ si y sólo si ∂f es restringida superiormente $\|\cdot\|$ -semicontinua en x .

De la monotonicidad de los cocientes diferenciales y del teorema clásico de Dini se deduce que cualquier norma en un espacio normado de dimensión finita es fuertemente subdiferenciable. Una especie de recíproco también es cierto, como probaron Contreras y Payá en [8]: *En todo espacio de dimensión infinita existe una norma equivalente que no es fuertemente subdiferenciable.*

1.5 Aplicaciones bastantes suaves

La siguiente nomenclatura se debe a Contreras y Payá. Apareció por vez primera en [8] con el objetivo de dar una condición geométrica suficiente para que un espacio de Banach sea de Asplund.

1.21 DEFINICIÓN. *Decimos que una función continua y convexa f definida en un abierto convexo no vacío D de un espacio de Banach X es **bastante suave** en $x \in D$ si la aplicación $\partial f : D \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ es restringida superiormente w -semicontinua en x . Análogamente decimos que $\Phi : A \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$, donde $A \subset X$, es **bastante suave** en $x \in A$, si es restringida superiormente w -semicontinua en x .*

Se pueden generalizar algunos resultados de [8, 13] en la siguiente proposición (véase [5]), que se puede considerar como el análogo del test de Šmulyan⁴ para este tipo de diferenciabilidad.

1.22 TEOREMA. *Sean f una función convexa y continua definida en un abierto convexo no vacío D de X , $x \in D$ y τ alguna de las siguientes topologías de X^* : la de la norma, la w o la w^* . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) ∂f es restringida τ -semicontinua superiormente en x .
- (b) Para todo N , τ -entorno de 0 en X^* , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\partial_\varepsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.

El caso particular cuando la función f es la norma de un espacio de Banach fue obtenido por Giles, Gregory y Sims en [13], en donde se utiliza el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Para la demostración del teorema 1.22 se utiliza lo que se puede considerar la generalización del teorema Bishop-Phelps-Bollobás para funciones convexas e inferiormente $\|\cdot\|$ -semicontinuas: El teorema de Brønsted-Rockafellar: *Sea f una función convexa continua definida en D , un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X . Entonces dados cualesquiera $x_0 \in D$, $\varepsilon > 0$, $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, existen $x_\varepsilon \in D$ y $x_\varepsilon^* \in X^*$ tales que $x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$, $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $\|x_\varepsilon^* - x_0^*\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.*

Cuando la aplicación dualidad es restringida superiormente w -semicontinua, el espacio de Banach X disfruta de numerosas propiedades. En la siguiente proposición (véase [13]) se caracteriza esta clase de continuidad.

1.23 PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y sea $x \in S_X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

⁴La norma es Fréchet (Gâteaux) diferenciable en $x \in X$ si y sóloamente para cualquier $x_n^*, y_n^* \in S_{X^*}$, $\langle x, x_n^* \rangle \rightarrow 1$, $\langle x, y_n^* \rangle \rightarrow 1$, entonces $x_n^* - y_n^*$ tiende a 0 en la topología de la norma (en la topología débil). Véase [10].

(a) $\|\cdot\|$ es bastante suave en x .

(b) Para cada w -entorno de 0 , N , en X^* , existe $\delta > 0$ tal que

$$y^* \in B_{X^*}, \langle x, y^* \rangle > 1 - \delta \Rightarrow y^* \in \partial\|\cdot\|(x) + N,$$

(c) $\partial\|\cdot\|(x)$ es denso en $\partial\|\cdot\|^{**}(x)$ para la topología $\sigma(X^{***}, X^{**})$ de X^{***} .

Se hace patente, observando las proposiciones 1.17, 1.20 y 1.23, que se echa de menos una caracterización mediante cocientes diferenciales de la propiedad “ser bastante suave”. Observemos que en la proposición anterior aparece de forma bastante natural la extensión de la norma de X a X^{**} . En la teoría de los espacios de Banach existe una generalización de tal extensión: la biconjugada de Fenchel. Este tipo de operación, como hemos visto en el teorema 1.10, se aplica a la clase de funciones convexas e inferiormente semicontinuas.

El resultado fundamental sobre funciones bastante suaves es el teorema 1.25 aparecido en [5]. El siguiente resultado, que generaliza al teorema de Goldstine⁵, es necesario para la demostración del teorema 1.25.

1.24 TEOREMA. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, entonces $\text{epi}(f^{**}) = \overline{\text{epi}(f)}^{w^*}$.

Es posible que lo siguiente ayude a comprender los problemas planteados más adelante: En la demostración estándar del teorema de Goldstine se usa el teorema de Hahn-Banach, mientras que en la prueba del teorema 1.24 se usa el teorema de Hahn-Banach en $X \times \mathbb{R}$. Esto es intuitivo si se piensa que la forma más adecuada de manejar simultáneamente puntos x de X y escalares $f(x)$ de \mathbb{R} es usar elementos $(x, f(x))$ de $X \times \mathbb{R}$.

Presentamos a continuación la extensión de los resultados de Giles, Gregory y Sims (proposición 1.23) al caso de las funciones convexas y continuas.

1.25 TEOREMA. Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y convexa, siendo D un abierto convexo no vacío de un espacio de Banach X y $x \in D$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f es bastante suave en x .

(b) Para todo N , w -entorno de 0 en X^* , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\partial_\varepsilon f(x) \subset \partial f(x) + N$.

(c) $\partial f(x)$ es $\sigma(X^{***}, X^{**})$ -denso en $\partial f^{**}(x)$.

(d) $d^+ f_x^{**} = \sup\{\langle \cdot, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\}$.

(e) Dados $\varepsilon > 0$ y $u^{**} \in S_{X^{**}}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f^{**}(x)}{t} - \sup\{\langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \varepsilon,$$

para cualquier $0 < t < \delta$.

⁵Si X es un espacio de Banach, entonces B_X es w^* -densa en $B_{X^{**}}$.

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Si X es un espacio de Banach, se tiene $\|x\| = \sup\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in B_{X^*}\}$ para todo $x \in X$. La siguiente definición tiene nexos con la anterior igualdad y ha demostrado tener aplicaciones en la topología de los espacios de Banach.

1.26 DEFINICIÓN. *Sea X un espacio de Banach y N un subespacio de X^* . Se dice que N es un subespacio **normante**, si es cerrado (en la topología de la norma) y satisface*

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in B_N\}, \quad \forall x \in X.$$

Se puede demostrar de manera sencilla, aplicando el teorema de Hahn-Banach, que un subespacio cerrado N de X^* es normante si y solamente si B_N es w^* -denso en B_{X^*} . Denotaremos por N_X la intersección de todos los subespacios cerrados normantes de X^* , que en general es un subespacio cerrado pero no siempre normante. Los subespacios normantes de X^* juegan un papel importante en cuestiones de dualidad, ya que cualquier predual isométrico de X es un subespacio de X^* normante.

Además, los subespacios normantes de X^* guardan una relación directa con la diferenciabilidad de la norma, como se puede observar en el siguiente hecho: *Si la norma es bastante suave en todo S_X y es Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$, entonces $x^* = d\|\cdot\|_x \in N_X$.* En efecto: si N es un subespacio cerrado normante de X^* , como

$$1 = \sup\{\langle x, y^* \rangle : y^* \in B_N\},$$

existe $(y_n)_{n=1}^\infty \subset B_N$ tal que $\langle x, y_n^* \rangle \rightarrow 1$. Aplicando la proposición 1.23 se puede comprobar que $y_n^* \rightarrow x^*$ en la topología w , por lo que $x^* \in \overline{B_N}^w = B_N$.

Si X admite un predual N , entonces N es un subespacio normante de X^* . Si además X^* no posee subespacios propios normantes, entonces $N = X^*$; por lo que $X^{**} = N^* = X$, es decir X es reflexivo. Como Godefroy demostró, la hipótesis de que X sea un espacio dual se puede debilitar, exigiendo únicamente la siguiente propiedad:

1.27 DEFINICIÓN. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la **propiedad de la intersección finita-infinita** (para abreviar escribiremos $IP_{f,\infty}$) si toda familia de bolas cerradas en X , con intersección vacía, contiene una subfamilia finita con intersección vacía.*

Es fácil ver que si X es un espacio de Banach dual, entonces X posee la propiedad $IP_{f,\infty}$. En efecto: sean N el predual de X y $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección de bolas cerradas tal que para todo subconjunto finito F de I se tiene $\cap_{\alpha \in F} B_\alpha \neq \emptyset$. Ya que las bolas cerradas, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, son $\sigma(X, N)$ compactas, se tiene $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha \neq \emptyset$. En particular todo espacio reflexivo posee la propiedad $IP_{f,\infty}$. El siguiente resultado se debe a G. Godefroy, si bien no aparece explícitamente en ninguno de sus trabajos.

1.28 LEMA. *Sea X un espacio de Banach que posee la propiedad $IP_{f,\infty}$ y tal que X^* no posee subespacios propios normantes. Entonces X es reflexivo.*

Como se comentó previamente hay una larga serie de trabajos donde se proporcionan condiciones geométricas que implican que el espacio es de Asplund. En 1994, Contreras y Payá (véase [8]) lograron generalizar varios resultados previos estableciendo que *todo espacio de Banach donde la norma sea bastante suave es de Asplund*. En [14], Giles y Moors probaron un resultado similar bajo una condición (formalmente) más débil, el teorema 1.29.

En el artículo mencionado de Contreras y Payá también se demostró que *Si X es un espacio de Banach con norma bastante suave, entonces X^* no tiene subespacios propios normantes*. En [4] se ha usado la condición de Giles y Moors sobre un espacio de Banach para probar que su dual no posee subespacios cerrados propios normantes. Obsérvese que la propiedad de que para alguna norma equivalente, el dual no contiene ningún subespacio propio normante y la propiedad de ser un espacio de Asplund son independientes, como se muestra en [22].

1.29 TEOREMA. *Un espacio de Banach es de Asplund si tiene una norma equivalente cuya aplicación dualidad tiene un grafo que contiene el grafo de una aplicación bastante suave.*

La prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [3].

1.30 TEOREMA. *Sea X un espacio de Banach de modo que existe $\Phi : S_X \rightarrow \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Entonces X^* no tiene subespacios propios cerrados normantes.*

El siguiente resultado muestra una aplicación directa del teorema 1.30 a la geometría de los espacios de Banach y es una generalización de un resultado de Godefroy aparecido en [15].

1.31 COROLARIO. *Sea X un espacio de Banach tal que exista $\Phi : S_X \rightarrow \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave cumpliendo $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$ para todo $x \in S_X$. Entonces cualquier subconjunto de X acotado y w -cerrado es una intersección de uniones finitas de bolas de X .*

Utilizando los resultados previos se proporcionan [3] dos caracterizaciones de la reflexividad más generales que las ya comentadas previamente.

1.32 TEOREMA. *El espacio de Banach X es reflexivo si y solamente si X tiene la propiedad $IP_{f,\infty}$ y existe $\Phi : S_X \rightarrow \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave y tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x) \forall x \in S_X$.*

El siguiente corolario es obvio:

1.33 COROLARIO. *Sea X un espacio de Banach que cumple la propiedad $IP_{f,\infty}$. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- (a) X es reflexivo
- (b) X tiene una norma equivalente bastante suave.
- (c) Existe una norma equivalente, $\|\cdot\|$, y una aplicación $\Phi : S_X \rightarrow \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial\|\cdot\|(x)$, para cualquier $x \in S_X$.

1.6 Normas ásperas y funciones bump

Las normas ásperas fueron introducidas por Leach y Whitfield en [25], Por otra parte, la existencia de funciones bump definidas en un espacio de Banach X cumpliendo propiedades de diferenciabilidad tiene un fuerte impacto en la estructura topológica de X . Baste recordar el siguiente resultado (véase [25]): *Si X es un espacio de Banach que admite un bump Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio de Asplund*. Obsérvese que de este resultado se sigue

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

en particular que si X posee una norma Fréchet diferenciable, entonces X es de Asplund, ya que es muy fácil demostrar (véase [10], pág. 10) que a partir de una norma Fréchet diferenciable se puede construir un bump Fréchet diferenciable.

1.34 DEFINICIÓN. Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach X se dice que es **áspera** si existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que para todo $x \in S_X$ se cumple

$$\limsup_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|x+h\| + \|x-h\| - 2}{\|h\|} \geq \varepsilon.$$

La siguiente proposición (véase [4]) generaliza a la anterior definición al caso de las funciones convexas e inferiormente semicontinuas:

1.35 PROPOSICIÓN. Sea X un espacio de Banach, $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia e inferiormente semicontinua, $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(f))$ y $\varepsilon > 0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\limsup_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{\|h\|} \geq \varepsilon.$

(ii) Para todo $\alpha > 0$, se tiene $\text{diam}(\partial_\alpha f(x_0)) \geq \varepsilon.$

El siguiente resultado (véase [4]) cuantifica el “grado de aspereza” de una norma en relación con la existencia de un bump que también posea un cierto grado de “aspereza”. Esto precisa lo cerca que un espacio está de ser Asplund cuando existe un bump con determinadas propiedades de “cuasi-suavidad”. Obsérvese que este resultado implica en particular que si existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que sea un bump Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio de Asplund.

1.36 TEOREMA. Sea C un subconjunto cerrado y acotado del espacio de Banach X . Si existe $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, continua y acotada inferiormente cumpliendo

(a) Existe $\delta \geq 0$ tal que, para todo $x \in \text{int}(C)$,

$$\limsup_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} \leq \delta.$$

(b) Existe $x_0 \in \text{int}(C)$ tal que $f(x_0) < \inf_{\partial C} f$ y

(c) f acotada inferiormente.

Entonces X no puede tener una norma ε -áspera para $\varepsilon > \gamma\delta/\alpha$, siendo $\alpha = \inf_{\partial C} f - f(x_0)$, $\gamma = \sup\{\|x_0 - x\| : x \in C\}$.

1.7 Problemas Abiertos

El corolario 1.33 responde de manera muy parcial a un problema que aparece implícito en el trabajo [14] de Giles y Moors.

1.37 PROBLEMA. *¿Existe un espacio X con una norma no bastante suave y en el que existe $\Phi : S_X \rightarrow \mathcal{P}(X^*) \setminus \emptyset$ bastante suave tal que $\Phi(x) \subset \partial \|\cdot\|(x)$, $\forall x \in S_X$?*

Es claro, por el corolario 1.33, que si tal contraejemplo existe, éste no debe cumplir la propiedad $IP_{f,\infty}$.

Como ya se comentó, si en un espacio de Banach X existe un bump Fréchet diferenciable, entonces X es de Asplund. ¿Existe la posibilidad de debilitar la Fréchet diferenciabilidad?

1.38 PROBLEMA. *Sea X un espacio de Banach tal que existe un bump fuertemente subdiferenciable. ¿Es X de Asplund?*

Con el fin de demostrar la validez de esta conjetura se obtuvo una respuesta parcial dada en el teorema 1.36.

Por otra parte, en la definición de Fréchet y Gâteaux diferenciabilidad (definición 1.1) y en la definición de fuertemente subdiferenciabilidad (definición 1.19) no se exige que las funciones sean convexas; sin embargo una hipótesis esencial en el teorema 1.25 es que la función sea convexa (entre otras cosas para definir la biconjugada de Fenchel y para asegurar que la biconjugada restringida a X coincide con la función original). ¿Se puede mejorar el teorema 1.25? Más precisamente:

1.39 PROBLEMA. *Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, en donde D es un abierto convexo de un espacio de Banach X . ¿Existe una caracterización mediante cocientes diferenciales para f (y sólo para f) de modo que si f es convexa, se obtenga el teorema 1.25?*

Una posible utilidad de este problema es tratar aún más de rebajar el problema 1.38, substituyendo la subdiferenciabilidad fuerte por la bastante suavidad. Sin el problema 1.39 resuelto, esto no es posible, pues un bump no puede ser convexo.

Por todo lo comentado, conviene extender la teoría comentada lo máximo posible para tratar el caso de las funciones no convexas. Primero de todo, comentaremos muy brevemente algunos aspectos del artículo [23]. En este artículo, se define la **Fréchet ε -subdiferencial** de una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $\varepsilon \geq 0$ en $x \in \text{dom}(f)$ por medio de

$$\partial_\varepsilon^F(x) = \left\{ x^* \in X^*; \liminf_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle h, x^* \rangle}{\|h\|} \geq -\varepsilon \right\}.$$

Cuando f es convexa, se puede probar fácilmente que

$$\partial_\varepsilon^F(x) = \{x^* \in X^* : f(x+h) - f(x) \geq \langle h, x^* \rangle - \varepsilon \|h\| \quad \forall h \in X\}.$$

1.40 PROBLEMA. *¿Qué relación hay entre $\partial_\varepsilon^F(x)$ y la definición 1.5?*

Más adelante, sin salirnos de [23], se definen los siguientes conceptos para una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no necesariamente convexa:

(a) La **Fréchet ε -subdiferencial limitante** de f en $x \in \text{dom}(f)$ al conjunto dado por

$$\hat{\partial}_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* : \exists (x_n, x_n^*) \in X \times X^*, x_n^* \in \partial f(x_n), f(x_n) \rightarrow f(x), x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*\}.$$

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

- (b) La función f es ε -**convexa** si para $\varepsilon \geq 0$ se cumple la siguiente desigualdad para $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \varepsilon \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|.$$

Y por último, para $\varepsilon \geq 0$, la función multivaluada $\Phi : X \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ es ε -**monótona** si para $x, y \in X$ con $\Phi(x), \Phi(y) \neq \emptyset$ se cumple que si $(x^*, y^*) \in \Phi(x) \times \Phi(y)$ entonces

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq -2\varepsilon\|x - y\|.$$

Además se dice **maximal** ε -**monótona** si no existe otra función multivaluada ε -monótona cuyo grafo incluya estrictamente el grafo de Φ .

En [23] se analizan estas definiciones y se prueban extensiones naturales a algunos teoremas comentados en las secciones previas. Entre otras podemos citar las siguientes.

- (i) Sean $\varepsilon \geq 0$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función ε -convexa. Entonces $\hat{\partial}_\varepsilon f$ es 2ε -monótona.
- (ii) Sean $\varepsilon \geq 0$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función ε -convexa e inferiormente semicontinua. Entonces $\hat{\partial}_\varepsilon f$ es maximal ε -monótona.

Parece natural extender algunos resultados mencionados previamente en las secciones anteriores al caso de las funciones ε -convexas. En los tres problemas siguientes consideraremos $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función ε -convexa, siendo $\varepsilon \geq 0$.

1.41 PROBLEMA. Si además f es continua en $x \in X$, ¿cuánto vale $\text{diam}(\hat{\partial}_\varepsilon f)$?, en el espíritu de la proposición 1.4?

Este problema está relacionado con el siguiente

1.42 PROBLEMA. Si además f es continua en $x \in X$ y si existe $K > 0$ tal que $\text{diam}(\hat{\partial}_\varepsilon f) \geq K$ para todo $\varepsilon > 0$, ¿qué le ocurre al cociente

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|}$$

cuando $h \rightarrow 0$? (obsérvese la proposición 1.35).

La herramienta fundamental para la demostración de la proposición 1.14 es el teorema de maximalidad de Rockafellar. Obsérvese que cuando f es 2ε -convexa e inferiormente semicontinua, la aplicación $\hat{\partial}_\varepsilon f$ es maximal ε -monótona. ¿Se puede generalizar la proposición 1.14?, ¿podemos intuir la situación como en la figura 1.2?

1.43 PROBLEMA. Si f es inferiormente semicontinua y continua en $x \in X$, ¿qué forma tienen los funcionales soporte de $\text{epi}(f)$ en $(x, f(x))$?

Por otra parte, dos de los resultados más importantes de [5] son los teoremas 1.24 y 1.25, ¿Se pueden generalizar al caso de las funciones ε -convexas? Un resultado central en la teoría de las funciones conjugadas (y usado en la demostración de los teoremas 1.24 y 1.25) es el

teorema de Fenchel-Moreau (teorema 1.10). Con el fin de extender el teorema de Fenchel-Moreau, en [26] se definen el siguiente concepto. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función ε -convexa. Sea $y \in X$ fijo. Definimos la función ε -conjugada $f_y^*(\varepsilon, \cdot) : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$f_y^*(\varepsilon, x^*) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) - \varepsilon \|x - y\| \}.$$

Obviamente, $f_y^*(\varepsilon, \cdot)$ es una función convexa y su conjugada de Fenchel se denota por $f_y^{**}(\varepsilon, \cdot)$. En [26] se prueba el siguiente resultado que extiende al teorema de Fenchel-Moreau: *Sea $\varepsilon \geq 0$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, inferiormente semicontinua y ε -convexa. Entonces para todos $x, y \in X$ se tiene*

$$|f(x) - f_y^{**}(\varepsilon, x)| \leq \varepsilon \|x - y\|. \quad (1.5)$$

1.44 PROBLEMA. ¿Es posible extender de alguna manera los teoremas 1.24 y 1.25 para las funciones ε -convexas?

Una posible línea de ataque de este problema puede ser el siguiente. Ya que en la demostración estándar del teorema de Fenchel-Moreau (véase [6]) y en la prueba del teorema 1.24 (véase [5]) se usa el teorema de Hahn-Banach en $X \times \mathbb{R}$ y para demostrar el teorema extendido de Fenchel-Moreau en [26] se usa un teorema de valor medio probado por Zagrodny [30], ¿es posible usar este último resultado con el fin de probar una versión extendida del teorema 1.24?

Por otra parte, en el teorema 1.25 aparece la expresión

$$\frac{f^{**}(x + tu^{**}) - f(x)}{t} - \sup \{ \langle u^{**}, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x) \} < \varepsilon, \quad (1.6)$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$ y $u^{**} \in S_{X^{**}}$. ¿Cómo influiría el término $\varepsilon \|x - y\|$ que aparece en la desigualdad (1.5), en un cociente similar al de (1.6) en la posible extensión del teorema 1.25 al caso de las funciones ε -convexas?

Para un estudio más adelantado, se propone relacionar los resultados mencionados en este proyecto con varias extensiones de la subdiferencial, como la subdiferencial de Clarke ([7]), la subdiferencial aproximada de Ioffe ([19, 20, 21]) o la subdiferencial de Kruger-Mordukhovich ([24]). Véanse [23] y las referencias allí mencionadas para relacionar estos tipos de subdiferenciales.

1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

2 Análisis matricial

2.1 Notación, conceptos y resultados básicos

Por $\mathbb{C}^{m \times n}$ se denotará el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes complejos. Para una matriz dada $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, los símbolos A^T , A^* y \bar{A} significarán la transpuesta, conjugada transpuesta y la conjugada de A , respectivamente. Si A es cuadrada, el espectro de A y el radio espectral se denotarán por $\sigma(A)$ y $\rho(A)$, respectivamente. Se denotará por $A \oplus B$ la suma directa de las dos matrices cuadradas A y B .

Una matriz cuadrada A se llama **normal** si $AA^* = A^*A$. Estas matrices han sido extensivamente estudiadas y hay muchas caracterizaciones (por ejemplo, véanse [46, 49, 64]). La más importante, sin duda, es la siguiente:

2.1 TEOREMA *Una matriz A es normal si y sólo si existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal D tales que $A = UDU^*$.*

Una matriz cuadrada A se llama **proyector** (también **idempotente**) si $A^2 = A$. La principal importancia de los proyectores radica en el famoso teorema espectral para matrices diagonalizables. La matriz A se llama **projector ortogonal** si $A^2 = A$ y $A = A^*$. Es bien conocido que los proyectores y sus generalizaciones se usan frecuentemente en diversas áreas de las matemáticas (véanse, por ejemplo, [44, 55, 61]). Una matriz A se llama **k -potente** si $A^k = A$.

Una caracterización útil de las matrices k -potentes fue dada en [41].

2.2 TEOREMA. *Sea A una matriz cuadrada. Entonces*

$$\begin{aligned} A^k = I &\iff A \text{ es diagonalizable y } \sigma(A) \subset \sqrt[k]{1}, \\ A^{k+1} = A &\iff A \text{ es diagonalizable y } \sigma(A) \subset \{0\} \cup \sqrt[k]{1}. \end{aligned}$$

Como un corolario, sorprendente a priori, podemos enunciar el siguiente resultado: Sea A una matriz hermítica que cumple $A^{k+1} = A$; si k es par, entonces $A^3 = A$ y si k es impar entonces $A^2 = I$. Lo que simplifica de manera notable el estudio de las matrices k -potentes hermíticas.

Las siguientes condiciones permiten definir diferentes inversas generalizadas para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

- (a) $AGA = A$.
- (b) $GAG = G$.
- (c) $GA = AG$ (si $m = n$).

(d) $(AG)^* = AG$.

(e) $(GA)^* = GA$.

Las siguientes definiciones son clásicas: Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, se definen

$$A\{1\} = \{G \in \mathbb{C}^{m \times n} : G \text{ cumple (a)}\}, \quad A\{1, 2\} = \{G \in \mathbb{C}^{m \times n} : G \text{ cumple (a) y (b)}\}$$

Las matrices en $A\{1\}$ se llaman **$\{1\}$ -inversas** de A y las de $A\{1, 2\}$ se llaman **$\{1, 2\}$ -inversas** de A . Una matriz que cumple (a), (b) y (c) se llama **inversa de grupo** de A (véase [38]). Es conocido que la inversa de grupo existe si y sólo si A y A^2 tienen el mismo rango, y si existe, entonces es única, siendo usual denotarla por $A^\#$. La única matriz (que existe siempre) que cumple (a), (b), (d) y (e) se llama la **pseudoinversa de Moore-Penrose** de A y se denota por A^+ .

Cuando $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*)$, la matriz A se llama **EP-matriz** (o **rango-hermítica**) y en este caso se tiene $A^+ = A^\#$ (véase [38]). En [51] se probó el siguiente resultado:

2.3 TEOREMA. *Para una matriz cuadrada A , las siguientes afirmaciones equivalen:*

(a) A es EP.

(b) $AA^+ = A^+A$.

(c) Existe una matriz unitaria U tal que $A = U(K \oplus 0)U^*$ para una matriz invertible K .

Bajo las hipótesis de este teorema, se tiene $A^+ = U(K^{-1} \oplus 0)U^*$. Obviamente, cualquier matriz normal es EP por el teorema 2.1. También es obvio que cualquier matriz invertible es EP.

Una **familia finita conmutativa** es un conjunto finito de matrices en la que cada par de la familia conmuta bajo la multiplicación. Un conjunto finito de proyectores $\{A_i\}_{i=1}^n$ se dice **disjunto** si $A_i A_j = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$. El siguiente resultado es bien conocido y muestra ser sorprendentemente útil en la teoría de las ecuaciones matriciales (véase [52]).

2.4 TEOREMA. *Sea $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ un conjunto finito de matrices.*

(a) *Si todas las matrices de \mathcal{F} son diagonalizables, entonces \mathcal{F} es una familia conmutativa si y sólo si existe una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $S^{-1}AS$ es diagonal para cada $A \in \mathcal{F}$.*

(b) *Si todas las matrices de \mathcal{F} son normales, entonces \mathcal{F} es una familia conmutativa si y solamente si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que U^*AU es diagonal para cada $A \in \mathcal{F}$.*

2.2 Propiedades de matrices heredadas por combinaciones lineales

Un problema general que ha sido estudiado recientemente es el siguiente: Dadas dos matrices del mismo tamaño A y B que cumplen las propiedades \mathcal{P}_A y \mathcal{P}_B respectivamente

y si a, b son dos números complejos no nulos, ¿qué deben cumplir las matrices A y B y los escalares a y b para que la combinación lineal $aA + bB$ cumpla otra determinada propiedad? Parece ser que el primer problema de este tipo fue planteado en [31], en donde se resolvió el siguiente problema.

2.5 PROBLEMA RESUELTO. *Sean A y B dos proyectores distintos y no nulos. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea otro proyector.*

El siguiente problema (véase [32]) en ser resuelto fue el siguiente:

2.6 PROBLEMA RESUELTO. *Sea A un proyector no nulo y B una matriz tripotente no nula del mismo orden. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea otro proyector.*

En [45] fue resuelto de manera incompleta el siguiente problema, que fue resuelto correctamente en [36].

2.7 PROBLEMA RESUELTO. *Sean A y B dos proyectores distintos y no nulos del mismo orden. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea tripotente.*

En los tres artículos en donde se resuelven los problemas 2.5, 2.6 y 2.7 se distinguen claramente las situaciones en las que $AB = BA$ y $AB \neq BA$. Además, no había una forma general de demostración. ¿La hay? En los problemas 2.5 y 2.6 la técnica consistió en desarrollar $(aA + bB)^2 = a^2A^2 + b^2B^2 + ab(AB + BA)$. En el problema 2.7 se desarrolló la expresión

$$(aA + bB)^3 = a^3A^3 + a^2b(A^2B + ABA + BA^2) + ab^2(AB^2 + BAB + B^2A) + b^3B^3.$$

Esto es demasiado tedioso y claramente imposible de generalizar para estudiar cuándo se cumple $(aA + bB)^{k+1} = aA + bB$. Afortunadamente, el uso del teorema 2.4 facilita el caso conmutativo. Para aplicar este último teorema se debe aplicar el teorema 2.1.

Podemos citar el siguiente problema (véase [39]) resuelto gracias al teorema 2.4 y a las caracterizaciones del teorema 2.2:

2.8 PROBLEMA RESUELTO. *Sea A un proyector no nulo y B una matriz $k+1$ -potente no nula tales que $AB = BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea otro proyector.*

Comentamos muy brevemente la resolución, pues ayudará a entender el resto del capítulo. La idea es trabajar con la expresión $aA + bB$ en su forma más simple posible, es decir, en forma diagonal. Esto es posible pues A y B son diagonalizables y $AB = BA$. Por medio de una diagonalización simultánea, podemos suponer que $A = A_1 \oplus A_2$ y $B = B_1 \oplus B_2$, en donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son matrices diagonales y cumplen $A_i^2 = A_i$ y $B_i^{k+1} = B_i$. Como las matrices A_i son proyectores, por el teorema 2.2 se tiene $\sigma(A_i) \subset \{0, 1\}$ y por tanto, reordenado los valores propios de A podemos suponer $A = I \oplus 0$. Ahora es fácil estudiar cuándo $aA + bB$ es un proyector, ya que $aA + bB$ es una matriz diagonal: en efecto basta estudiar expresiones escalares del tipo $a\alpha_i + b\beta_i \in \{0, 1\}$ siendo $\alpha_i \in \sigma(A) \subset \{0, 1\}$ y $\beta_i \in \sigma(B) \subset \{0\} \cup \sqrt[k]{1}$.

La misma técnica permitió resolver el siguiente problema planteado en [41]:

2.9 PROBLEMA RESUELTO Sean A y B dos proyectores no nulos y distintos tales que $AB = BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea una matriz $k + 1$ -potente.

La diagonalización simultánea permite afirmar que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los valores propios de A y que si β_1, \dots, β_n son los valores propios de B , entonces $a\alpha_i + b\beta_i \in \{0\} \cup \sqrt[k]{1}$ para $1 \leq i \leq n$. El estudio de estas ecuaciones es simple, pues como A y B son proyectores, entonces $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq n$. Así pues, el teorema 2.4 permite reducir el problema 2.9 a un problema de sistemas de ecuaciones lineales.

En [50] se introdujo el siguiente concepto: Una matriz cuadrada A se dice que es un **proyector generalizado** si $A^* = A^2$. En [33] se resolvió un problema análogo al problema 2.5, si se substituye “proyector” por “proyector generalizado”; sin embargo, la prueba dada en [33] es muy computacional. En el caso conmutativo, el uso del teorema 2.4 permite simplificar la prueba y extender el resultado. Siguiendo a [40], una matriz A se llama **k -proyector generalizado** si $A^k = A^*$. El concepto de **proyector hipergeneralizado** también fue introducido por Gross y Trenkler en [50], en donde se muestran varias propiedades de este tipo de matrices. Un proyector hipergeneralizado K es una matriz cuadrada que cumple $K^2 = K^+$. En [40] se resuelve el siguiente problema:

2.10 PROBLEMA RESUELTO. Sean A y B dos $k + 1$ -proyectores generalizados tales que $AB = BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea un $k + 1$ -proyector generalizado.

La diferencia fundamental con lo ya comentado, es que hay que usar el teorema 2.4; pero para matrices normales (es trivial ver que si $A^k = A^*$, entonces A es normal). De hecho, en [40] se prueba que una matriz cuadrada A cumple $A^k = A^*$ si y sóloamente si A es normal y $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \sqrt[k+1]{1}$.

La dificultad de esta serie de problemas se hace patente si observamos que en [35] sólo se resolvió el problema siguiente:

2.11 PROBLEMA RESUELTO. Sean A y B dos proyectores hipergeneralizados no nulos tales que existen dos escalares α y β de modo que

$$AB = BA = \alpha A^2 + \beta B^2. \quad (2.1)$$

Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones sobre A y B tales que $aA + bB$ es un proyector hipergeneralizado.

¿Y qué ocurre para el caso no conmutativo? En [41] se resolvió el siguiente problema

2.12 PROBLEMA RESUELTO. Sean A y B dos proyectores tales que $AB \neq BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea una matriz $k + 1$ -potente.

Comentemos brevemente el formalismo de la solución. Las matrices A , B y $aA + bB$ son diagonalizables (pero no simultáneamente, pues no conmutan). Para simplificar la ecuación

$C = aA + bB$, podemos diagonalizar o bien A , o bien B , o bien C . ¿Cuál interesa diagonalizar? Desde luego, la más complicada, que es C (pues las otras dos matrices cumplen una ecuación simple, a saber, $X^2 = X$). Ahora se tiene que $aA + bB = S(\lambda_1 I \oplus \cdots \oplus \lambda_m I)S^{-1}$ para alguna matriz invertible S . Por tanto, el problema se reduce a encontrar los escalares $a, b \in \mathbb{C}$ y las condiciones sobre A, B tales que

$$a(S^{-1}AS) + b(S^{-1}BS) = \lambda_1 I \oplus \cdots \oplus \lambda_m I,$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \{0\} \cup \sqrt[k]{1}$. Obsérvese que de esta manera se evita desarrollar la expresión $(aA + bB)^{k+1}$, siendo este cálculo extremadamente engorroso puesto que A y B no conmutan. Desde luego, todo lo “interesante” que le ocurre a A y a B , le ocurre a $S^{-1}AS$ y a $S^{-1}BS$ (por ejemplo, si A es un proyector, entonces $S^{-1}AS$ lo es, o si $AB \neq BA$, entonces $(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) \neq (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)$, etc...). Partiendo las matrices $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ por bloques como $\lambda_1 I \oplus \cdots \oplus \lambda_m I$ y tras bastantes cálculos y lemas previos se llega a la solución del problema 2.12.

Desde luego, el significado de la palabra “interesante” depende del enunciado de cada problema. Las condiciones que aparecen en el problema 2.12 son invariantes por la transformación $X \mapsto SXS^{-1}$. Los problemas relativos a las matrices normales, matrices hermíticas, perpendicularidad, pseudoinversas de Moore-Penrose, ... son invariantes por una transformación $X \mapsto UXU^*$, donde U es unitaria, y por tanto habría que usar el teorema 2.4, pero en la versión de matrices normales.

Se demuestra así que la teoría espectral juega un papel importante en la teoría de las ecuaciones matriciales relacionadas con la conmutatividad¹. Asimismo, la técnica de las matrices por bloques se torna una herramienta indispensable para tratar estas cuestiones. Uno de los lemas necesarios para resolver el problema 2.12 es el siguiente:

2.13 LEMA. *Si A y B son dos proyectores del mismo orden y si a, b son dos números complejos tales que $AB \neq BA$ y $aA + bB$ es $k+1$ -potente, entonces existen $\alpha, \beta \in \{0\} \cup \sqrt[k]{1}$ tales que $a + b = \alpha + \beta$ y $\alpha \neq \beta$.*

Obsérvese que si se particulariza este lema para el caso no conmutativo del problema 2.5 se obtiene que $a + b = 1$. Comentemos muy brevemente la demostración del lema 2.13, sólo para $k = 1$ para comprender el uso de las matrices por bloques. Si $A, B, aA + bB$ son proyectores entonces

$$(a^2 - a)A + (b^2 - b)B + ab(AB + BA) = 0. \quad (2.2)$$

Como existe una matriz S invertible de modo que $A = S(I \oplus 0)S^{-1}$, de (2.2) se sigue

$$(a^2 - a) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b^2 - b) \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} + ab \begin{pmatrix} 2X & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

Obsérvese que como $AB \neq BA$ entonces $A \neq I$ y $A \neq 0$, por lo que en (2.3) están todos los bloques. Además por tener $AB \neq BA$ entonces $Y \neq 0$ ó $Z \neq 0$. Fijándonos en (2.3) se tiene $(b^2 - b + ab)Y = 0$ y $(b^2 - b + ab)Z = 0$; de donde se deduce que $a + b = 1$.

En [34] se resolvió el siguiente problema que generaliza al problema 2.6:

¹Recuérdese el teorema 2.4 o el siguiente resultado clásico: Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces existe $X \neq 0$ tal que $AX = XB$ si y sólo si $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$.

2.14 PROBLEMA RESUELTO. Sean A, B y C tres proyectores distintos y no nulos tales que $AB = BA = 0$. Encuéntrense los números complejos no nulos a, b y las condiciones sobre A, B y C tales que $aA + bB + cC$ sea un proyector.

La generalización es clara, puesto que bajo las condiciones y la notación del problema 2.14 y si $a = 1, b = -1$, entonces la matriz $aA + bB$ es claramente tripotente.

En [37] fue resuelto el siguiente problema que generaliza a los problemas planteados en [34, 59]

2.15 PROBLEMA RESUELTO. Sean A, B, C tres proyectores no nulos tales que alguna de las tres características siguientes se cumple:

- (a) $AB = BA, AC = CA, BC = CB$.
- (b) $AB = BA, AC = CA, BC \neq CB$.
- (c) $AB = BA, AC \neq CA, BC \neq CB$.

Encuéntrense todos los números complejos no nulos a, b, c y las condiciones sobre A, B, C tales que $aA + bB + cC$ sea un proyectos.

2.3 Aspectos topológicos de la teoría de matrices

La introducción de métodos analíticos o topológicos en la teoría de matrices ha sido muy provechosa y estudiada, en particular cuando se estudian problemas perturbados (véase, por ejemplo, [48, 63]). Pero estos métodos no sólo han sido útiles en estimaciones cuantitativas; sino también en la teoría general. Un resultado clásico es el siguiente (véase, por ejemplo, [52]): el conjunto de las matrices diagonalizables de orden n es denso en $\mathbb{C}^{n \times n}$. Este resultado de tipo topológico, permite dar una demostración muy breve del todavía más clásico teorema de Cayley-Hamilton. O también, podemos afirmar que dada una sucesión de matrices unitarias, existe una subsucesión suya convergente (puesto que el conjunto de matrices unitarias de orden n es compacto en $\mathbb{C}^{n \times n}$). Otro resultado clásico, el teorema de Bauer-Fike, (véase, por ejemplo, [48, 52]) es bastante útil cuando se estudian perturbaciones de valores propios:

2.16 TEOREMA. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalizable con $A = SDS^{-1}$ y $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Sea $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si $\hat{\lambda}$ es un valor propio de $A + E$, entonces hay algún valor propio λ_i de A para el cual $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq k_\infty(S)\|E\|_\infty$, donde k_∞ denota el número de condición respecto a la norma matricial $\|\cdot\|_\infty$.

En [41] se estudiaron las propiedades topológicas de las matrices $k + 1$ -potentes. Denotemos $\mathcal{G}^n(k) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^{k+1} = A\}$. El siguiente resultado extiende algunos resultados conocidos sobre matrices tripotentes y cuadripotentes aparecidos en [50].

2.17 TEOREMA. Sean $r, s, k \in \mathbb{N}$. Entonces

- (a) $r|k$ si y sólo si $\mathcal{G}^n(r) \subset \mathcal{G}^n(k)$.
- (b) $\mathcal{G}^n(r) \cap \mathcal{G}^n(s) = \mathcal{G}^n(\text{mcd}(r, s))$.

(c) Si $r|k$, entonces $\mathcal{G}^n(r)$ es cerrado y abierto en $\mathcal{G}^n(k)$.

Los dos primeros apartados son fáciles de demostrar usando el teorema 2.2. Para hacernos una idea de los métodos topológicos, comentemos brevemente la idea intuitiva de la prueba del tercer apartado. Sea $A \in \mathcal{G}^n(r)$. Si se perturba ligeramente la matriz A , gracias al teorema 2.16, los valores propios perturbados varían muy poco. Pero si forzamos que las perturbaciones de A estén en $\mathcal{G}^n(k)$, los valores propios han de estar en $\{0\} \cup \sqrt[k]{1}$. Como además $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \sqrt[r]{1}$, la única posibilidad admisible es que los valores propios de las matrices perturbaciones de A estén en $\{0\} \cup \sqrt[r]{1}$; en otras palabras, estas perturbaciones han de estar en $\mathcal{G}^n(r)$.

Para entender la utilidad de este tipo de resultados, observemos que si queremos describir el conjunto $\mathcal{S}(k) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : (aA + bB)^{k+1} = aA + bB\}$ para dos matrices dadas A y B (no necesariamente proyectores), se tiene que si $r|k$, entonces $\mathcal{S}(r)$ es unión de componentes conexas de $\mathcal{S}(k)$. De hecho, basta definir $f : \mathcal{S}(k) \rightarrow \mathcal{G}^n(k)$ dada por $f(z, w) = zA + wB$, entonces, ya que $\mathcal{G}^n(r)$ es un cerrado y abierto de $\mathcal{G}^n(k)$, la continuidad de f implica que $\mathcal{S}(r) = f^{-1}(\mathcal{G}^n(r))$ es cerrado y abierto en $\mathcal{S}(k)$.

Por otra parte, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la sucesión $(A^k)_{k=1}^\infty$ ha sido usada muchas veces en las matemáticas aplicadas, por ejemplo, en las cadenas lineales de Márkov o la serie de Neuman. Los siguientes hechos útiles son bien conocidos (véase, entre otros, [57, Cap. 7]):

- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ si y sólo si $\rho(A) < 1$.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ existe si y sólo si $\rho(A) < 1$ o si no, $\rho(A) = 1$, siendo $\lambda = 1$ el único valor propio en la circunferencia unidad y la multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ coincide con su multiplicidad geométrica.

Podemos rebajar las condiciones $A^k = I$ y $A^{k+1} = A$ del modo siguiente:

$$\text{Para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|A^k - I\| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

$$\text{Para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|A^{k+1} - A\| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Ya que en un espacio normado de dimensión finita, todas las normas son equivalentes, se tiene que si A satisface las propiedades (2.4) o (2.5) para una cierta norma, entonces A satisface (2.4) o (2.5), respectivamente, para cualquier norma. En términos topológicos, la propiedad (2.4) equivale a decir que $I \in \text{cl}(\{A^k : k \geq 1\})$, donde $\text{cl}(\mathcal{X})$ es la clausura de \mathcal{X} .

El conjunto de matrices cumpliendo (2.4) es estrictamente más amplio que el conjunto de matrices cumpliendo $A^k = I$. En efecto, sea $\phi \in \mathbb{R}$ tal que $\phi/2\pi \notin \mathbb{Q}$, es fácil ver que $\mathcal{X} = \{e^{i\phi}, e^{2i\phi}, \dots\}$ no es un subconjunto finito de \mathbb{C} , ahora, el clásico teorema de Kronecker² asegura que \mathcal{X} es denso en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, luego $1 \in \text{cl}(\mathcal{X})$, por tanto $I \in \text{cl}(\{A^k : k \geq 1\})$, donde $A = (e^{i\phi}) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$. Además, es trivial ver que no existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $A^k = I$.

El teorema 2.18 (véase [42]) caracteriza las matrices cumpliendo las propiedades (2.4) y (2.5) por medio de la teoría espectral. La idea intuitiva es la siguiente: Si una matriz A cumple $A^k = I$, se tiene que A es diagonalizable y su espectro está contenido en $\sqrt[k]{1}$. A medida que k crece, el conjunto $\sqrt[k]{1}$ va “llenando la circunferencia unidad de \mathbb{C} ” hasta que “cuando $k \rightarrow \infty$ ”, se tiene que de una forma absolutamente informal

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

²Si $\phi \in \mathbb{R}$, entonces $\{e^{i\phi}, e^{2i\phi}, \dots\}$ es o bien finito o bien denso en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2.18 TEOREMA. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces A satisface la propiedad (2.4) si y sólo si A es diagonalizable y todo valor propio de A tiene módulo 1. Además, la matriz A cumple la propiedad (2.5) si y sólo si A es diagonalizable y todo valor propio de A tiene módulo 1 o bien es nulo.*

Puede probarse fácilmente de la definición que si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cumple (2.4) entonces A es invertible. De hecho, si A no fuera invertible, entonces $\{A, A^2, \dots\} \subset \mathcal{S}$, where \mathcal{S} denota el subconjunto de $\mathbb{C}^{n \times n}$ de las matrices no invertibles. Nótese que \mathcal{S} es la imagen inversa del cerrado $\{0\}$ bajo la función continua \det , por lo que el conjunto \mathcal{S} es cerrado. Luego si A cumple (2.4) entonces $I \in \text{cl}(A, A^2, \dots) \subset \text{cl}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, que es claramente una contradicción. Pero no es evidente que A^{-1} también cumple (2.4). El teorema 2.18 permite probar de forma cómoda el siguiente resultado (véase [42]):

2.19 COROLARIO. *Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ cumple (2.4) entonces A es invertible y A^{-1} cumple (2.4).*

Asimismo, en [42] se prueban varios resultados relativos a las matrices que cumplen las propiedades (2.4) y (2.5) que muestran lo provechoso que es manejar simultáneamente conceptos topológicos y algebraicos.

2.4 Problemas abiertos

El problema resuelto 2.15 induce al siguiente problema:

2.20 PROBLEMA. *Sean A, B, C tres proyectores no nulos tales que $AB \neq BA$, $AC \neq CA$, $BC \neq CB$. Encuéntrense todos los números complejos no nulos a, b, c y las condiciones sobre A, B, C tales que $aA + bB + cC$ sea un proyector.*

Por otra parte, en vista de los resultados obtenidos, parece muy difícil la generalización de los problemas 2.5 y 2.15 a un número arbitrario de proyectores A_1, \dots, A_m . Se puede suponer sin ninguna pérdida de generalidad que los proyectores son linealmente independientes, ya que si no, en la combinación lineal $a_1 A_1 + \dots + a_m A_m$, donde $a_i \in \mathbb{C}$, se puede disminuir el número de sumandos. Además si la familia $\{A_1, \dots, A_m\}$ fuese conmutativa, se puede aplicar el teorema 2.4.

El caso no conmutativo del problema 2.8 está aún por resolver:

2.21 PROBLEMA. *Sea A un proyector no nulo y B una matriz $k + 1$ -potente tales que $AB \neq BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones que deben verificar A y B para que $aA + bB$ sea otro proyector.*

Con el fin de resolver este problema, podemos asegurar que existe una matriz invertible S tal que $S^{-1}BS$ es diagonal, digamos $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, en donde $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i$. Ahora podemos simplificar este problema substituyendo B por D y A por $S^{-1}AS$. Si particularizamos para el caso de las matrices de orden 2 y hacemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

en donde $\lambda \neq \mu$ (si fueran iguales, entonces $AB = BA$). Como $aA + bB$ y A son proyectores se tiene

$$a^2A + b^2B^2 + ab(AB + BA) = aA + bB,$$

de donde se puede obtener

$$a + b(\lambda + \mu) = 1. \quad (2.6)$$

Podemos observar que esta relación es muy parecida al resultado del lema 2.13.

2.22 PROBLEMA. ¿Se puede generalizar el argumento que demuestra (2.6) para matrices de orden n ? ¿Puede servir la relación (2.6) para resolver el problema 2.21, al igual que el lema 2.13 sirvió para resolver el problema 2.12?

Para la deducción de (2.6) no se supone que $B^{k+1} = B$, de hecho, por una transformación de similaridad, sólo se supone que B es diagonalizable.

2.23 PROBLEMA. Sea A un proyector y B una matriz diagonalizable del mismo orden que A . Encuéntrense los números complejos a y b y las condiciones sobre A y B tales que $aA + bB$ sea un proyector.

Es claro que si $AB = BA$, entonces se puede aplicar el teorema 2.4, puesto que como A y $aA + bB$ son diagonalizables y conmutan entre ellas, entonces B es diagonalizable.

Obsérvese que el problema 2.23 generaliza de golpe los problemas 2.5, 2.6, 2.8 y 2.21. Asimismo tiene relación con los problemas 2.14 y 2.15, puesto que, bajo las condiciones de estos dos problemas, se tiene que $aA + bB$ es diagonalizable (puesto que es una combinación lineal de dos matrices diagonalizables que conmutan).

El último paso es eliminar la hipótesis de la diagonalizabilidad sobre B . De forma más precisa:

2.24 PROBLEMA. Sea A un proyector y B una matriz del mismo orden que A . Encuéntrense los números complejos a y b y las condiciones sobre A y B tales que $aA + bB$ sea un proyector.

A nuestro juicio, hay dos maneras posibles de atacar este último problema.

- (i) Si en los problemas previos se hace $B = SDS^{-1}$, siendo D diagonal, ahora hay que hacer $B = SJS^{-1}$, en donde J es la forma canónica de Jordan de B .
- (ii) Como el conjunto de matrices diagonalizables de orden n es denso en $\mathbb{C}^{n \times n}$, dada la ecuación $aA + bB = (aA + bB)^2$, se plantea la ecuación perturbada $a_\varepsilon A_\varepsilon + b_\varepsilon B_\varepsilon = (a_\varepsilon A_\varepsilon + b_\varepsilon B_\varepsilon)^2$ para B_ε diagonalizable y $\|B_\varepsilon - B\| < \varepsilon$. ¿Es posible que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\varepsilon, b_\varepsilon) = (a, b)$?

Podemos definir $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ dada por

$$\Phi(X, Y) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (xX + yY)^2 = xX + yY\}.$$

Y puesto que en los problemas previos se copnsidera la combinación lineal $aA + bB$, en donde A es un proyector, podemos restringir la aplicación Φ a un conjunto menor. Denotemos por $\mathbb{C}_p^{n \times n}$ el conjunto de los proyectores de orden n .

2. Análisis matricial

2.25 PROBLEMA. *Estúdiense las propiedades topológicas de Φ . ¿Qué ocurre si se restringe Φ a $\mathbb{C}_P^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n}$?*

En vista de la ecuación (2.6) podemos preguntarnos si se cumple la siguiente conjetura:

2.26 CONJETURA. *Sea A un proyector y B una matriz del mismo orden que A tales que $AB \neq BA$. Si $aA + bB$ es un proyector, entonces existen dos valores propios de B , sean λ y μ , tales que*

$$1 = a + b(\lambda + \mu). \quad (2.7)$$

La idea intuitiva de este resultado es la siguiente. Si la ecuación (2.6) fuese cierta para matrices diagonalizables de orden n , por la continuidad de los valores propios frente a perturbaciones de la matriz, entonces la Conjetura 2.26 tiene toda la apariencia de ser verdadera. Aunque no podremos afirmar que $\lambda \neq \mu$, puesto que si $(\lambda)_{n \geq 1}$ y $(\mu)_{n \geq 1}$ son dos sucesiones convergentes tales que $\lambda_n \neq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en general no es cierto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$.

Desde luego, el problema 2.24 es fácil si A y B conmutan, ya que, como A y $aA + bB$ son diagonalizables, por el teorema 2.4, la familia $\{A, B, aA + bB\}$ es simultáneamente diagonalizable.

Supóngase ahora que la conjetura 2.26 ha sido resuelta en sentido afirmativo. Si llamamos $C = aA + bB$, entonces $B = \alpha A + \gamma C$, en donde $\alpha = -a/b$, $\gamma = 1/b$ y las matrices A y C son proyectores tales que $AC \neq CA$ (puesto que $AB \neq BA$). Substituyendo en (2.7) obtenemos que existen dos valores propios de $\alpha A + \gamma C$, digamos λ y μ , tales que $\alpha + \gamma = \lambda + \mu$.

Este tipo de resultados es importante, puesto que en ocasiones es deseable encontrar los valores propios de combinaciones lineales de dos matrices dadas. Por ejemplo, recientemente se ha estudiado mucho la matriz de **Google** (el famoso buscador de internet) por su creciente utilidad. Esta matriz se define como una combinación convexa de una matriz estocástica S y una matriz de rango 1. Más concretamente

$$G = (1 - \alpha)\mathbf{1}\mathbf{v}^T + \alpha S,$$

en donde $\alpha \in [0, 1]$, el vector $\mathbf{1}$ es la columna formada por unos, y el vector fila \mathbf{v} tiene sus componentes no negativas y $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$ (véase, por ejemplo, [62]). Observemos que $(\mathbf{1}\mathbf{v}^T)^2 = \mathbf{1}(\mathbf{v}^T\mathbf{1})\mathbf{v}^T = \mathbf{1}\mathbf{v}^T$, puesto que $\mathbf{v}^T\mathbf{1} = \|\mathbf{v}\|_1 = 1$. En otras palabras, la matriz $\mathbf{1}\mathbf{v}^T$ es un proyector.

Para finalizar este tipo de problemas, es evidente que podemos intentar eliminar en el problema 2.11 la condición (2.1) planteando el siguiente problema:

2.27 PROBLEMA. *Sean A y B dos proyectores hipergeneralizados no nulos tales que $AB = BA$. Encuéntrense los números complejos no nulos a y b y las condiciones sobre A y B tales que $aA + bB$ es un proyector hipergeneralizado.*

Supongamos que X es un proyector hipergeneralizado. Como $X^2 = X^+$, entonces $XX^+ = X^+X$, y por tanto X es una matriz EP. Por el teorema 2.3, existe una matriz unitaria U y una matriz invertible K de modo que $X = U(K \oplus 0)U^*$. Usando ahora que

$$X^2 = U(K^2 \oplus 0)U^*, \quad X^+ = U(K^{-1} \oplus 0)U^*, \quad X^2 = X^+,$$

se obtiene $K^3 = I$. Luego existe una matriz invertible S tal que $K = SDS^{-1}$, en donde D es una matriz diagonal cuyas entradas están en $\sqrt[3]{1}$. Podemos factorizar X como sigue:

$$X = U \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} SDS^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U^*.$$

Si llamamos

$$L = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

tenemos $X = L(D \oplus 0)L^{-1}$, en donde D es una diagonal cuyas entradas están en $\sqrt[3]{1}$.

Sin embargo, esta factorización no caracteriza a los proyectores hipergeneralizados. Un ejemplo simple es el siguiente: Sean las matrices $L, X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ dadas por

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L^{-1}.$$

Fácilmente se obtiene que

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que ahora, no podemos usar la diagonalización simultánea para resolver el problema 2.27. Si queremos resolver este problema por medio de la diagonalización simultánea, podemos intentar resolver antes el siguiente problema.

2.28 PROBLEMA. Sean A_1 y A_2 dos EP-matrices. Sabemos que existen dos matrices unitarias U_i y dos matrices invertibles K_i tales que $A_i = U_i(K_i \oplus 0)U_i^*$ para $i = 1, 2$. Obsérvese que las matrices K_1 y K_2 en general no tienen el mismo tamaño. ¿Qué condición sobre U_1, U_2, K_1 y K_2 es necesaria y suficiente para que $A_1A_2 = A_2A_1$?

Dos problemas parecidos a este último fueron estudiados en [53, Cap. 3] y en [56], en donde se estudiaron la descomposición en valores singulares simultánea y la descomposición polar simultánea, respectivamente.

Por último, debido a algunos artículos recientes, podemos plantearnos algunos problemas más.

En [43], se estudió la ecuación matricial $XA - AX = X^p$, para un natural p dado, aunque en este artículo se menciona que a partir de la teoría de las álgebras de Lie, surgen las ecuaciones matrices

$$X_iA_j - A_jX_i = X_jX_i \tag{2.8}$$

para $1 \leq i, j \leq n$, en particular se obtiene la ecuación $XA - AX = X^2$. Sin embargo, las ecuaciones (2.8) se dejan sin estudiar. Así tenemos el siguiente problema:

2.29 PROBLEMA. Sean A_1, \dots, A_n matrices cuadradas. Hállense las matrices X_1, \dots, X_n tales que se cumple (2.8).

También, en el espíritu de [42], se puede plantear el siguiente problema

2.30 PROBLEMA. Sea A una matriz cuadrada. Hállase la matriz X tal que alguna de las dos condiciones de debajo se cumple:

2. Análisis matricial

- (i) $\|XA - AX - X^p\| < \varepsilon$ para un $p \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ dados.
- (ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que $\|XA - AX - X^p\| < \varepsilon$.

Otro artículo que nos llamó la atención fue [47]. En este artículo, se establece una fórmula del tipo de Sherman-Morrison para $(A + B)^+$. En este artículo se estableció el siguiente resultado:

2.31 TEOREMA. Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) = \text{rango}(A + B)$. Entonces

$$(A + B)^+ = (I - S)A^+(I - T) + SB^+T, \quad (2.9)$$

donde

$$S = (P_{R(B^*)}P_{R(A^*)^\perp})^+, \quad T = (P_{R(A^*)^\perp}P_{R(B^*)})^+. \quad (2.10)$$

Para un subespacio \mathcal{Y} , se denota $P_{\mathcal{Y}}$ la proyección ortogonal sobre \mathcal{Y} . Asimismo, en [47], se demuestra que la hipótesis $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) = \text{rango}(A + B)$ es esencial para el teorema 2.31. Sin embargo, en el artículo no se menciona las otras pseudoinversas. En particular se puede plantear el siguiente problema:

2.32 PROBLEMA. ¿Hay alguna fórmula parecida a (2.9) cuando se intenta desarrollar la expresión $(A + B)^\#$?

A nuestro juicio, este problema tiene dos dificultades:

- (i) Es difícil usar métodos topológicos, puesto que la aplicación $X \mapsto X^\#$ no es continua (Tómese, por ejemplo, la sucesión $x_n = 1/n$. Se tiene que $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^\# = 0$, y sin embargo, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^\#)$ no existe).
- (ii) Es improbable que en el análogo a (2.10) aparezcan las proyecciones ortogonales, puesto que la pseudoinversa de Moore-Penrose está intimamente ligada al cálculo de aproximaciones mediante proyecciones ortogonales.

Respecto a la continuidad de la pseudoinversa de Moore-Penrose, podemos citar el siguiente resultado clásico.

2.33 TEOREMA. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $(A_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$, entonces las siguientes afirmaciones equivalen:

- a) $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^+ = A^+$.
- b) Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que el rango de A_k coincide con el rango de A para todo $k \geq k_0$.
- c) $\sup\{\|A_k^+\| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

La equivalencia entre (a) y (b) ya fue probada por el propio Penrose en [58]. La equivalencia entre (a) y (c) fue probada en [54] en el ambiente más general del conjunto de los operadores continuos en un espacio de Hilbert. En [60] se proporciona un resumen de la continuidad de las pseudoinversas de Moore-Penrose y de Drazin.

El siguiente problema está, según nuestro conocimiento de la teoría actual, por resolver.

2.34 PROBLEMA. *¿Existe una caracterización similar al teorema 2.33 para la continuidad de la inversa de grupo?*

En este tipo de problemas es obligatorio observar que si $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ en donde $n \neq m$, entonces $X^+ \in \mathbb{C}^{m \times n}$, asimismo, merece la pena darse cuenta que $\mathbb{C}^{n \times m}$ y $\mathbb{C}^{m \times n}$ son distintos conjuntos. Por tanto, aunque se tenga $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se debe considerar que X^+ no está en el mismo conjunto que X . Esta situación es análoga a cuando se considera el dual topológico de \mathbb{R}^n . Se cumple que $(\mathbb{R}^n)^*$ y \mathbb{R}^n son algebraicamente isomorfos; pero hoy en día nadie escribe $\mathbb{R}^n \equiv (\mathbb{R}^n)^*$. Sin embargo, sí se escribe $\mathbb{R}^n \equiv (\mathbb{R}^n)^{**}$; esta situación tiene su contrapartida matricial: para una matriz dada X se cumple $X = (X^+)^+$.

La situación descrita en el párrafo anterior no ocurre con la inversa de grupo puesto que una de las condiciones es $XX^\# = X^\#X$. Esto implica que tanto X como $X^\#$ deben pertenecer al mismo conjunto.

2. Análisis matricial

3 Diseño geométrico asistido por ordenador

3.1 Introducción

La representación de curvas más usada en el diseño por ordenador fue descubierta de manera independiente por Bézier y por de Casteljau (quienes trabajaron para las empresas automovilísticas Renault y Citroën respectivamente). En 1959 de Casteljau redactó un informe secreto en donde apareció un algoritmo con el fin de generar por ordenador curvas sencillas e intuitivas de manipular. Bézier en el principio de la década de los 60 derivó de forma diferente el mismo tipo de curvas. Los trabajos de Bézier y de Casteljau estaban orientados a la industria automovilística. Ahora estas curvas (en su versión plana) son la base de muchos programas informáticos de diseño gráfico (como *Adobe Illustrator* o *Corel Draw*) y de varios tipos de fuentes de letras (como *PostScript* o *TrueType*).

Por \mathcal{E}^k se denotará el espacio afín euclídeo k -dimensional, siendo $k = 2$ o $k = 3$ los valores usuales en el diseño asistido por ordenador. Fijado un sistema de referencia afín en \mathcal{E}^k , un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}^k$ puede identificarse de manera unívoca por un vector de \mathbb{R}^k (las coordenadas de \mathbf{p} en este sistema de referencia); pero es conveniente diferenciar el espacio afín euclídeo \mathcal{E}^k y el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^k . De una manera informal: los elementos de \mathcal{E}^k responden a la pregunta *¿dónde?*, mientras que los elementos de \mathbb{R}^k responden a la pregunta *¿hacia dónde?* (véase [71] para una mayor información). Recuérdense las siguientes operaciones válidas para puntos y vectores:

- Si $\mathbf{p} \in \mathcal{E}^k$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$, entonces $\mathbf{p} + \mathbf{v} \in \mathcal{E}^k$.
- Si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{E}^k$, entonces $\mathbf{p} - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$.
- Si $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathcal{E}^k$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i \in \mathcal{E}^k$.

3.2 El algoritmo de de Casteljau y las curvas de Bézier

El siguiente algoritmo ideado por de Casteljau permite dibujar una curva a partir de $n + 1$ puntos (véase [70] para un estudio más profundo).

3.1 ALGORITMO DE DE CASTELJAU. *Dados los puntos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{E}^k$ y $t \in [0, 1]$.*

Sean $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Supongamos que los puntos $\mathbf{b}_i^k(t)$ han sido construidos para $k = 0, \dots, j$ e $i = 0, \dots, n - k$. Ahora, para cada $i = 0, \dots, n - j - 1$:

Sean

$$\mathbf{b}_i^{j+1}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^j(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^j(t) \quad (3.1)$$

para $j = 0, \dots, n-1$.

El punto $\mathbf{b}_0^n(t)$ es el punto con parámetro t en la curva $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n] : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}^k$.

Los puntos $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ se llaman **puntos de control** y la curva final se llama **curva de Bézier** asociada a los puntos $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$. Véase la parte izquierda de la figura 3.1 en la que se ha aplicado el algoritmo de de Casteljau con tres puntos iniciales. A medida que t varía entre 0 y 1, el punto $\mathbf{b}_0^2(t)$ describe una curva, como se puede ver en la parte derecha de la figura 3.1.

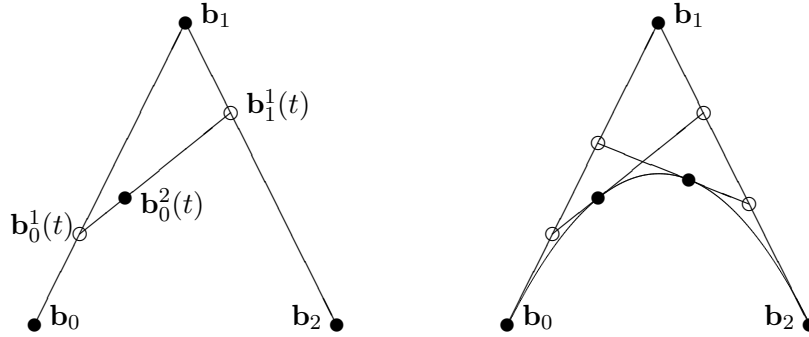


Figura 3.1: El algoritmo de de Casteljau.

En la figura 3.2 se ha dibujado una curva creada por el algoritmo de de Casteljau con cuatro puntos iniciales.

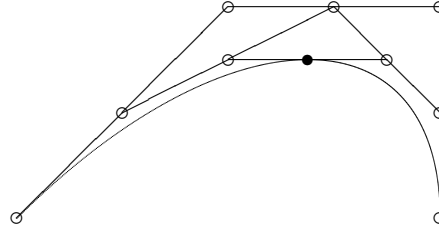


Figura 3.2: Una cúbica de Bézier.

Las curvas de Bézier se calculan de forma recursiva mediante el algoritmo de de Casteljau; sin embargo es conveniente tener una forma explícita para estudiar las propiedades de estas curvas. Esta forma no recursiva fue descubierta por Bézier independientemente.

3.2 TEOREMA. Sean $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{E}^k$ y $t \in [0, 1]$. Se tiene

$$\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i, \quad (3.2)$$

en donde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ para $0 \leq i \leq n$ son los **polinomios de Bernstein**¹.

¹Estos polinomios fueron introducidos por Bernstein (1880-1968) en 1913 al demostrar el Teorema de aproximación de Weierstrass.

Una propiedad importante de los polinomios de Bernstein es $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$, puesto que $1 = (t + (1 - t))^n$. Esta propiedad implica que en la expresión (3.2) se tiene que $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n](t) \in \mathcal{E}^k$ para todo t debido a las operaciones válidas entre puntos y vectores vistas en la introducción.

Las curvas de Bézier son importantes desde el punto de vista del diseño por ordenador por las siguientes razones:

Invarianza afín. Las aplicaciones afines juegan un papel importante en el diseño de objetos, pues a menudo, éstos deben ser trasladados, girados, escalados, ... Supóngase que se ha dibujado la curva de Bézier $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n]$ y a continuación se ha de dibujar la transformada de esta curva mediante una aplicación afín $T : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$; es decir, se tiene que dibujar la curva $T(\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n])$. La invarianza afín permite resolver este problema de dos modos:

$$T(\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n]) = \mathcal{B}[T(\mathbf{b}_0), \dots, T(\mathbf{b}_n)].$$

La propiedad de la envoltura convexa. La curva de Bézier siempre está contenida en el polígono cuyos vértices son los puntos de control (como se ve en las figuras 3.1 y 3.2).

Interpolación inicial y final. La curva de Bézier pasa por el primer y último punto de control.

Pseudocontrol local. ¿Qué se tiene que hacer para modificar una curva de Bézier? ¿Qué ocurre si se mueve un punto de control? Sean las curvas

$$\alpha(t) = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n](t), \quad \beta(t) = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{q}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_n](t).$$

Es muy fácil probar que $\alpha(t) - \beta(t) = B_k^n(t)(\mathbf{p} - \mathbf{q})$.

Vectores tangentes. En el diseño gráfico es importante calcular tangentes a las curvas de Bézier. Se observa en la figura 3.1 que el segmento que une $\mathbf{b}_0^1(t)$ con $\mathbf{b}_1^1(t)$ es tangente a la parábola en $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2](t)$. Algo similar ocurre para cúbicas (véase la figura 3.2). Por esta razón, el algoritmo de de Casteljau calcula la tangente sin coste adicional.

A continuación se muestran algunas desventajas de las curvas de Bézier y cómo han sido resueltas.

- Si una curva tiene un trozo recto, por el teorema fundamental del álgebra, toda la curva debe ser recta. Por tanto, es imposible diseñar una curva que contenga partes rectas y no rectas. La solución es sencilla: diseñar por separado trozos de curvas que se unen.
- Si se desea generar curvas complicadas, el grado del polinomio debe ser elevado y por tanto los cálculos se ralentizan. La solución es la misma que la del punto previo: diseñar curvas de grado bajo que se ensamblan de forma adecuada.
- Es imposible usar curvas de Bézier para dibujar circunferencias o hipérbolas (véase [72]). Hay dos posibles soluciones: una es aproximar un trozo de circunferencia mediante una cúbica y la otra solución es usar las curvas racionales de Bézier.
- El algoritmo de de Casteljau es afínmente invariante; pero no es proyectivamente invariante. La solución es usar las curvas racionales de Bézier.

3.3 Curvas racionales de Bézier

3.3 DEFINICIÓN. Una **curva racional de Bézier** con **puntos de control** $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{E}^k$ y **pesos** $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Es decir, la curva $\mathbf{r}(t)$ es la proyección central de la curva de Bézier en \mathcal{E}^{k+1} con puntos de control $(w_0 \mathbf{b}_0, w_0), \dots, (w_n \mathbf{b}_n, w_n)$. Véase [69, 70, 72] para un estudio más profundo.

En [65] se presentó una construcción geométrica para derivar esta clase de curvas usando conceptos únicamente de la geometría proyectiva. Esta construcción extiende al algoritmo de de Casteljau

Ahora, en aras de una mayor legibilidad, se establecerán las ideas básicas de la geometría proyectiva plana y la notación usada (se pueden consultar [67, 68, 73] para estudiar las propiedades del plano proyectivo real y sus usos en los gráficos por ordenador). En $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se establece la siguiente relación de equivalencia:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}.$$

El **plano proyectivo real**, denotado por \mathbb{P}^2 , es el conjunto cociente $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} / \sim$. Los elementos de \mathbb{P}^2 se llaman **puntos proyectivos**. La proyección canónica de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sobre \mathbb{P}^2 se denotará por π . Nótese que $\pi(\mathbf{v}_1) = \pi(\mathbf{v}_2)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$.

Una **recta proyectiva** en \mathbb{P}^2 es un plano en \mathbb{R}^3 que pasa por el origen. El conjunto de todas las rectas proyectivas será denotado por $\Lambda(\mathbb{P}^2)$. Se define $\pi^* : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \Lambda(\mathbb{P}^2)$ como sigue: $\pi^*(\mathbf{w})$ es la recta proyectiva en \mathbb{P}^2 de ecuación $\mathbf{w}^T \mathbf{x} = 0$. Nótese que $\pi^*(\mathbf{w}_1) = \pi^*(\mathbf{w}_2)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{w}_2$. Se dice que el punto proyectivo $\pi(\mathbf{v})$ está en la recta $\pi^*(\mathbf{w})$ si \mathbf{v} está en el plano $\pi^*(\mathbf{w})$, o escrito de otro modo, $\mathbf{w}^T \mathbf{v} = 0$ y se denota $\pi(\mathbf{v}) \in \pi^*(\mathbf{w})$. También se dice que la recta $\pi^*(\mathbf{w})$ pasa por $\pi(\mathbf{v})$.

Si P y Q son dos puntos proyectivos distintos, existe una única recta proyectiva pasando por P y Q , tal recta será denotada como $\mathcal{L}(P, Q)$. Es fácil ver que el punto proyectivo R está sobre $\mathcal{L}(P, Q)$ si y sólo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no todos ceros de modo que $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}$, donde $\pi(\mathbf{u}) = R$, $\pi(\mathbf{v}) = P$ y $\pi(\mathbf{w}) = Q$. Si r y s son dos rectas proyectiva distintas, existe un único punto proyectivo P tal que $\{P\} = r \cap s$.

La razón doble se conserva bajo cualquier transformación proyectiva. Esta cantidad se define como sigue: Sean los puntos proyectivos P_1, P_2, P_3, P_4 colineales, luego podemos escribir $\mathbf{v}_3 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2$ para algunos vectores no nulos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ con $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$ para $i = 1, \dots, 4$. La **razón doble** de P_1, P_2, P_3, P_4 es

$$\text{rd}(P, Q, R, S) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Puede probarse (véase por ejemplo [68]) que esta definición está bien hecha, es decir, no depende del representante de P_i .

La **recta del infinito** es la recta proyectiva de ecuación $z = 0$. Un **punto afín** es un punto proyectivo que no pertenece a la recta del infinito. Si $\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$ denota el conjunto de

todos los puntos afines, se pueden establecer las siguientes biyecciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^2 & \xrightarrow{i} & \mathcal{A}(\mathbb{P}^2) \\ (x, y)^T & \mapsto & \pi(x, y, 1)^T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathbb{P}^2) & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}^2 \\ \pi(x, y, z)^T & \mapsto & \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)^T \end{array}$$

Es trivial observar que $j \circ i = I_{\mathcal{E}^2}$ e $i \circ j = I_{\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)}$, donde I denota la aplicación identidad.

En [65] se describió el siguiente algoritmo.

3.4 ALGORITMO. Sean los puntos proyectivos $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$, la recta proyectiva $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ tal que $P_i \notin r$ para todo $i = 0, \dots, n$ y sea $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sean $P_i^0(u) = P_i$ para $i = 0, \dots, n$.

Supóngase que los puntos $P_i^k(u)$ han sido contruidos para $k = 0, \dots, j$ e $i = 0, \dots, n - k$. Ahora, para cada $i = 0, \dots, n - j - 1$:

- Si $P_i^j(u) = P_{i+1}^j(u)$, entonces sea $P_i^{j+1}(u) = P_i^j(u)$.
- Si $P_i^j(u) \neq P_{i+1}^j(u)$, entonces defínase $Q_i^j(u)$ como la intersección de las rectas proyectivas $\mathcal{L}(P_i^j(u), P_{i+1}^j(u))$ y r . Sea $P_i^{j+1}(u)$ en la recta $\mathcal{L}(P_i^j(u), P_{i+1}^j(u))$ tal que

$$\text{rd}(P_i^j(u), P_{i+1}^j(u), P_i^{j+1}(u), Q_i^j(u)) = u,$$

para $j = 0, \dots, n - 1$.

El punto proyectivo $P_0^n(u)$ es el punto de la curva $\alpha(P_0, \dots, P_n; r) : I \rightarrow \mathbb{P}^2$ cuyo parámetro es u , donde I es un intervalo de \mathbb{R} con $1 \notin I$.

En la figura 3.3 se muestra el algoritmo 3.4. En la parte de la izquierda se ha empezado con tres puntos iniciales y en la de la derecha con cuatro, en donde los puntos marcados con ‘o’ son los P_{ij} y los puntos marcados con ‘*’ son los Q_{ij} .

Se puede probar que todos los puntos $P_i^j(u)$ no están en la recta r siempre que $u \neq 1$. Haciendo el cambio $u = t/(t - 1)$ se puede reformular el algoritmo previo de forma algebraica:

3.5 ALGORITMO. Sean los puntos proyectivos $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$, la recta proyectiva $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ tales que $P_i \notin r$ para todo $i = 0, \dots, n$ y sea $t \in \mathbb{R}$.

Sean $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\pi^*(\mathbf{w}) = r$ y $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ con $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$.

Hágase $\mathbf{v}_i^0(t) = \mathbf{v}_i / \mathbf{w}^T \mathbf{v}_i$ para $i = 0, \dots, n$.

Supóngase que los vectores $\mathbf{v}_i^k(t)$ han sido contruidos para $k = 0, \dots, j$ e $i = 0, \dots, n - k$. Ahora, para cada $i = 0, \dots, n - j - 1$, sea

$$\mathbf{v}_i^{j+1}(t) = (1 - t)\mathbf{v}_i^j(t) + t\mathbf{v}_{i+1}^j(t), \quad (3.4)$$

para $j = 0, \dots, n - 1$ e $i = 0, \dots, n - j - 1$.

Entonces $\pi(\mathbf{v}_0^n(t))$ es el punto dado por el Algoritmo 3.4.

Veamos la razón de que el algoritmo 3.4 es la generalización natural del algoritmo de de Casteljaú a la geometría proyectiva. Es bien conocido que la geometría afín se obtiene a partir de la geometría proyectiva fijando una recta específica llamada recta del infinito (véase [68]).

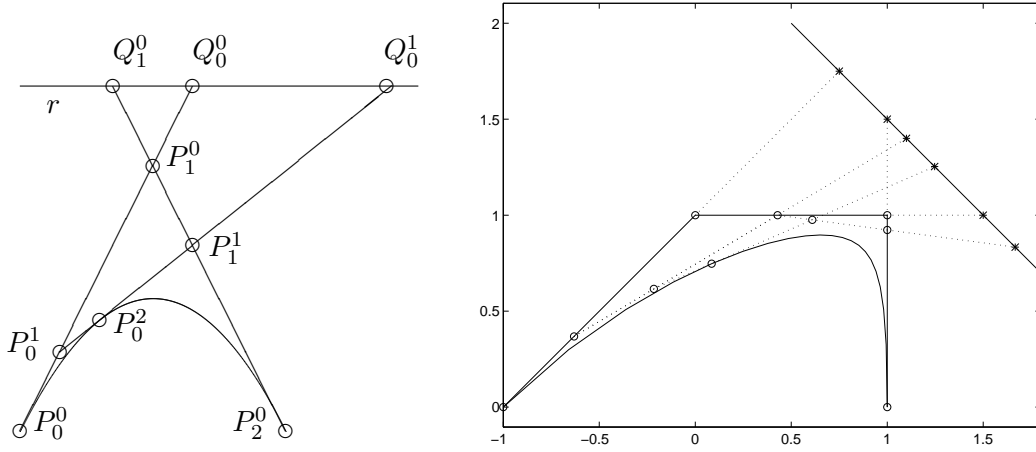


Figura 3.3: El algoritmo 3.4.

Hay que pensar que el algoritmo de de Casteljau es un “algoritmo afín” (de hecho, el paso más importante de este algoritmo, la ecuación (3.1) es una razón simple que se conserva mediante afinidades). Sin embargo, la razón simple no se transforma mediante proyectividades. ¿Cómo se puede generalizar la ecuación (3.1) a la geometría proyectiva? Se sabe que la razón doble se transforma mediante proyectividades y que si un punto de los cuatro involucrados en la razón doble “tiende al infinito”, entonces la razón doble “tiende” a la razón simple. Ahora es claro que debemos modificar (3.1) de modo que aparezca la razón doble. Pero en (3.1) aparecen tres puntos y en la razón doble cuatro puntos, de aquí la necesidad de introducir la recta auxiliar r en el algoritmo 3.4. Ahora, de un modo informal, si esta recta r se aproxima a la recta del infinito, entonces el algoritmo 3.4 se aproxima al algoritmo de de Casteljau.

El algoritmo 3.4 permite deducir dos consecuencias geométricas:

Invarianza proyectiva: Debido a que el algoritmo se basa sólo en conceptos proyectivos, es evidente que este algoritmo es invariante bajo cualquier transformación proyectiva.

Dualidad: Es conocido el principio de dualidad de la geometría proyectiva: para cualquier teorema proyectivo, es cierto otro resultado simétrico reemplazando los papeles de rectas y puntos. Podemos dualizar el algoritmo 3.4 observando que la salida del dual del algoritmo 3.4 es un conjunto de rectas.

Se puede comprobar que el algoritmo 3.4 generaliza al de de Casteljau: Sean $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ puntos de \mathcal{E}^2 . Si aplicamos el algoritmo 3.4 a los puntos proyectivos $P_0 = i(\mathbf{b}_0), \dots, P_n = i(\mathbf{b}_n)$ y a la recta del infinito r , obtenemos que $P_i^j(t) \in \mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$ para todos $i, j, t \in \mathbb{R}$. Luego existen $\mathbf{b}_i^j(t) \in \mathcal{E}^2$ tales que $\mathbf{b}_i^j(t) = j(P_i^j(t))$. Además se puede probar fácilmente que

$$\mathbf{b}_i^{j+1}(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^j(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^j(t).$$

Esta última ecuación es el paso principal en el algoritmo de de Casteljau.

En la figura 3.4 se pueden ver tres curvas creadas con el algoritmo 3.4. Los puntos de control son $i(-1, 1)$, $i(0, -1)$ y $i(1, 1)$. La curva con '+' está creada con el algoritmo de de Casteljaú. Las curvas con '*' y 'o' han sido dibujadas usando las rectas afines $y = 4$ e $y = 2$ respectivamente. Obsérvese que si la recta r se aproxima a la recta del infinito, entonces la curva se acerca a la parábola dibujada con el algoritmo de de Casteljaú.

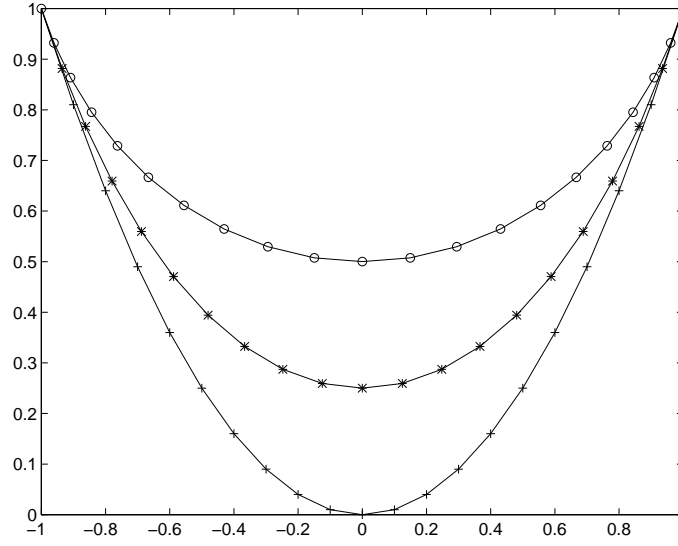


Figura 3.4: Tres curvas dibujadas con el algoritmo 3.4.

Se puede probar el siguiente resultado:

3.6 TEOREMA. Sean $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$ y $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ tales que $P_i \notin r$ para $i = 0, \dots, n$. Entonces

$$\alpha(P_0, \dots, P_n; r)(t) = \pi \left(\sum_{i=0}^n \frac{B_i^n(t)}{\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i \right),$$

donde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$, $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$ y $\pi^*(\mathbf{w}) = r$. Si se denota $(x_i, y_i, z_i)^T = \mathbf{v}_i$ y

$$w(t) = \sum_{i=0}^n \frac{B_i^n(t) z_i}{\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i}$$

y si se supone que $w(t) \neq 0$, es decir, que $\alpha(P_0, \dots, P_n; r)(t)$ es un punto afín, entonces se cumple

$$j(\alpha(P_0, \dots, P_n; r)(t)) = \frac{1}{w(t)} \left(\sum_{i=0}^n \frac{B_i^n(t) x_i}{\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i}, \sum_{i=0}^n \frac{B_i^n(t) y_i}{\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i} \right)^T. \quad (3.5)$$

3.7 NOTA. Como una consecuencia fácil de este teorema se obtiene que los vectores $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1}$ son tangentes a la curva en P_0 , P_n respectivamente.

Nótese que si $z_i = 1$, entonces (3.5) proporciona una curva racional de Bézier (3.3) cuyos pesos son $(\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i)^{-1}$ y sus puntos de control son $(x_i, y_i)^T$.

Recuérdese que una cónica proyectiva puede ser escrita como

$$\mathcal{C} = \{\pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 0\},$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y B es una matriz simétrica 3×3 (véase, por ejemplo, [68]).

3.8 TEOREMA. *La curva parametrizada por $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)$ forma parte de la cónica de ecuación $\mathbf{x}^T (A^T J A) \mathbf{x} = 0$, donde*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^{-1}$, $\pi(\mathbf{v}_i) = P_i$ y $r = \pi^*(\mathbf{w})$ con $\mathbf{w}^T \mathbf{v}_i = 1$.

Nótese que $A^T J A$ es una matriz invertible, lo que significa que la cónica es no degenerada.

El siguiente resultado proporciona un significado geométrico para la recta auxiliar r .

3.9 TEOREMA. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.8, la recta r es tangente a la cónica. Además, sea $\mathbf{r}(t) = j(\alpha(P_0, P_1, P_2; r)(t))$ para los t tales que $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)(t)$ sea afín². Si existe $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0$, entonces r es tangente en \mathbf{x}_0 .*

Desde ahora, se denotará $\mathbf{r}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{r}(t)$ cuando este límite exista.

Ejemplo 1: Dados $\mathbf{c}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathcal{E}^2$ con $\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}\| = \rho$, siendo $\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}$ perpendicular a $\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}$, dibújese el cuadrante $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1$ de la circunferencia centrada en \mathbf{c} y radio ρ (véase la figura 3.5).

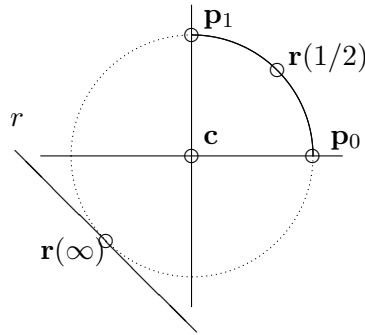


Figura 3.5: Construcción del primer cuadrante de la circunferencia unidad.

Por la invarianza euclídea de las curvas racionales de Bézier³, podemos suponer $\mathbf{p}_0 = (1, 0)^T$, $\mathbf{p}_1 = (0, 1)^T$ y $\mathbf{c} = (0, 0)^T$. Para aplicar el algoritmo 3.4, sea $\mathbf{v}_0 = (1, 0, 1)^T$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)^T$. Por la nota 3.7, debemos definir $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)^T$ o cualquier múltiplo no nulo de $(1, 1, 1)^T$ (lo importante es que $\pi(\mathbf{v}_1) = (1, 1)^T$). Por el teorema 3.9 la recta r es tangente

²Debido a que el denominador en (3.5) es un polinomio de grado 2, como mucho hay dos valores de t tales que $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)(t)$ no es afín.

³En realidad las curvas racionales de Bézier tienen invarianza proyectiva.

a la circunferencia. Por simetría y debido a que se quiere dibujar el primer cuadrante, sea r la recta de ecuación $x + y = -\sqrt{2}$ (véase la figura 3.5). Luego, sea $\mathbf{w} = (1, 1, \sqrt{2})^T$. Por el teorema 3.6 se obtiene

$$w(t) = \frac{(1-t)^2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2t(1-t)}{2+\sqrt{2}} + \frac{t^2}{1+\sqrt{2}}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{w(t)} \left(\frac{(1-t)^2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2t(1-t)}{2+\sqrt{2}}, \frac{2t(1-t)}{2+\sqrt{2}} + \frac{t^2}{1+\sqrt{2}} \right)^T.$$

Podemos observar que $\mathbf{r}(1/2) = (\cos \pi/4, \sin \pi/4)^T$ y $\mathbf{r}(\infty) = (-\cos \pi/4, -\sin \pi/4)^T$ como se ve en la figura 3.5.

Ejemplo 2: Para dibujar el arco complementario del ejemplo previo, es suficiente definir $\mathbf{v}_0 = (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^T$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)^T$ (como antes) y considerar la recta r de ecuación $x + y = \sqrt{2}$ (véase la figura 3.6). Luego, sea $\mathbf{w} = (1, 1, -\sqrt{2})^T$.

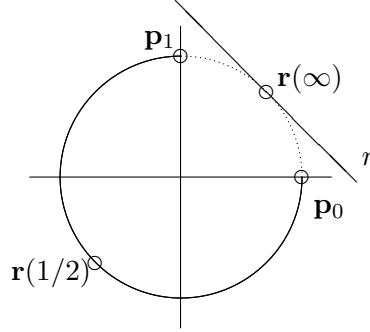


Figura 3.6: Construcción de un arco de circunferencia de amplitud igual a $3\pi/2$.

Ejemplo 3: Dibújese un arco de amplitud $\theta \in]0, \pi[$ (en el ejemplo 4 se mostrará cómo construir una semicircunferencia y en el ejemplo 2 se mostró cómo dibujar un arco de amplitud mayor que π).

Se usará la notación c para $\cos \theta$ y s para $\sin \theta$. Como en los ejemplos anteriores, se supondrá que el radio de la circunferencia es 1 y el centro es el origen. Sea $\mathbf{p}_0 = (1, 0)^T$ y $\mathbf{p}_1 = (c, s)^T$. Sea \mathbf{q} el punto tal que $\mathbf{q} - \mathbf{p}_i$ es tangente a la circunferencia en \mathbf{p}_i para $i = 1, 2$ (véase la figura 3.7). Un cálculo fácil proporciona $\mathbf{q} = (1, 1 - c/s)^T$. Usando que una cónica está unívocamente determinada si conocemos dos puntos con sus tangentes junto con una tercera tangente, es suficiente elegir la recta r de ecuación $y = 1$ (una elección más simétrica hubiera sido la recta tangente en el punto \mathbf{x} de la figura 3.7).

Si se definen

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} s \\ 1 - c \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

entonces por el teorema 3.6 se obtiene

$$w(t) = -(1-t)^2 + \frac{2t(1-t)s}{1-c-s} + \frac{t^2}{s-1}$$

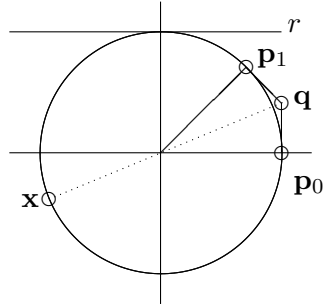


Figura 3.7: Construcción de un arco de circunferencia.

y

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{w(t)} \left(-(1-t)^2 + \frac{2t(1-t)s}{1-c-s} + \frac{ct^2}{s-1}, \frac{2t(1-t)(1-c)}{1-c-s} + \frac{t^2}{s-1} \right)^T.$$

En [74], se describe una parametrización cuadrática a trozos y se prueba que no es posible representar toda la circunferencia por un B-spline cuadrático \mathcal{C}^1 . En [72] se afirma que “*The construction of a general NURBS circular arc is more complicated than first expected, and there are many ways to do it.*”. El algoritmo 3.4 es simple y proporciona un método intuitivo para dibujar un arco de circunferencia arbitrario de amplitud $\theta \in]0, 2\pi[$.

Ejemplo 4: Dados $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in \mathcal{E}^2$, dibujar una elipse de modo que un eje sea $\overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$ y la longitud del otro semieje sea b (nótese que una circunferencia es un caso particular).

Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ perpendicular a $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ con $\|\mathbf{v}\| = 1$ y siendo $\{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0, \mathbf{v}\}$ una base orientada positivamente. También sean $\mathbf{p} = \mathbf{b}_0 - b\mathbf{v} \in \mathcal{E}^2$ y la recta afín r de ecuación $(\mathbf{x} - \mathbf{p})^T \mathbf{v} = 0$ (véase la figura 3.8). La ecuación de esta recta es

$$0 = (\mathbf{x} - (\mathbf{b}_0 - b\mathbf{v}))^T \mathbf{v} = \mathbf{x}^T \mathbf{v} - \mathbf{b}_0^T \mathbf{v} + b = [\mathbf{x}^T \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ b - \mathbf{b}_0^T \mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

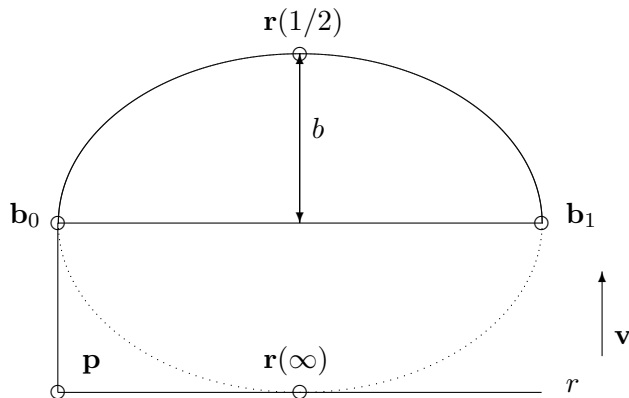


Figura 3.8: Construcción de una elipse.

y si se definen $k = ax_0 + by_0 + c$, $k_1 = \mathbf{w}^T \mathbf{v}_0$ y $k_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{v}_2$, entonces, tras algunas sencillas manipulaciones, la parametrización de la cónica obtenida mediante el algoritmo 3.4 es

$$\mathbf{r}(t) = d(\mathbf{c}_1, \mathbf{b}) \frac{1-t}{2t} \mathbf{u}_1 + \mathbf{b} + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{b}) \frac{t}{2(1-t)} \mathbf{u}_2,$$

donde \mathbf{c}_i es la intersección de r y r_i . Obsérvese que

$$\mathbf{r}(\infty) = -\frac{1}{2} (d(\mathbf{c}_1, \mathbf{b}) \mathbf{u}_1 + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{b}) \mathbf{u}_2) + \mathbf{b}$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{b} - \mathbf{c}_i = d(\mathbf{c}_i, \mathbf{b}) \mathbf{u}_i$, se logra

$$\mathbf{r}(\infty) = \frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{2},$$

como la figura 3.9 muestra. También, se ha de notar que

$$\mathbf{r}(1/2) = \frac{1}{2} (d(\mathbf{c}_1, \mathbf{b}) \mathbf{u}_1 + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{b}) \mathbf{u}_2) + \mathbf{b}.$$

La interpretación geométrica de $\mathbf{r}(1/2)$ es la siguiente: Sea \mathbf{q}_i un punto tal que \mathbf{b} es el punto medio de $\mathbf{q}_i \mathbf{c}_i$ (véase la figura 3.9). Se tiene que

$$\mathbf{r}(1/2) = \frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}.$$

Además, si r' es la recta simétrica a r respecto de \mathbf{b} , se tiene que r' es tangente a la hipérbola en $\mathbf{r}(1/2)$. Este hecho muestra la importancia de la elección de la recta auxiliar r en el algoritmo 3.4.

3.4 Superficies de Bézier

Ya en su informe confidencial, de Casteljau observó la necesidad de considerar superficies para el diseño industrial de carrocerías de vehículos. Antes de presentar el algoritmo ideado por de Casteljau para representar superficies, se repasará un concepto importante de la geometría afín.

3.10 DEFINICIÓN. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tres puntos de \mathcal{E}^n afínmente independientes (es decir, los vectores $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ de \mathbb{R}^n son linealmente independientes, o dicho de otro modo, \mathbf{abc} es un **triángulo**) y sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^n$ tal que \mathbf{x} está en la envoltura afín de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (véase la figura 3.10). Entonces $\mathbf{x} - \mathbf{a} \in \text{lin}\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$ y por tanto existen $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}). \quad (3.6)$$

Una forma más simétrica de escribir (3.6) es

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Se dice que (α, β, γ) son las **coordenadas baricéntricas** de \mathbf{x} respecto al triángulo \mathbf{abc} .

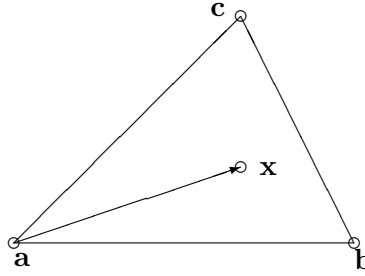


Figura 3.10: Coordenadas baricéntricas.

Para escribir de forma cómoda el algoritmo de de Casteljau, se establecen las siguientes notaciones. Para $m \in \mathbb{N}$, sean

$$\Delta_m = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : i + j + k = m\}, \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Para $(i, j, k) \in \Delta_m$ y $(x, y, z) \in T$, sean

$$B_{ijk}^m(x, y, z) = \frac{m!}{i!j!k!} x^i y^j z^k,$$

los **polinomios bivariados de Bernstein** de grado m .

3.11 DEFINICIÓN. Sea $\{\mathbf{b}_{ijk} \in \mathcal{E}^n : (i, j, k) \in \Delta_m\}$ un conjunto de $(m+1)(m+2)/2$ puntos de \mathcal{E}^n (llamados **red triangular de control**). La superficie $\mathbf{r} : T \rightarrow \mathcal{E}^n$ dada por

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{ijk}^m(x, y, z) \mathbf{b}_{ijk} \quad (3.7)$$

se llama **parche triangular de Bézier**.

Obsérvese que si $(x, y, z) \in T$, entonces

$$1 = (x + y + z)^m = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{ijk}^m(x, y, z)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. De donde se deduce de (3.7) que $\mathbf{r}(x, y, z) \in \mathcal{E}^n$, puesto que $\mathbf{b}_{ijk} \in \mathcal{E}^n$.

En [70] se proporciona una visión más profunda de estas superficies y su importancia en el diseño asistido por ordenador. Una forma recursiva de calcular (3.7) fue proporcionada por de Casteljau:

3.12 ALGORITMO. Sea una red triangular de control $\{\mathbf{b}_{ijk} : (i, j, k) \in \Delta_m\}$ y $(x, y, z) \in T$.

Sean $\mathbf{b}_{ijk}^0 = \mathbf{b}_{ijk}$ para $(i, j, k) \in \Delta_m$.

Supóngase contruidos $\mathbf{b}_{ijk}^l \in \mathcal{E}^k$ para $l = 0, \dots, n$ e $(i, j, k) \in \Delta_{n-l}$. Sean

$$\mathbf{b}_{ijk}^{l+1}(x, y, z) = x\mathbf{b}_{i+1,j,k}^l(x, y, z) + y\mathbf{b}_{i,j+1,k}^l(x, y, z) + z\mathbf{b}_{i,j,k+1}^l(x, y, z).$$

El punto $\mathbf{b}_{000}^m(x, y, z)$ es el punto $\mathbf{r}(x, y, z)$ de (3.7).

La solución adoptada por Bézier fue distinta. Se denota $I_{n,m} = \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ para $n, m \in \mathbb{N}$. Dados $\{\mathbf{b}_{ij} : (i, j) \in I_{n,m}\}$ puntos de \mathcal{E}^k , se define la superficie $\mathbf{r} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}^k$ dada por

$$\mathbf{r}(t, s) = \sum_{(i,j) \in I_{n,m}} B_i^n(t) B_j^m(s) \mathbf{b}_{ij}. \quad (3.8)$$

En [70, 72] se puede encontrar un estudio detallado de estas superficies. Una propiedad ya observada por Bézier es que si denotamos para $i = 0, \dots, n$

$$\mathbf{p}_i(s) = \sum_{j=0}^m B_j^m(s) \mathbf{b}_{ij} = \mathcal{B}[\mathbf{b}_{i0}, \dots, \mathbf{b}_{im}](s),$$

se tiene de (3.8)

$$\mathbf{r}(t, s) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i(s) = \mathcal{B}[\mathbf{p}_0(s), \dots, \mathbf{p}_n(s)](t).$$

Análogamente, si se denota $\mathbf{q}_j(t) = \mathcal{B}[\mathbf{b}_{0j}, \dots, \mathbf{b}_{nj}](t)$ para $j = 0, \dots, m$, entonces

$$\mathbf{r}(t, s) = \mathcal{B}[\mathbf{q}_0(t), \dots, \mathbf{q}_m(t)](s).$$

De donde se deduce que (3.8) puede evaluarse de forma recursiva aplicando dos veces el algoritmo estándar de de Casteljau para curvas.

Las superficies racionales de Bézier tienen una definición parecida a (3.3):

3.13 DEFINICIÓN. *Dados los puntos $\{\mathbf{b}_{ij} : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$ de \mathcal{E}^k y $\{w_{ij} : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$ números positivos, si se denota*

$$w(t, s) = \sum_{(i,j) \in I_{n,m}} B_i^n(t) B_j^m(s) w_{ij},$$

entonces la superficie $\mathbf{r} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}^k$ dada por

$$\mathbf{r}(t, s) = \frac{1}{w(t, s)} \sum_{(i,j) \in I_{n,m}} B_i^n(t) B_j^m(s) \mathbf{b}_{ij}.$$

*se llama **superficie racional de Bézier** asociada a los puntos de control \mathbf{b}_{ij} y a los pesos w_{ij} .*

3.5 Problemas abiertos

En la figura 3.4 se observa que fijados los puntos proyectivos P_0, P_1, P_2 , si se mueve la recta auxiliar r , entonces la curva $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)$ cambia. ¿Es este cambio continuo? Además se observa que si la recta r se “aleja al infinito”, entonces la curva $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)$ se aproxima a la parábola $\mathcal{B}[i(P_0), i(P_1), i(P_2)]$, supuesto que $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$. ¿Es esto cierto? Antes de nada se ha de precisar lo que intuitivamente es un movimiento continuo de la recta $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$, esto es, se ha de dotar de una topología a $\Lambda(\mathbb{P}^2)$. Pero esto es fácil, pues por el principio

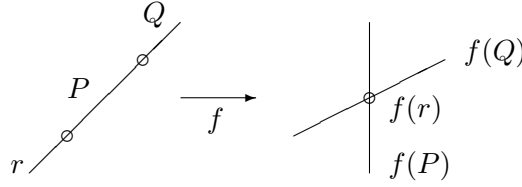


Figura 3.11: El principio de dualidad.

de dualidad, $\Lambda(\mathbb{P}^2)$ y \mathbb{P}^2 son equivalentes como conjuntos, más concretamente, la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \Lambda(\mathbb{P}^2)$ dada por $f(\pi(\mathbf{v})) = \pi^*(\mathbf{v})$ es biyectiva y cumple

$$r = \mathcal{L}(P, Q) \iff f(r) = f(P) \cap f(Q).$$

para cualquier $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ y $P, Q \in \mathbb{P}^2$ (véase la figura 3.11). Ahora se puede definir en $\Lambda(\mathbb{P}^2)$ la topología inducida por f y por la topología de \mathbb{P}^2 como espacio cociente.

En lo sucesivo, dado $P \in \mathbb{P}^2$, se denotará $P^* = \{r \in \Lambda(\mathbb{P}^2) : P \in r\}$.

3.14 PROBLEMA. Sean $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$ y $t \in [0, 1]$. Considérese la aplicación

$$\Psi : \Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P_0^*, \dots, P_n^*\} \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad \Psi(r) = \alpha(P_0, \dots, P_n)(r)(t), \quad (3.9)$$

donde α es la curva definida en el Algoritmo 3.4. ¿Es Ψ continua?

Una utilidad teórica, siempre que la respuesta a este problema fuera afirmativa es la siguiente: Supongamos que $t \in \mathbb{R}$, $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$ y $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ son tales que $P_i \notin r$ y $\alpha(P_0, \dots, P_n; r)(t)$ es afín. Ya que el subconjunto de los puntos afines de \mathbb{P}^2 es abierto en \mathbb{P}^2 , se tiene que existe un entorno abierto de r en $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P_0^*, \dots, P_n^*\}$, digamos \mathcal{U} , de modo que $\Psi(s)$ es afín para toda recta de \mathcal{U} . En palabras más sencillas: si se perturba ligeramente la recta r , de nuevo obtenemos un punto afín.

El problema anterior mide perturbaciones cualitativas. Debido a que los puntos que se dibujan deben ser afines (los puntos del infinito son de un modo informal direcciones) y a que es natural definir la siguiente distancia en \mathcal{E}^2

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{E}^k,$$

resulta conveniente estudiar perturbaciones cuantitativas. Pero para esto se debe estimar de manera cuantitativa el movimiento de una recta $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$; es decir se ha de dotar de una métrica a $\Lambda(\mathbb{P}^2)$. Esto no se va a poder hacer, pero casi.

La manera más fácil es observar de nuevo el principio de dualidad y en que si a \mathbb{P}^2 se le quita la recta del infinito, se obtiene el espacio métrico $\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$ cuya métrica es

$$d(\pi(x_1, y_1, z_1), \pi(x_2, y_2, z_2)) = \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_1}{z_1} & \frac{y_1}{z_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2}{z_2} & \frac{y_2}{z_2} \end{pmatrix} \right\|.$$

Si se ha comprendido esto, ahora es fácil dotar de una métrica a un conjunto muy parecido a $\Lambda(\mathbb{P}^2)$.

Sea $P = \pi(\mathbf{v}) \in \mathbb{P}^2$. Vamos a dotar a $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus P^*$ de la siguiente métrica:

$$d_P^*(\pi^*(\mathbf{w}_1), \pi^*(\mathbf{w}_2)) = \left\| \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2^T \mathbf{v}} \right\|.$$

Según nuestro conocimiento de la literatura actual, esta métrica es nueva. Surge un problema relacionado con esta métrica, aparentemente sin relación con el diseño de curvas.

3.15 PROBLEMA. Sean $P, Q \in \mathbb{P}^2$. En $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P, Q\}$ hay dos métricas: d_P^* y d_Q^* . ¿Cuál es la relación entre ambas?

El siguiente problema es la versión cuantitativa del problema 3.14

3.16 PROBLEMA. Sean $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}^2$ y $t \in [0, 1]$. Si $r, s \in \Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P_0^*, \dots, P_n^*\}$ son tales que $\Psi(r)$ y $\Psi(s)$ son afines, ¿cómo es una estimación de $d(j(\Psi(r)), j(\Psi(s)))$ en términos de $d_{P_i}^*(r, s)$ para $i = 0, \dots, n$?

Ahora se comprende la utilidad de plantearse el problema 3.15, puesto que podemos considerar $n + 1$ métricas distintas en $\Lambda(\mathbb{P}^2) \setminus \{P_0^*, \dots, P_n^*\}$.

Obsérvese que en el ejemplo 3, se tiene que fijados

$$P_0 = \pi(1, 0, 1), \quad P_1 = \pi(s, 1 - c, s), \quad P_2 = \pi(c, s, 1),$$

hay infinitas elecciones de la recta auxiliar r para dibujar, mediante el algoritmo 3.4, el arco que se pretende parametrizar. De hecho, basta tomar como r cualquier recta tangente a la circunferencia unidad en el punto \mathbf{x} , en donde \mathbf{x} no está en el mencionado arco. Sean ahora r_1 y r_2 dos de estas rectas tangentes. Por supuesto, las funciones

$$\alpha(P_0, P_1, P_2; r_1) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad \alpha(P_0, P_1, P_2; r_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$$

son distintas; pero los conjuntos

$$\{\alpha(P_0, P_1, P_2; r_1)(t) : t \in [0, 1]\}, \quad \{\alpha(P_0, P_1, P_2; r_2)(t) : t \in [0, 1]\} \quad (3.10)$$

son iguales. Sin embargo, lo que se dibuja en el diseño asistido por ordenador no es (3.10), sino lo siguiente:

$$\{\alpha(P_0, P_1, P_2; r_1)(t) : t \in T\}, \quad \{\alpha(P_0, P_1, P_2; r_2)(t) : t \in T\},$$

donde $T = \{0 < t_1 < \dots < t_m < 1\}$. Veamos un ejemplo concreto. En el ejemplo 1 se dibujó el primer cuadrante de la circunferencia unidad lo más simétricamente posible. Si cambiamos la recta r de modo que su nueva ecuación sea $-x + y + \sqrt{2} = 0$ (véase la figura 3.12) también se obtiene el primer cuadrante.

¿Pero que pasa si dibujamos sólo unos cuantos puntos de la curva? En la figura 3.13 se muestran sólo los puntos correspondientes $\{\mathbf{r}(t) : t \in \{0, 0.05, 0.1, \dots, 0.95, 1\}\}$, donde \mathbf{r} es la parametrización de esta curva.

Como se puede apreciar, hay más puntos cerca de $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$ que de $\mathbf{r}(1) = (1, 0)$. Además se tiene que $\mathbf{r}(1/2) \simeq (0.9024, 0.4309)$ que está más próximo a $\mathbf{r}(0)$ que a $\mathbf{r}(1)$ rompiendo la simetría mostrada en el ejemplo 1. Este hecho se puede comprender si calculamos la velocidad inicial y final obteniendo $\|\mathbf{r}'(0)\| \simeq 0.5859$ y $\|\mathbf{r}'(1)\| \simeq 3.4142$; es decir, la trayectoria es “más lenta al principio que al final”.

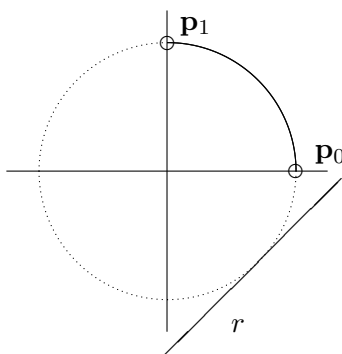


Figura 3.12: Construcción del primer cuadrante de la circunferencia unidad.

3.17 PROBLEMA. *Estúdiese la variación de la recta tangente. Más en concreto: Sean los puntos $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ y $r \in \Lambda(\mathbb{P}^2)$ tales que $P_i \notin r$ para $i = 0, 1, 2$ y que la curva $\alpha(P_0, P_1, P_2; r)$ describe una cónica proyectiva incluida en $\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$. Sea la curva en $\mathcal{A}(\mathbb{P}^2)$ dada por $\mathbf{r} = \alpha(P_0, P_1, P_2; r)$ y los valores discretos $0 < t_0 < \dots < t_m < 1$. Estímese $d(\mathbf{r}(t_{i+1}), \mathbf{r}(t_i))$ para $i = 0, \dots, m-1$ y relaciónese esta distancia con la recta auxiliar r .*

Estímese

- a) $\mathbf{r}(1/2)$.
- b) ¿Cuándo $d(\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1/2)) = d(\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(1/2))$?
- c) $\|\mathbf{r}'(0)\|, \|\mathbf{r}'(1)\|$.

Además, hay que decir que $r = \pi^*(\mathbf{w})$ es tangente a la cónica $\mathcal{C} = \{\pi(\mathbf{x}) : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0\}$ equivale a que $\mathbf{w}^T A^{-1} \mathbf{w} = 0$. Luego podemos parametrizar la cónica $\mathcal{C}^* = \{\pi(\mathbf{x}) : \mathbf{x}^T A^{-1} \mathbf{x} = 0\}$ usando el algoritmo 3.4 y la afirmación de que la recta $r = \pi^*(\mathbf{w})$ se mueve de forma continua manteniéndose tangente a la cónica \mathcal{C} , de manera poco precisa, es equivalente a que $\pi^*(\mathbf{w})$ se mueva de forma continua en \mathcal{C}^* por medio de la parametrización antes mencionada.

En el diseño geométrico asistido por ordenador las curvas pueden no ser planas (de hecho, es la situación más frecuente en el diseño industrial).

3.18 PROBLEMA. *Generalícese el algoritmo 3.4 en \mathcal{E}^3 y estúdiense sus propiedades.*

Pensemos un poco en el algoritmo 3.4. Para generar los puntos Q_i^j hay que cortar las rectas r y $\mathcal{L}(P_i^j, P_i^{j+1})$ ya que en el plano proyectivo, dos rectas distintas siempre se cortan en un sólo punto proyectivo. Sin embargo, en el espacio proyectivo no es cierto que dos rectas distintas se cortan en un punto (las rectas se pueden cruzar exactamente igual que en \mathcal{E}^3). Esta situación se arregla si observamos que en \mathbb{P}^3 un plano y una recta no contenida en este plano siempre se cortan en un sólo punto.

Así, esta generalización es fácil: basta substituir una recta auxiliar en \mathbb{P}^2 por un plano auxiliar en \mathbb{P}^3 . Sin embargo, las propiedades no son tan simples de generalizar: por ejemplo, el teorema 3.8. Recuértese que una cuádrlica en \mathbb{P}^3 , que es una superficie, es el siguiente

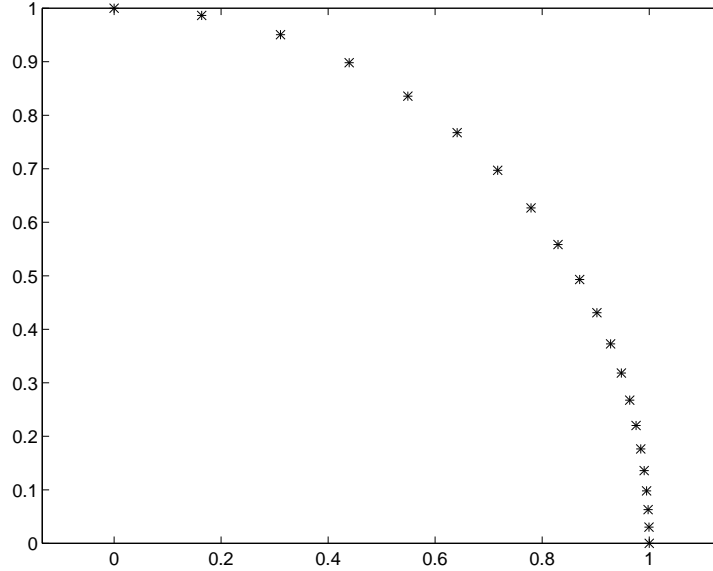


Figura 3.13: Una cantidad finita de puntos del primer cuadrante de la circunferencia unidad.

conjunto:

$$\{\pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^3 : \mathbf{x}^T A \mathbf{x}\} = 0,$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ y A es una matriz simétrica de orden 4. Mientras que la generalización directa del algoritmo 3.4 describe una curva.

El propósito del algoritmo 3.4 es generalizar proyectivamente el algoritmo estándar de de Casteljau (que es un algoritmo afín). Tras repasar el algoritmo 3.12 surge un problema natural:

3.19 PROBLEMA. *Generalícese el algoritmo 3.12 de modo que sea proyectivamente invariante y que permita dibujar cuádricas en \mathbb{P}^3 .*

Pensemos cómo se puede dar esta generalización. El algoritmo de de Casteljau se basa en la razón simple (concepto afín), mientras que el algoritmo 3.4 se basa en la razón doble (concepto proyectivo). Como el algoritmo 3.12 se basa en las coordenadas baricéntricas (concepto afín), se ha de buscar una generalización proyectiva de las coordenadas baricéntricas. Además como el paso de la geometría proyectiva de \mathbb{P}^3 a la geometría afín de \mathcal{E}^3 se hace fijando un “plano del infinito”, parece razonable que la generalización buscada se apoye en un plano auxiliar y que cuando este plano “tienda al infinito” se obtenga el algoritmo 3.12.

En realidad, el resultado que se esconde tras las coordenadas baricéntricas es el clásico teorema de Ceva, que aquí se reproduce en aras de una mayor legibilidad:

3.20 TEOREMA (DE CEVA). *Sean \mathbf{abc} un triángulo y \mathbf{p} , \mathbf{q} y \mathbf{r} puntos en los lados \mathbf{ab} , \mathbf{bc} y \mathbf{ca} respectivamente. Entonces \mathbf{cp} , \mathbf{br} y \mathbf{aq} son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{bq}}}{\overrightarrow{\mathbf{qc}}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{cr}}}{\overrightarrow{\mathbf{ra}}} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{ap}}}{\overrightarrow{\mathbf{pb}}} = 1. \quad (3.11)$$

Para entender mejor la relación entre las coordenadas baricéntricas y el teorema de Ceva, supóngase la siguiente situación: Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ del enunciado del teorema de Ceva tales que \mathbf{cp} , \mathbf{br} y \mathbf{aq} son concurrentes en \mathbf{x} (véase la figura 3.14).

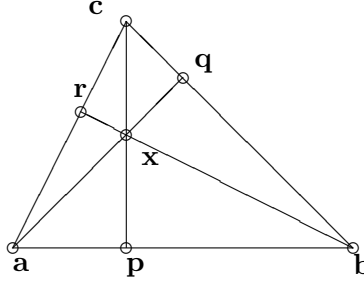


Figura 3.14: Demostración de una implicación en el teorema de Ceva.

Ahora se tiene que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (3.12)$$

Ahora el punto

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \mathbf{a} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \mathbf{b} = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \mathbf{c} = \frac{1}{\alpha + \beta} \mathbf{x} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \mathbf{c}$$

está en la recta que pasa por \mathbf{a}, \mathbf{b} y en la recta que pasa por \mathbf{x}, \mathbf{c} ; es decir, es el punto \mathbf{p} . De forma análoga se tiene que

$$\mathbf{q} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \mathbf{b} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \mathbf{c}, \quad \mathbf{r} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \mathbf{c}.$$

Ahora es trivial probar (3.11).

Las coordenadas baricéntricas se basan en el concepto afín de la razón simple. La siguiente discusión es conocida (véase, por ejemplo [68]); pero que se incluye para facilitar la lectura de este proyecto.

Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ cuatro puntos colineales de \mathcal{E}^2 . Es fácil probar que⁴

$$\text{rd}(i(\mathbf{a}), i(\mathbf{b}), i(\mathbf{c}), i(\mathbf{d})) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{ac}}/\overrightarrow{\mathbf{bc}}}{\overrightarrow{\mathbf{ad}}/\overrightarrow{\mathbf{bd}}}.$$

Sean ahora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tres puntos colineales de \mathcal{E}^2 . Sea D la intersección de la recta del infinito y $\mathcal{L}(i(\mathbf{a}), i(\mathbf{b}))$. Puede probarse que

$$\text{rd}(i(\mathbf{a}), i(\mathbf{b}), i(\mathbf{c}), D) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{ac}}}{\overrightarrow{\mathbf{bc}}}.$$

La siguiente generalización proyectiva del teorema de Ceva se dio en [66].

⁴De hecho, es la definición clásica de razón doble.

3.21 TEOREMA Sea ABC un triángulo en \mathbb{P}^2 y r una recta proyectiva de $\Lambda(\mathbb{P}^2)$ tales que $A, B, C \notin r$. Sean $A' = \mathcal{L}(B, C) \cap r$, $B' = \mathcal{L}(C, A) \cap r$ y $C' = \mathcal{L}(A, B) \cap r$. Sean A'' , B'' y C'' tres puntos proyectivos distintos de A, B, C con $A'' \in \mathcal{L}(B, C)$, $B'' \in \mathcal{L}(C, A)$ y $C'' \in \mathcal{L}(A, B)$ (véase la figura 3.15). Entonces $\mathcal{L}(A, A'')$, $\mathcal{L}(B, B'')$ y $\mathcal{L}(C, C'')$ son concurrentes si y sólo si

$$\text{rd}(B, C, A'', A') \cdot \text{rd}(C, A, B'', B') \cdot \text{rd}(A, B, C'', C') = -1. \quad (3.13)$$

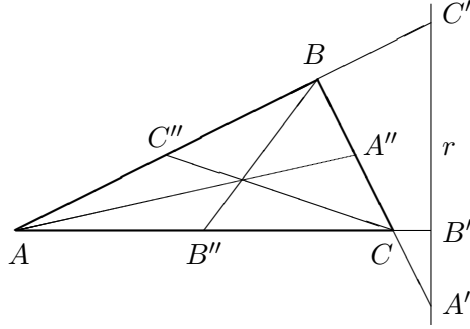


Figura 3.15: El teorema 3.21.

La expresión (3.13) es la versión proyectiva de (3.11). Así, hay que buscar una versión proyectiva de (3.12) que permita definir una superficie $x : S \rightarrow \mathbb{P}^3$, en donde $S \subset \mathbb{R}^2$ y que $x(\lambda, \mu)$ sea la intersección de las cevianas AA'' , BB'' y CC'' que aparecen en la figura 3.15. Los puntos A'' , B'' , C'' deben depender de alguna manera de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y además se debe cumplir la relación (3.13).

Bibliografía

Diferenciabilidad en espacios de Banach

- [1] C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá, A. Rodríguez: A non-smooth extension of Fréchet differentiability of the norm with applications to numerical ranges. *Glasgow Math. J.* **28** (1986), 121-137.
- [2] E. Asplund: Fréchet differentiability of convex functions. *Acta Math.* **121** (1968), 31-47.
- [3] J. Benítez, V. Montesinos: On restricted weak upper semicontinuity and reflexivity. *Bolletino U. M. I.* **8** 2-B (1999), 577-583.
- [4] J. Benítez: Diferenciabilidad en espacios de Banach. *Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia* (2000).
- [5] J. Benítez, V. Montesinos: Restricted weak upper semicontinuous differentials of convex functions. *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), 93-100.
- [6] H. Brezis: Analyse Fonctionnelle: Theorie et Applications. *Masson et Cie* (1983).
- [7] F.H. Clarke: Optimization and non-smooth analysis. *Canad. Math. Soc. Ser. Monographs Adv. Texts*, Wiley (1983).
- [8] M.D. Contreras, R. Payá: On upper semicontinuity of duality mapping. *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), 451-459.
- [9] D.F. Cudia: The geometry of Banach spaces. Smoothness. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964), 218-314.
- [10] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler: Smoothness and Renormings in Banach Spaces. *Pitman Monographs and surveys in Pure and Appl. Math.* **64** (1993).
- [11] I. Ekeland, G. Lebourg: Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1976), 193-216.
- [12] C. Franchetti, R. Payá: Banach spaces with strongly subdifferentiable norm. *Bolletino U. M. I.* **7** B (1993), 45-70.
- [13] J. Giles, D. Gregory, B. Sims: Geometrical implications of upper semi-continuity of the duality mapping on a Banach space. *Pacific J. Math.* **79** (1978), 99-108.
- [14] J. Giles, W.B. Moors: Generic continuity of restricted weak upper semicontinuous set valued mappings. *Set Valued Analysis.* **4** (1996), 25-39.
- [15] G. Godefroy: Some applications of Simons' inequality. *Seminar of Functional Analysis. Universidad de Murcia* **1** (1987).

- [16] G. Godefroy, V. Montesinos, V. Zizler: Strong subdifferentiability of norms and geometry of Banach spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **36**, 3 (1995), 493-502.
- [17] D.A. Gregory: Upper semi-continuity of subdifferential mappings. *Canad. Math. Bull.* **23** (1980), 11-19.
- [18] R. Haydon: A counterexample to several questions about scattered compact spaces. *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 261-268.
- [19] A. Ioffe: Approximate subdifferentials and applications. Part 1. *T.A.M.S.* **281** (1) (1984), 389-416.
- [20] A. Ioffe: Approximate subdifferentials and applications. Part 2. *Mathematica* **33** (1986), 111-128.
- [21] A. Ioffe: Approximate subdifferentials and applications. Part 3. *Mathematica* **36** (1988), 1-38.
- [22] M. Jiménez Sevilla, J. P. Moreno: Renorming Banach spaces with the Mazur intersection property. *Journal of Funct. Anal.* **144**, 2 (1997), 486-504.
- [23] A. Jofré, D.T. Luc, M. Théra: ε -Subdifferential and ε -Monotonicity, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. **33** (1998), 71-90.
- [24] A. Kruger, B. Mordukhovich: Extremal points and the Euler equation in nonsmooth optimization. *Dokl. Akad. Nauk. BSSR.* **24** (1980), 684-687.
- [25] E. B. Leach, J. H. M. Whitfield: Differentiable norm and rough norms in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **33** (1972), 120-126.
- [26] H.V. Ngai, D.T. Luc, M. Théra: Approximate convex functions. *Journal Nonlinear convex analysis* **1** **2** (2000), 155 - 176.
- [27] R.R. Phelps: Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag (1988).
- [28] R. T. Rockafellar: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math.* **33** (1970), 209-216.
- [29] C. Stegall: The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nykodým property. *Israel J. Math.* **29** (1978), 408-412.
- [30] D. Zagrodny: Approximate Mean Value Theorem for upper Subderivatives. *Nonlinear Anal., T.M.A.* **12** (1998), 1413-1428.

Análisis Matricial

- [31] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary: Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices. *Linear Algebra Appl.* **321** (2000), 3-7.

-
- [32] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, G.P.H. Styan: Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix. *Linear Algebra Appl.* **354** (2002), 21-34.
- [33] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary: On linear combinations of generalized projectors. *Linear Algebra Appl.* **388** (2004), 17-24.
- [34] O.M. Baksalary: Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint. *Linear Algebra Appl.* **388** (2004), 67-78.
- [35] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, J. Gross: On some linear combinations of hypergeneralized projectors. *Linear Algebra Appl.* **413**, 264-273, (2006).
- [36] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary: When is a linear combination of two idempotent matrices is the group involutory matrix? *Linear and Multilinear Algebra.* **54**, No 6, 429-435, (2006).
- [37] O.M. Baksalary, J. Benítez: Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting. Aceptado en *Linear Algebra Appl.*
- [38] A. Ben-Israel, T. Greville: Generalized inverses: theory and applications, *Wiley* (1974).
- [39] J. Benítez, N. Thome: Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t -potent matrix that commute. *Linear Algebra Appl.* **403** (2005), 414-418.
- [40] J. Benítez, N. Thome: Characterizations and linear combinations of k -generalized projectors. *Linear Algebra Appl.* **410** (2005), 150-159.
- [41] J. Benítez, N. Thome: k -group periodic matrices. *SIMAX* **28** No. 1 (2006), 9-25.
- [42] J. Benítez: Matrices whose powers approximate the identity. *Applied Mathematics Letters* **19** No. 11 (2006), 1249-1254.
- [43] D. Burde On the matrix equations $XA - AX = X^p$. *Linear Algebra Appl.* **404** (2005), 147-165.
- [44] N. Castro, J.J. Koliha, Y. Wei: Perturbation of the Drazin inverse for matrices with equal eigenprojections. *Linear Algebra Appl.* **312** (2000), 181-189.
- [45] C. Coll, N. Thome: Oblique projectors and group inverse involutory matrices. *Applied Mathematics and Computation.* **140**, (2003) 517-522.
- [46] L. Elsner, Kh. Ikramov: Normal matrices: an update. *Linear Algebra Appl.* **285** (1998), 291-303.
- [47] J.A. Fill, D.E. Fishkind: The Moore-Penrose generalized inverse for sum of matrices. *SIMAX* **21** No 2 (1999), 629-635.
- [48] G.H. Golub, C.F. van Loan: Matrix computations. *Johns Hopkins University Press* (1996).
- [49] R. Grone, C.R. Johnson, E. Wolkowicz: Normal matrices. *Linear Algebra Appl.* **87** (1987), 213-225.

- [50] J. Gross, G. Trenkler: Generalized and hypergeneralized projectors, *Linear Algebra Appl.* **264** (1997), 463–474.
- [51] R.E. Hartwig, K. Spindelböck: Matrices for which A^* and A^+ commute. *Linear Algebra Appl.* **12** (1986), 241–256.
- [52] R.A. Horn, C.R. Johnson: Matrix Analysis. *Cambridge University Press* (1985).
- [53] R.A. Horn, C.R. Johnson: Topics in Matrix Analysis. *Cambridge University Press* (1991).
- [54] S. Izumino: Convergence of generalized inverses and spline projectors. *J. Approx. Theory* **38** (1983), 269–278.
- [55] I. Marek, D.B. Szyld: Comparison of convergence of general stationary iterative methods for singular matrices. *SIMAX* **24** No. 1 (2002), 68–77.
- [56] A. Markiewicz: Simultaneous polar decomposition of rectangular complex matrices. *Linear Algebra Appl.* **289** (1999), 279–284.
- [57] C.D. Meyer: Matrix analysis and applied linear algebra. *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2000).
- [58] R. Penrose: A generalized inverses of matrices. *Proc. Cambridge Phil Soc.* **51** (1955) 406–413.
- [59] H. Özdemir, A.Y. Özban: On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, *Appl. Math. Comput.* **159** (2004), 439–448.
- [60] V. Rakočević: On continuity of the Moore-Penrose and Drazin inverses. *Matemichki Vesnik* **49** (1997), 163–172.
- [61] C.R. Rao, S.K. Mitra: Generalized inverses of matrices and its applications. *Wiley* (1971).
- [62] I.C.F. Ipsen, R.S. Wills: Mathematical properties and analysis of Google’s PageRank. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* **34** (2006), 191–196.
- [63] J.H. Wilkinson: The algebraics eigenvalue problem. *Clarendon Press*, (1988).
- [64] F. Zhang: Matrix theory: basic results and techniques. *Springer*, (1999).

Diseño geométrico asistido por ordenador

- [65] J. Benítez: A projective generalization of the de Casteljau Algorithm. Sometido a *International Journal of Computer Graphics and Applications*.
- [66] J. Benítez: A unified proof of Ceva and Menelaus’ theorems using projective geometry. Sometido a *Journal of Geometry and Graphics*.
- [67] W. Boehm, H. Prautzsch: Geometric Concepts for Geometric Design. *A.K. Peters* (1994).
- [68] D.A. Brannan, M.F. Esplen, J.J. Gray: Geometry. *Cambridge University Press* (1999).
- [69] G. Farin: Algorithms for Rational Bézier Curves. *C.A.D.*, **15**, **4** (1983), 73–77.

- [70] G. Farin: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. *Academic Press* (1997).
- [71] R.N. Goldman: Illicit expressions in vector algebra. *ACM Transactions on Graphics* **4** (1985), 223-243.
- [72] L. Piegl, W. Tiller: The NURBS book. *Springer* (1997).
- [73] M. Penna, R. Patterson. Projective Geometry and its Applications to Computer Graphics. *Prentice Hall* (1986).
- [74] L. Piegl, W. Tiller. A menagerie of rational B-spline circles, *IEEE Comput. Graph. and Appl.* 21 **9** 48–56, (1989).