

Responsable del Tratamiento: Universitat Politècnica de València (UPV)

Finalidad: Prestación del servicio público de educación superior en base al interés público de la UPV (Art. 6.1.e del RGPD).

Ejercicio de derechos y segunda capa informativa: Podrán ejercer los derechos reconocidos en el RGPD y la LOPDGDD de acceso, rectificación, oposición, supresión, etc., escribiendo al correo dpd@upv.es.

Para obtener más información sobre el tratamiento de sus datos puede visitar el siguiente enlace: <https://www.upv.es/contenidos/DPD>.

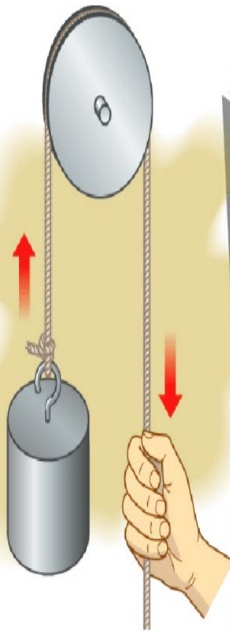
Propiedad Intelectual: Uso exclusivo en el entorno del aula virtual.

Queda prohibida la difusión, distribución o divulgación de la grabación de las clases y particularmente su compartición en redes sociales o servicios dedicados a compartir apuntes.

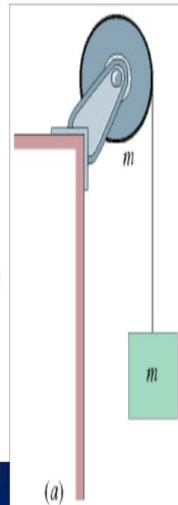
La infracción de esta prohibición puede generar responsabilidad disciplinaria, administrativa y/o civil.

Mecánica del Sólido Rígido

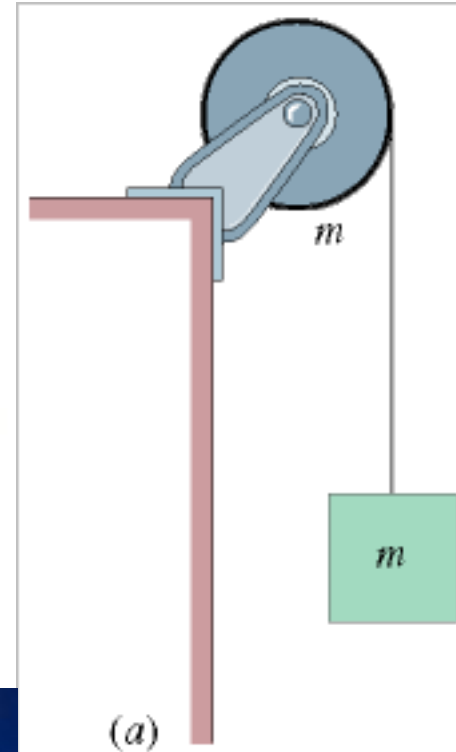
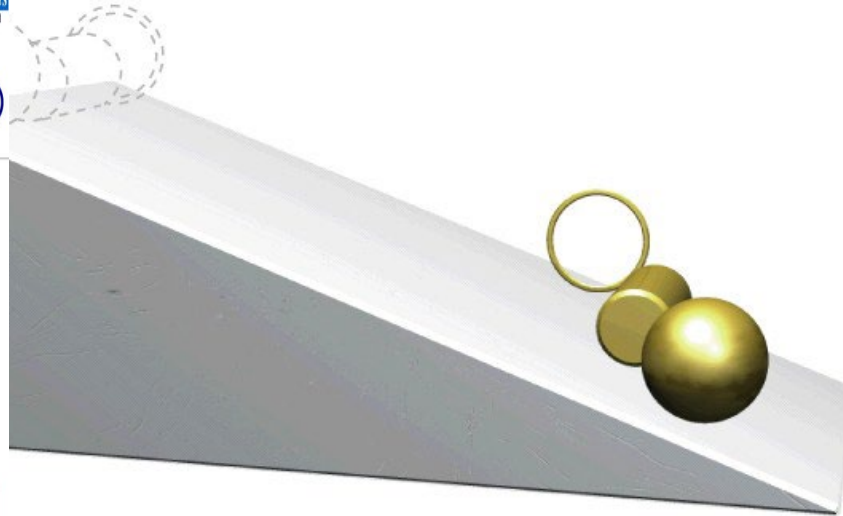
Mecánica del Sólido Rígido



Polea simple

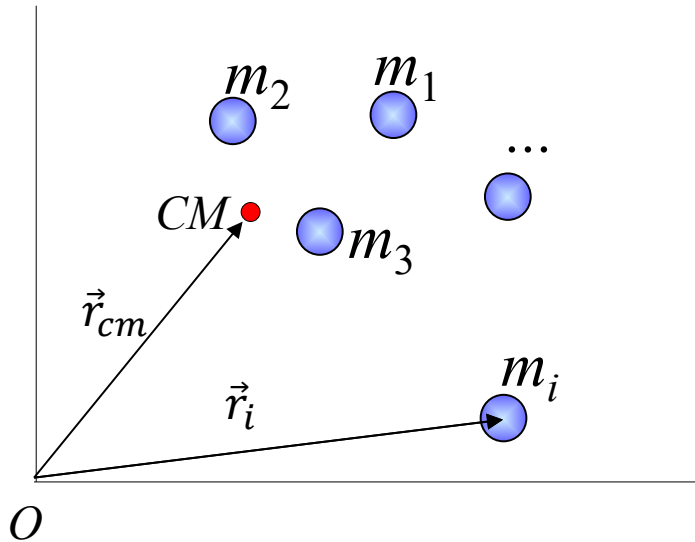


(a)



(a)

Centro de masas



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

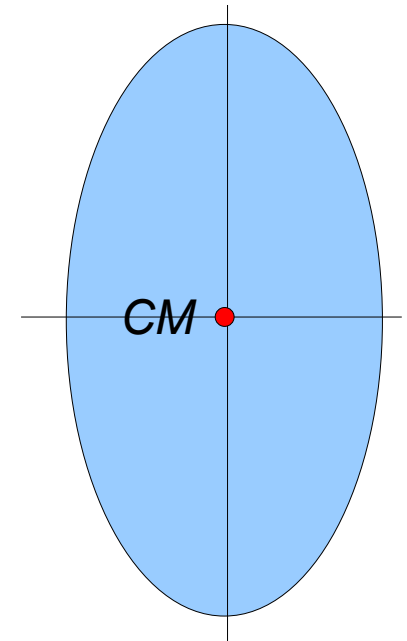
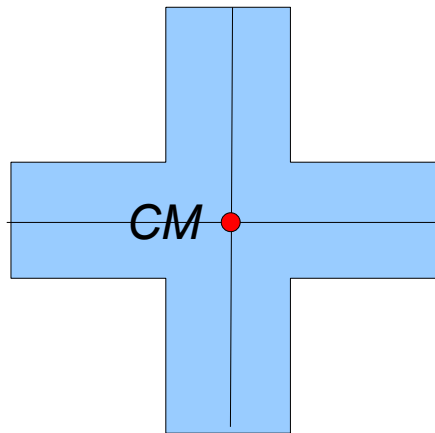
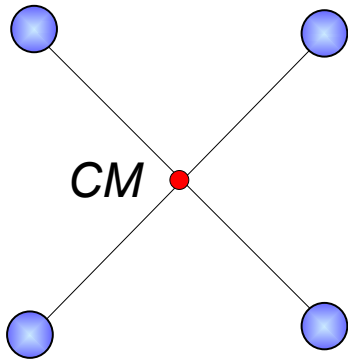
$$z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

$$M = \sum m_i$$

Centro de masas



- Si un sistema tiene elementos de simetría y la masa está distribuida con la misma simetría el *cdm* se encuentra sobre los elementos de simetría.



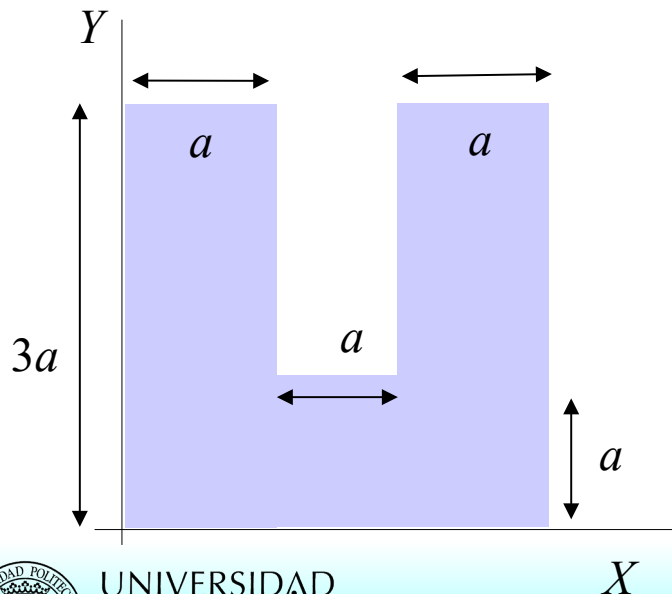
Centro de masas



- Si un sistema se puede descomponer en subsistemas $S_1, S_2, \dots, S_n$ de masas $M_1, M_2, \dots, M_n$ los centros de masas del cual son $r_{CM1}, r_{CM2}, \dots, r_{CMn}$ el centro de masas del sistema se obtiene por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum M_i \vec{r}_{CMi}}{\sum M_i}$$

Ejemplo:



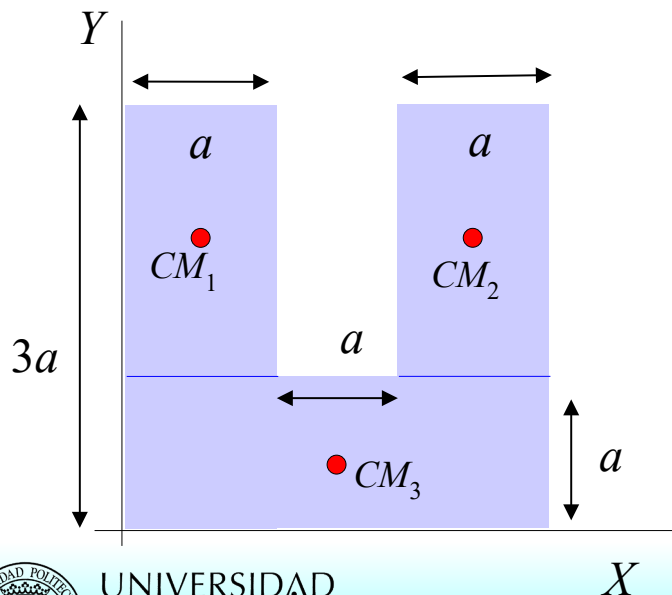
Centro de masas



- Si un sistema se puede descomponer en subsistemas $S_1, S_2, \dots, S_n$ de masas $M_1, M_2, \dots, M_n$ los centros de masas del cual son $r_{CM1}, r_{CM2}, \dots, r_{CMn}$ el centro de masas del sistema se obtiene por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum M_i \vec{r}_{CMi}}{\sum M_i}$$

Ejemplo:



$$x_{CM} = \frac{(2a^2)\sigma 0,5a + (2a^2)\sigma 2,5a + (3a^2)\sigma 1,5a}{(2a^2)\sigma + (2a^2)\sigma + (3a^2)\sigma} = 1,5a$$

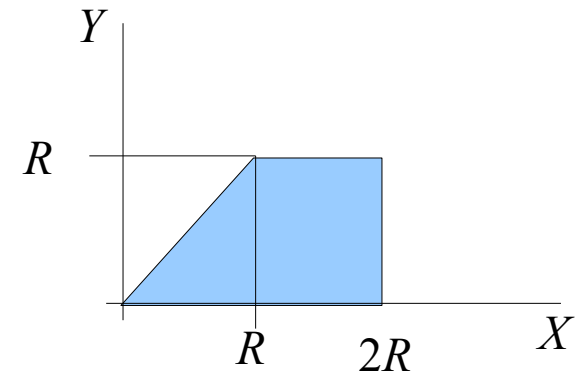
$$y_{CM} = \frac{(2a^2)\sigma 2a + (2a^2)\sigma 2a + (3a^2)\sigma 0,5a}{(2a^2)\sigma + (2a^2)\sigma + (3a^2)\sigma} = \frac{9,5}{7}a = \frac{19}{14}a$$

Problema (2005-06)



Obtener el centro de gravedad de la figura homogénea compuesta respecto al referencial presentado.

SOL: $x_{cm} = 11R/9 = 1,22R$. $y_{cm} = 4R/9 = 0,44R$.

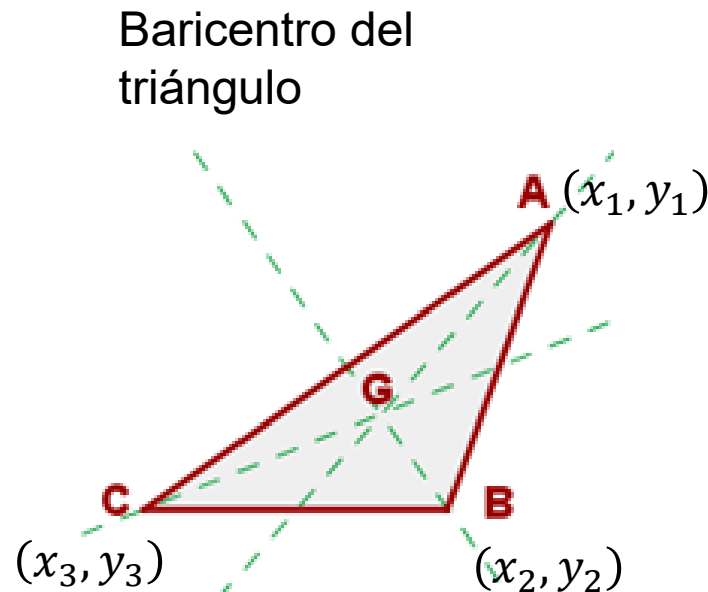
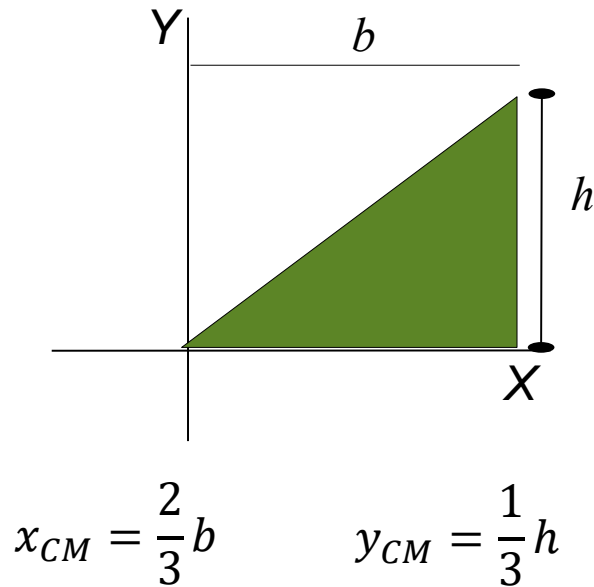
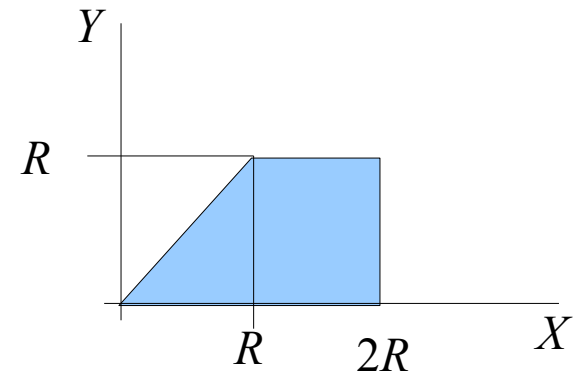


Problema (2005-06)



Obtener el centro de gravedad de la figura homogénea compuesta respecto al referencial presentado.

SOL: $x_{cm} = 11R/9 = 1,22R$. $y_{cm} = 4R/9 = 0,44R$.



$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

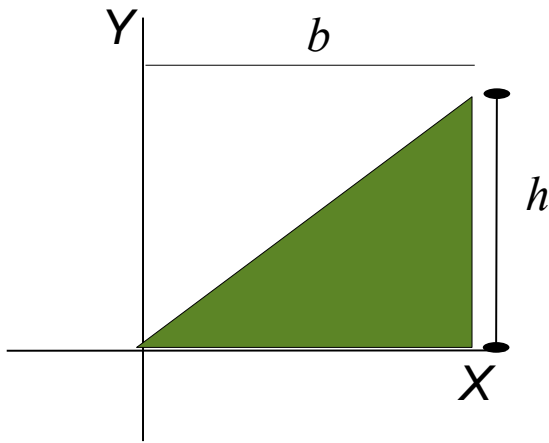
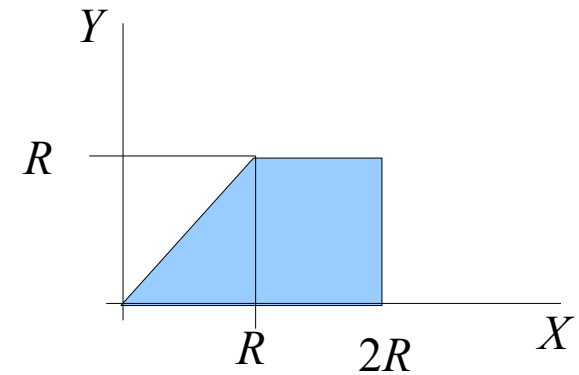
$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Problema (2005-06)

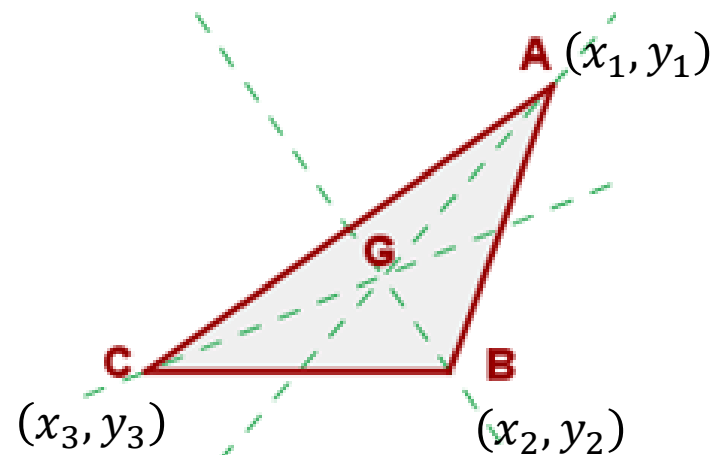


Obtener el centro de gravedad de la figura homogénea compuesta respecto al referencial presentado.

SOL: $x_{cm} = 11R/9 = 1,22R$. $y_{cm} = 4R/9 = 0,44R$.



Baricentro del triángulo

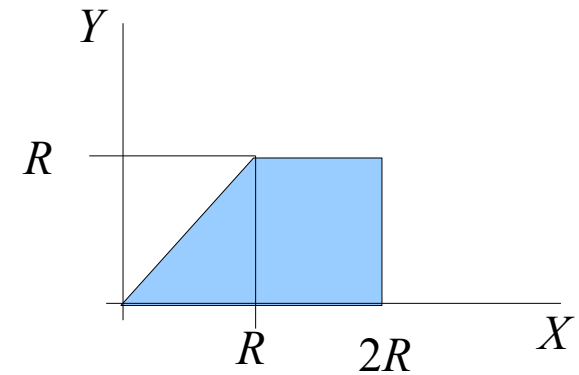


Problema (2005-06)



Obtener el centro de gravedad de la figura homogénea compuesta respecto al referencial presentado.

SOL: $x_{cm} = 11R/9 = 1,22R$. $y_{cm} = 4R/9 = 0,44R$.

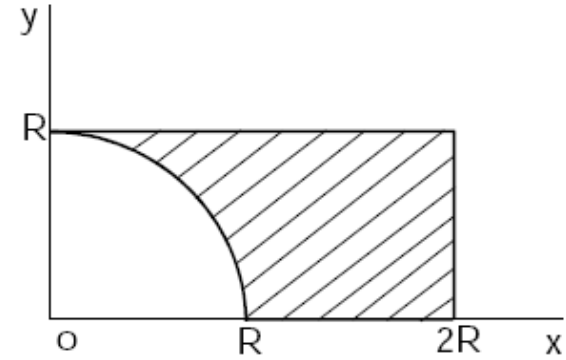


Cuestión (2009-10)



Determinar y expresar en el sistema de referencia indicado el centro geométrico del área plana representada.

SOL: $x_{cm} = 1,37R$. $y_{cm} = 0,55R$.

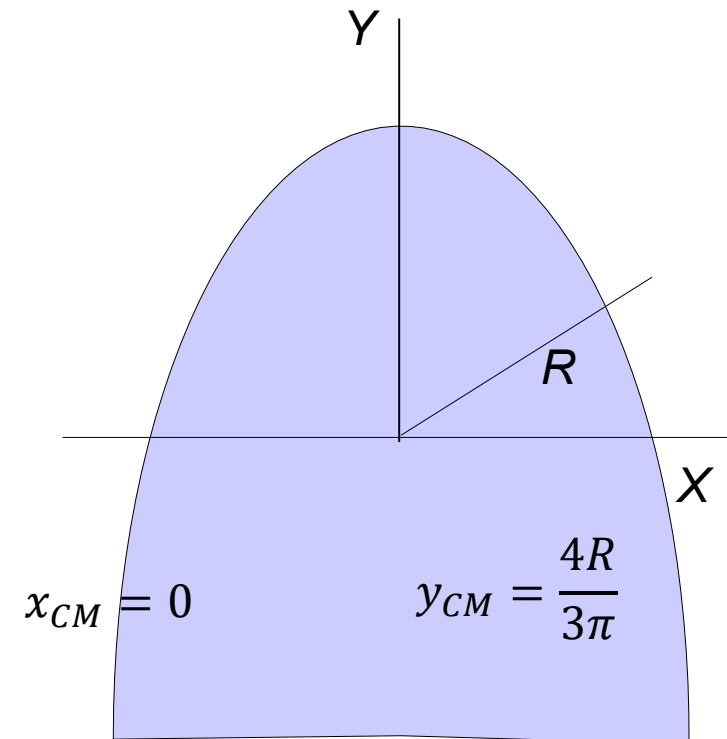
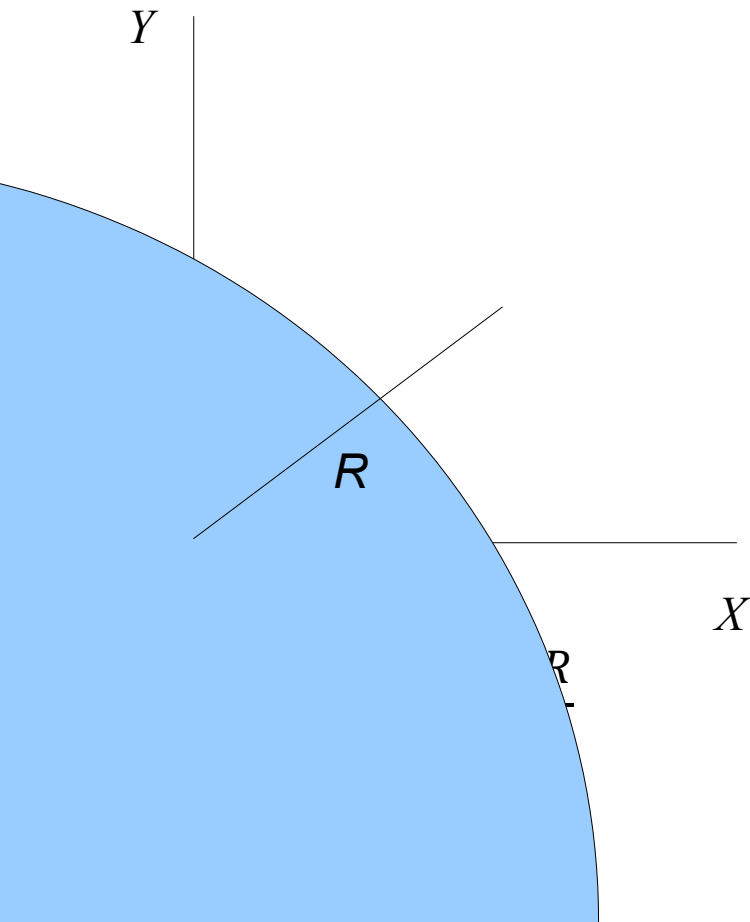
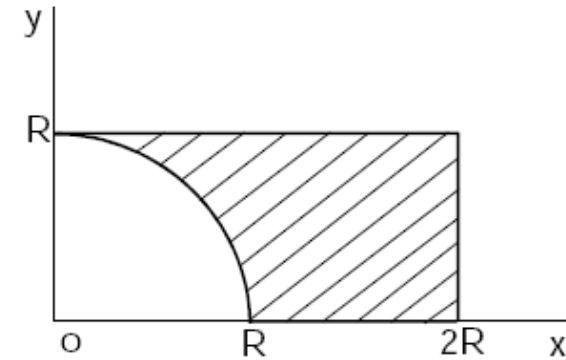


Cuestión (2009-10)



Determinar y expresar en el sistema de referencia indicado el centro geométrico del área plana representada.

SOL: $x_{cm} = 1,37R$. $y_{cm} = 0,55R$.

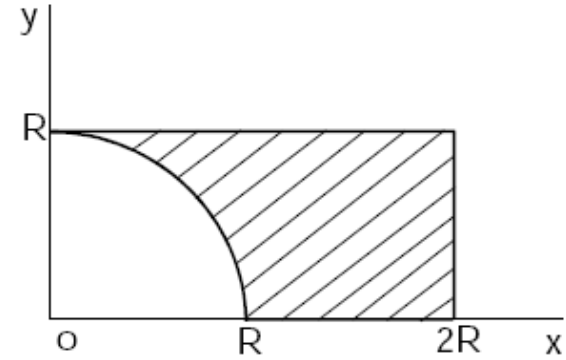


Cuestión (2009-10)



Determinar y expresar en el sistema de referencia indicado el centro geométrico del área plana representada.

SOL: $x_{cm} = 1,37R$. $y_{cm} = 0,55R$.

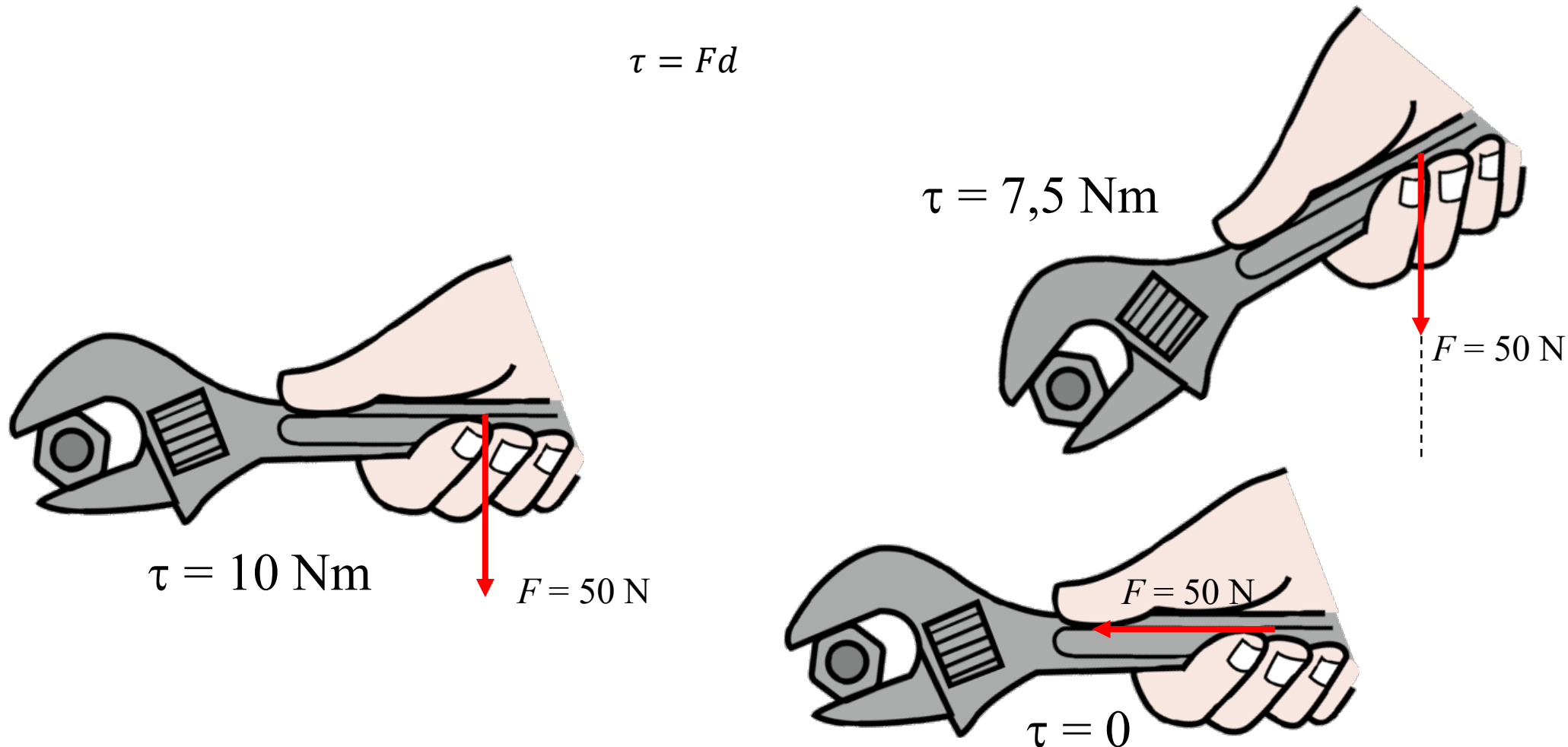


Segunda ley de Newton para la rotación



- El par o momento de una fuerza es el producto de la magnitud de la fuerza y el brazo del momento, que es la distancia perpendicular entre el eje y la línea de acción de la fuerza:

$$\tau = Fd$$



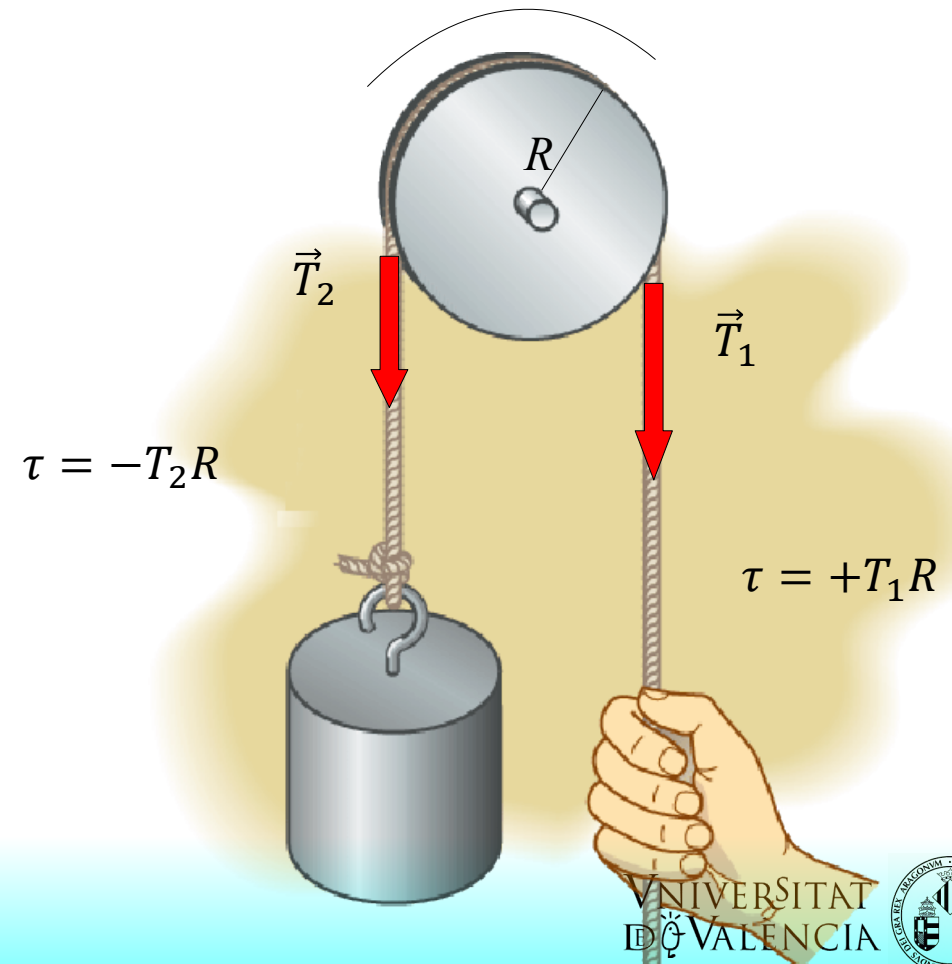
Segunda ley de Newton para la rotación



- El par o momento de una fuerza es el producto de la magnitud de la fuerza y el brazo del momento, que es la distancia perpendicular entre el eje y la línea de acción de la fuerza:

$$\tau = Fd$$

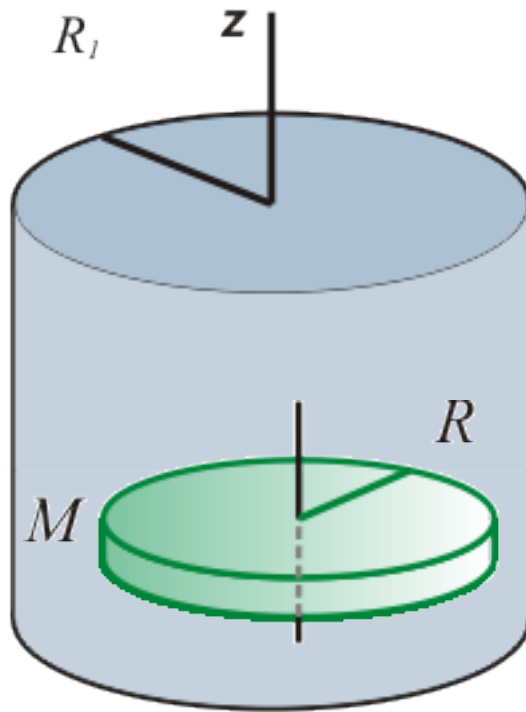
- Signo: +/- ¡¡importante!!**



Segunda ley de Newton para la rotación



- El par o momento de la fuerza externa total es igual al momento de inercia multiplicado por la aceleración angular.



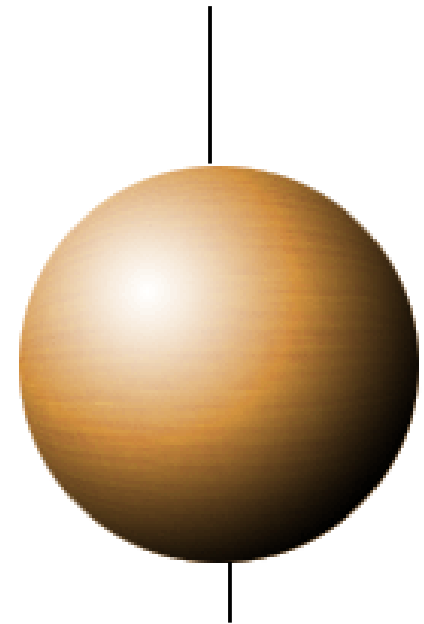
Cilindro / disco

$$I_E = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\tau_{ext} = F_{ext}d = \alpha I_E$$

Anillo:

$$I_E = MR^2$$



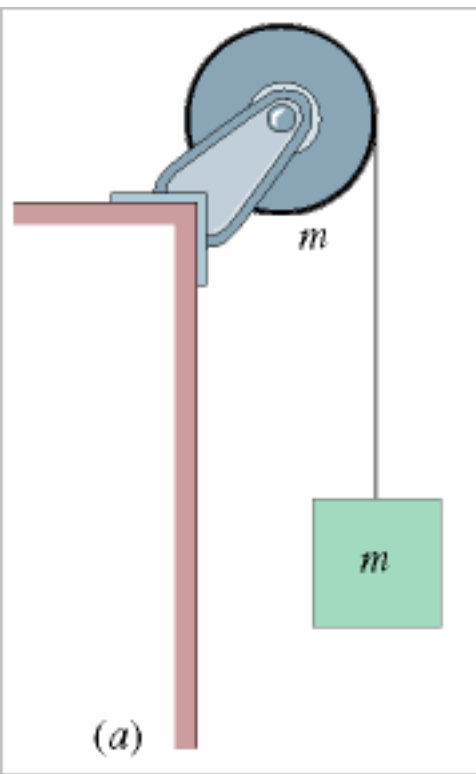
Esfera sólida:

$$I_E = \frac{2}{5}MR^2$$

Problema



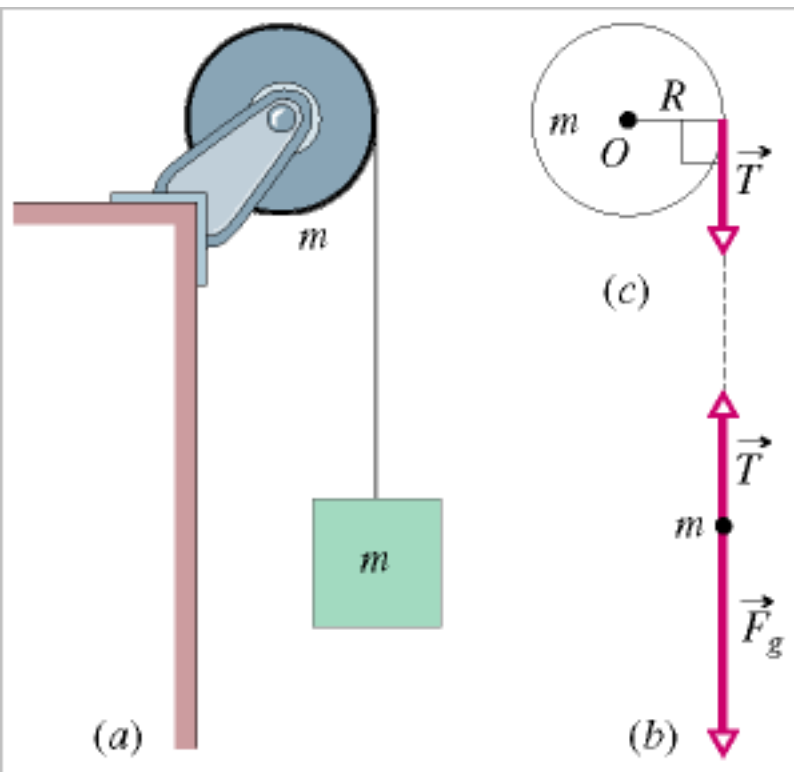
Una masa m con movimiento de traslación estira de una cuerda que a su vez estira de una polea de masa m y radio R que rota alrededor de su eje. Calcula la aceleración de caída y la tensión de la cuerda en su caída.
SOL: $a_{cm} = 2g/3$, $T = mg/3$.



Problema



Una masa m con movimiento de traslación estira de una cuerda que a su vez estira de una polea de masa m y radio R que rota alrededor de su eje. Calcula la aceleración de caída y la tensión de la cuerda en su caída.
SOL: $a_{cm} = 2g/3$, $T = mg/3$.



Problema



Una masa m con movimiento de traslación estira de una cuerda que a su vez estira de una polea de masa m y radio R que rota alrededor de su eje. Calcula la aceleración de caída y la tensión de la cuerda en su caída.
SOL: $a_{cm} = 2g/3$, $T = mg/3$.

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m\vec{a}_{cm}$$

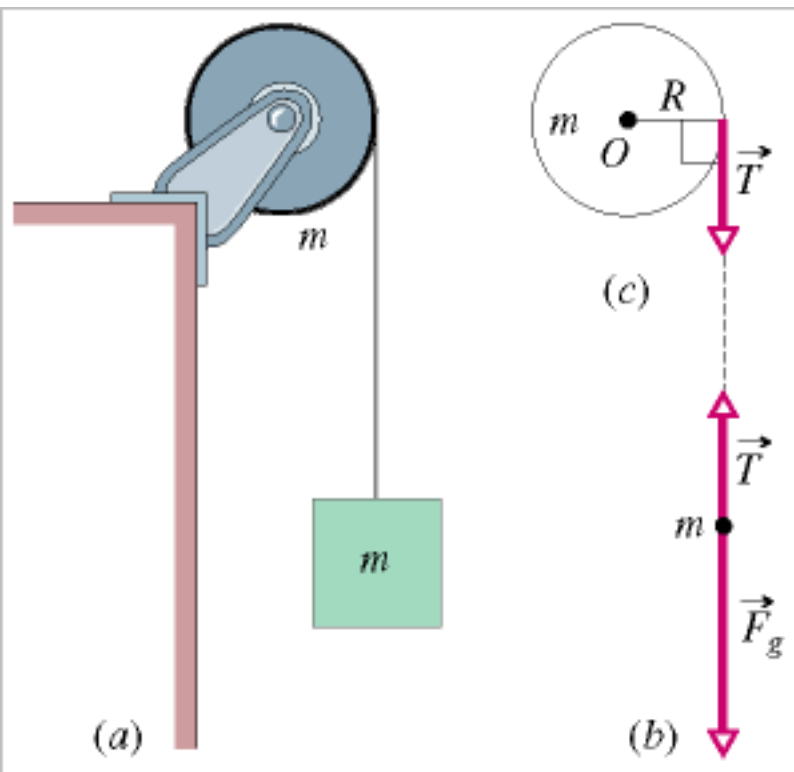
$$mg - T = ma_{cm}$$

$$TR = I_{cm}\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

Si consideramos que la aceleración lineal del borde de la polea es igual a la aceleración angular de la polea por su radio R se obtiene:

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$T = \frac{1}{3}mg$$



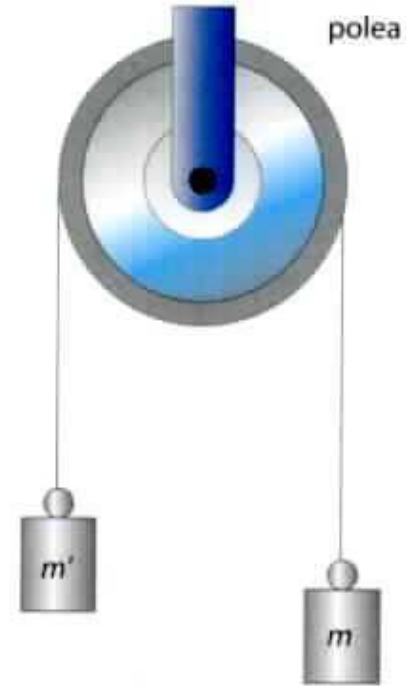
$$a_{cm} = \frac{mg}{m + m/2} = \frac{2}{3}g$$

Problema: polea



Una máquina de Atwood está formada por una polea de 5 cm de radio y 200 g de masa, de la cual cuelgan 2 masas iguales de 500 g cada una. Calcular la aceleración lineal que adquiere el sistema cuando se coloca una sobrecarga de 50 g de masa. ¿Cuál es el error que se comete al despreciar la rotación de la polea?

SOL: $0,426 \text{ m/s}^2$; 9,4%.

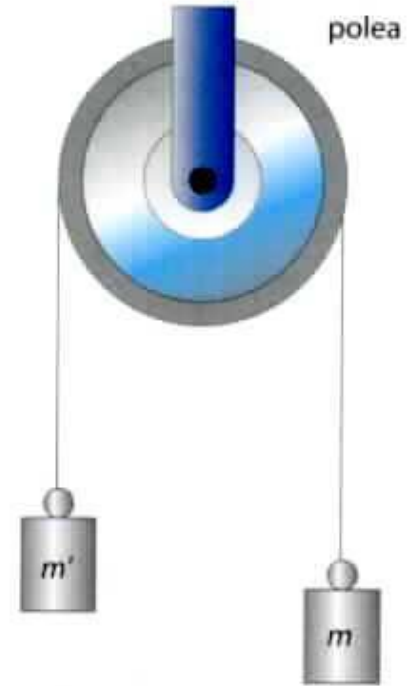


Problema: polea



Una máquina de Atwood está formada por una polea de 5 cm de radio y 200 g de masa, de la cual cuelgan 2 masas iguales de 500 g cada una. Calcular la aceleración lineal que adquiere el sistema cuando se coloca una sobrecarga de 50 g de masa. ¿Cuál es el error que se comete al despreciar la rotación de la polea?

SOL: $0,426 \text{ m/s}^2$; 9,4%.

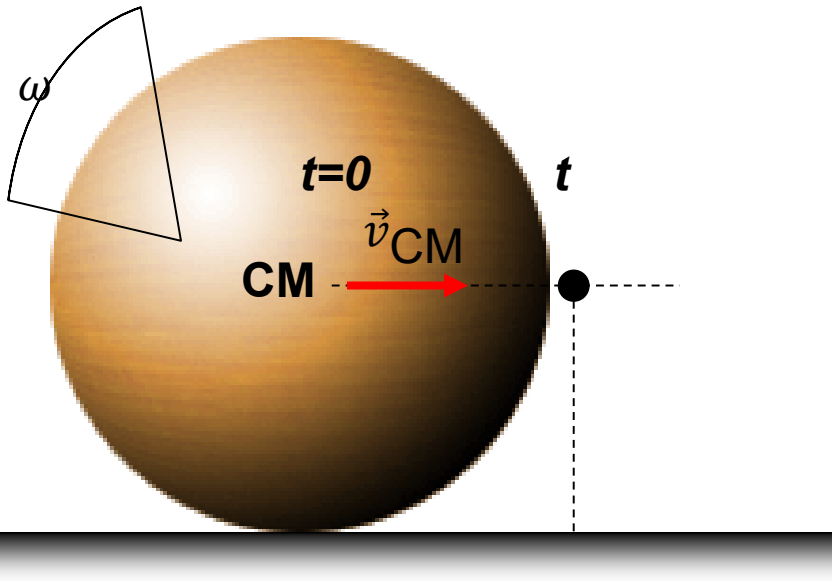


Rodadura sin deslizamiento



Un objeto rueda cuando se desplaza sin deslizar debido a su rotación sobre un eje. Cuando un objeto rueda los movimientos de traslación y rotación están relacionados (se cumplen las condiciones de rodadura). La 1ª condición de rodadura establece que si la bola gira un ángulo el punto de contacto entre la bola y el plano se mueve una distancia $s = R\phi$ y dicha distancia es igual a la que recorre el CM en un tiempo t .

Las condiciones de rodadura sin deslizamiento son:



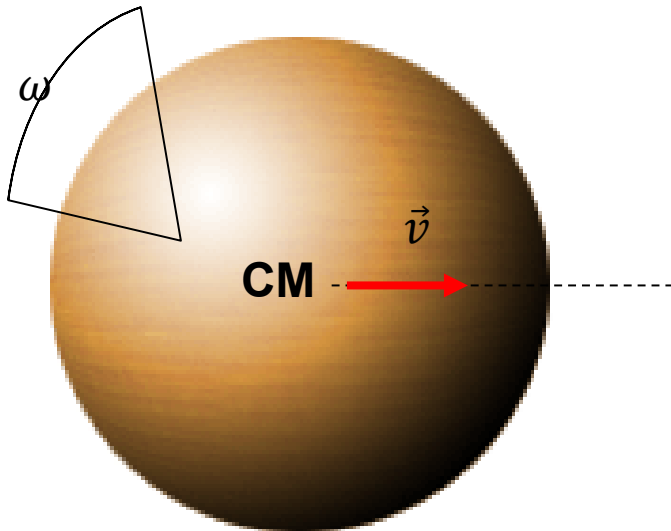
$$s_{cm} = R\phi$$

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_E\omega^2$$



$$W_A^B = \Delta E_c$$

Energía cinética
de traslación
+
Energía cinética
de rotación

Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

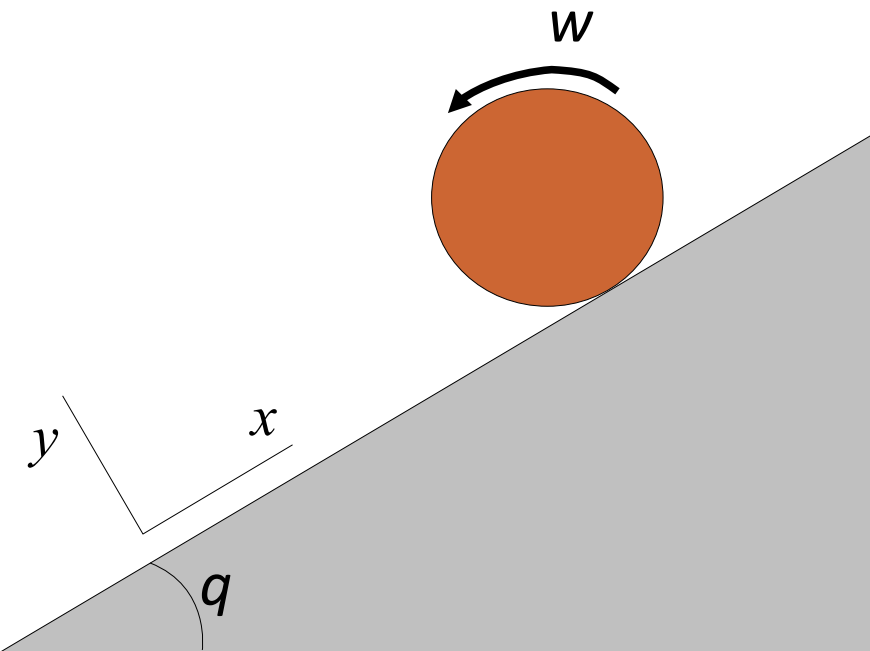
SOL: $a_{cm} = (2g \sin \theta)/3$. $F_R = (mg \sin \theta)/3$.

Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

SOL: $a_{cm} = (2g \sin \theta)/3$. $F_R = (mg \sin \theta)/3$.

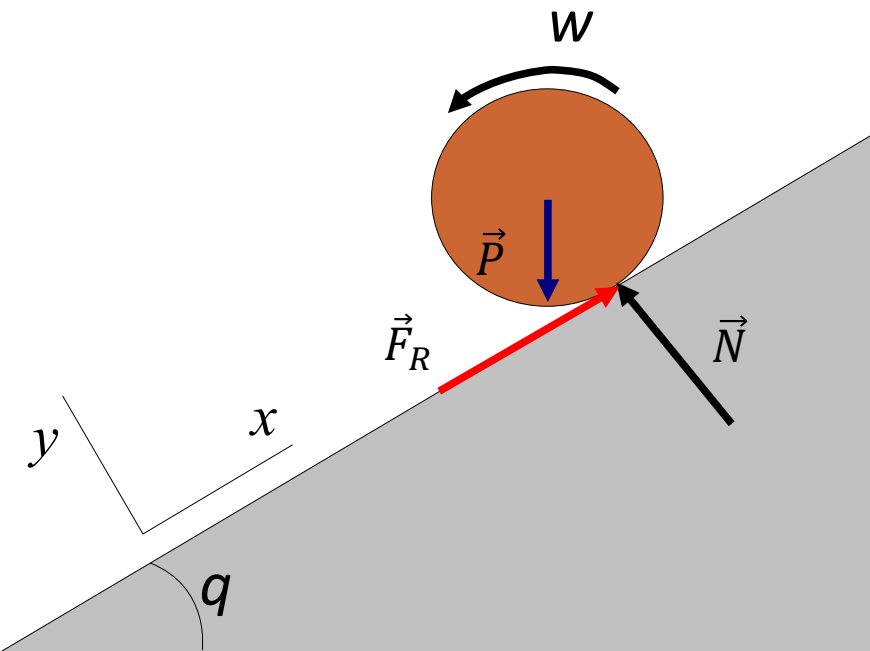


Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

SOL: $a_{cm} = (2g \sin \theta)/3$. $F_R = (mg \sin \theta)/3$.

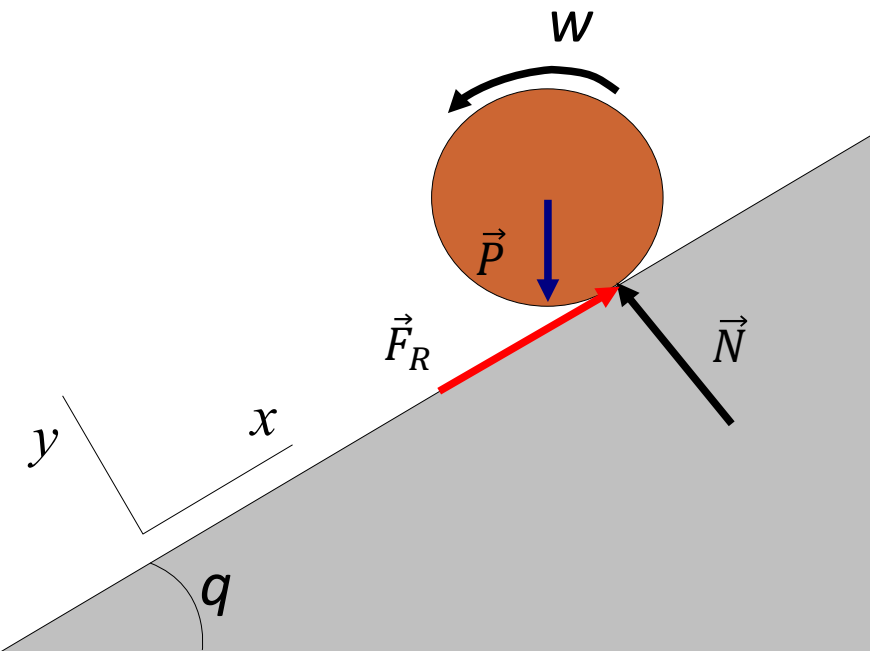


Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

SOL: $a_{cm} = (2g \sin \theta)/3$. $F_R = (mg \sin \theta)/3$.

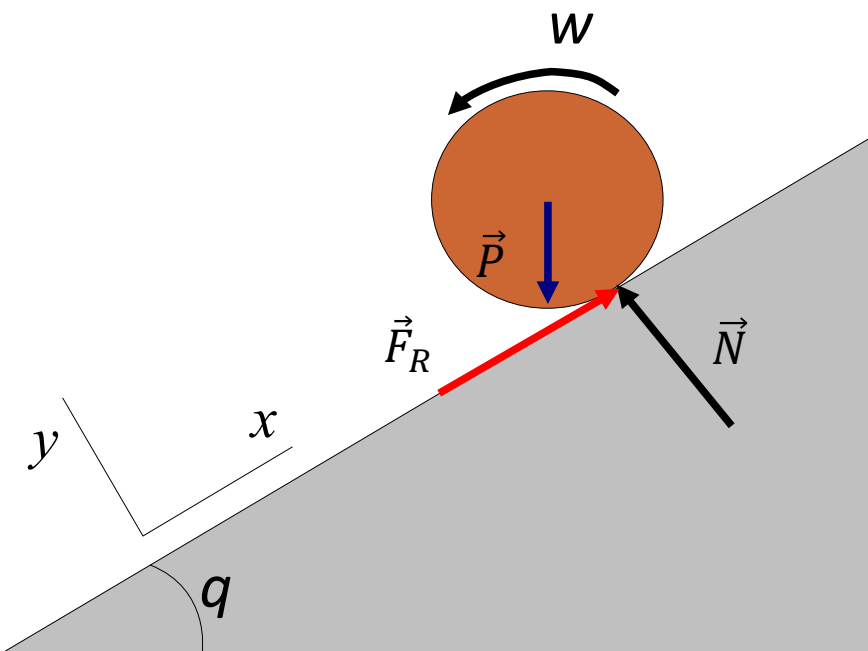


Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

SOL: $a_{cm} = (2g \sen \theta)/3$. $F_R = (mg \sen \theta)/3$.



1) Ec. Fund. Dinámica de Traslación:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_R = m\vec{a}_{cm}$$

$$mg \sen \theta - F_R = ma_{cm}$$

$$N - mg \cos \theta = 0$$

2) Ec. Fund. Dinámica de Rotación:

$$F_R R = I_{cm} \alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

3) Condición de rodadura: $a_{cm} = R\alpha$

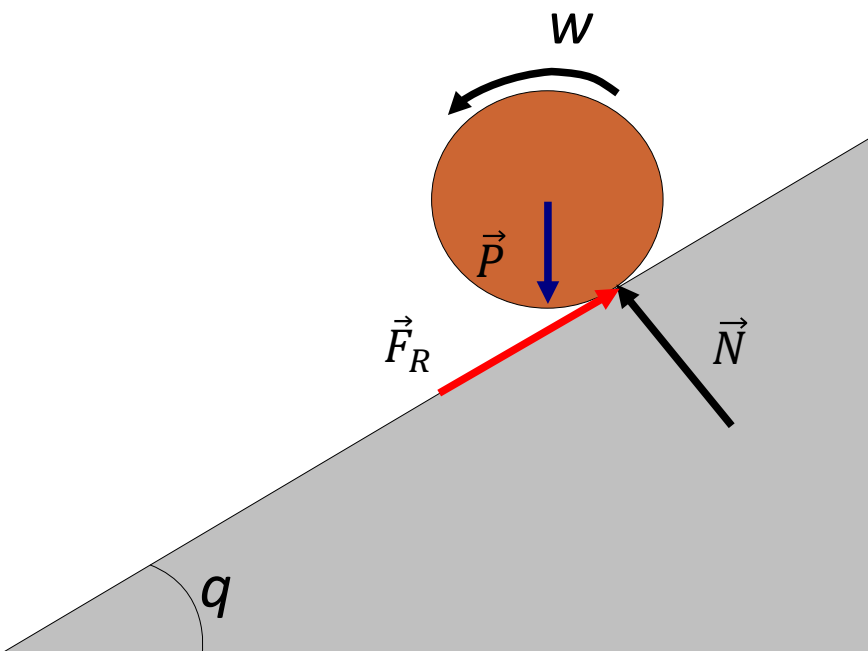
$$a_{cm} = \frac{g \sen \theta}{1 + I_{cm}/mR^2} = \frac{2}{3} g \sen \theta$$

Problema: rodadura sin deslizamiento



Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

SOL: $a_{cm} = (2g \sen \theta)/3$. $F_R = (mg \sen \theta)/3$.



La aceleración angular del cilindro es:

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{2g \sen \theta}{3R}$$

La fuerza de rozamiento por rodadura vale:

$$F_R = mg \sen \theta - ma_{cm} = \frac{1}{3} mg \sen \theta$$

La fuerza de rozamiento es necesaria para que el cilindro ruede.

Cuando un cuerpo desliza sin rodar la fuerza de rozamiento es cinética, pero cuando la velocidad disminuye y se produce la rodadura ($v = \omega R$) la fuerza de rozamiento cambia de naturaleza.

Problema: rodadura sin deslizamiento



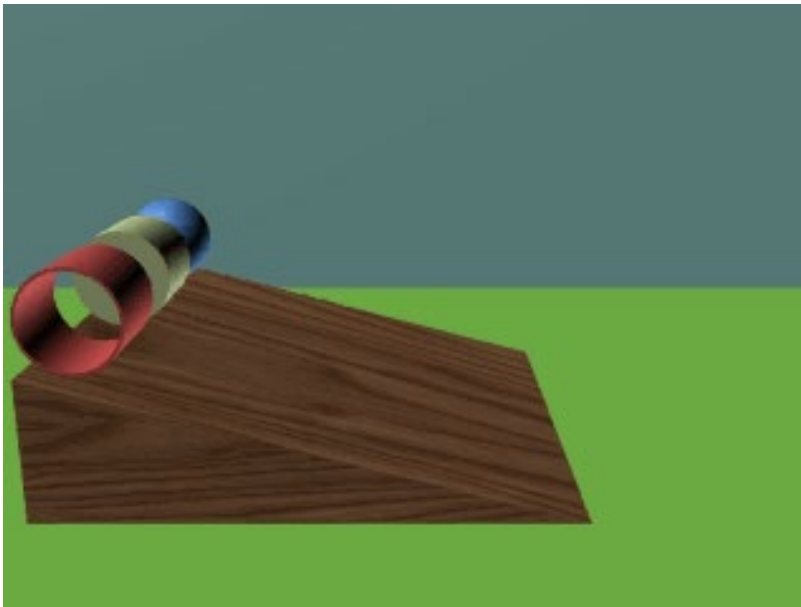
Consideremos un **cilindro** que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Calcula la aceleración del cilindro y la fuerza de rozamiento.

La fuerza de rozamiento por rodadura es una fuerza estática instantánea aplicada en el punto de contacto entre el cilindro y la superficie por la que rueda. Dicha fuerza aparece y desaparece cada instante en cada punto del cilindro en contacto (la fuerza estática **no desarrolla ningún trabajo**).

Problema



Un anillo, un cilindro y una esfera ruedan sin deslizar por un plano inclinado. Partiendo de la misma posición inicial, ¿en qué orden llegarán a la parte inferior del plano inclinado? Si el plano tiene una altura h , ¿con qué velocidad llegan cada uno de ellos al final del plano inclinado?



Problema



Un anillo, un cilindro y una esfera ruedan sin deslizar por un plano inclinado. Partiendo de la misma posición inicial, ¿en qué orden llegarán a la parte inferior del plano inclinado?

Si el plano tiene una altura h , ¿con qué velocidad llegan cada uno de ellos al final del plano inclinado?

SOL: esfera, cilindro y anillo.

Problema



Un anillo, un cilindro y una esfera ruedan sin deslizar por un plano inclinado. Partiendo de la misma posición inicial, ¿en qué orden llegarán a la parte inferior del plano inclinado?

Si el plano tiene una altura h , ¿con qué velocidad llegan cada uno de ellos al final del plano inclinado?

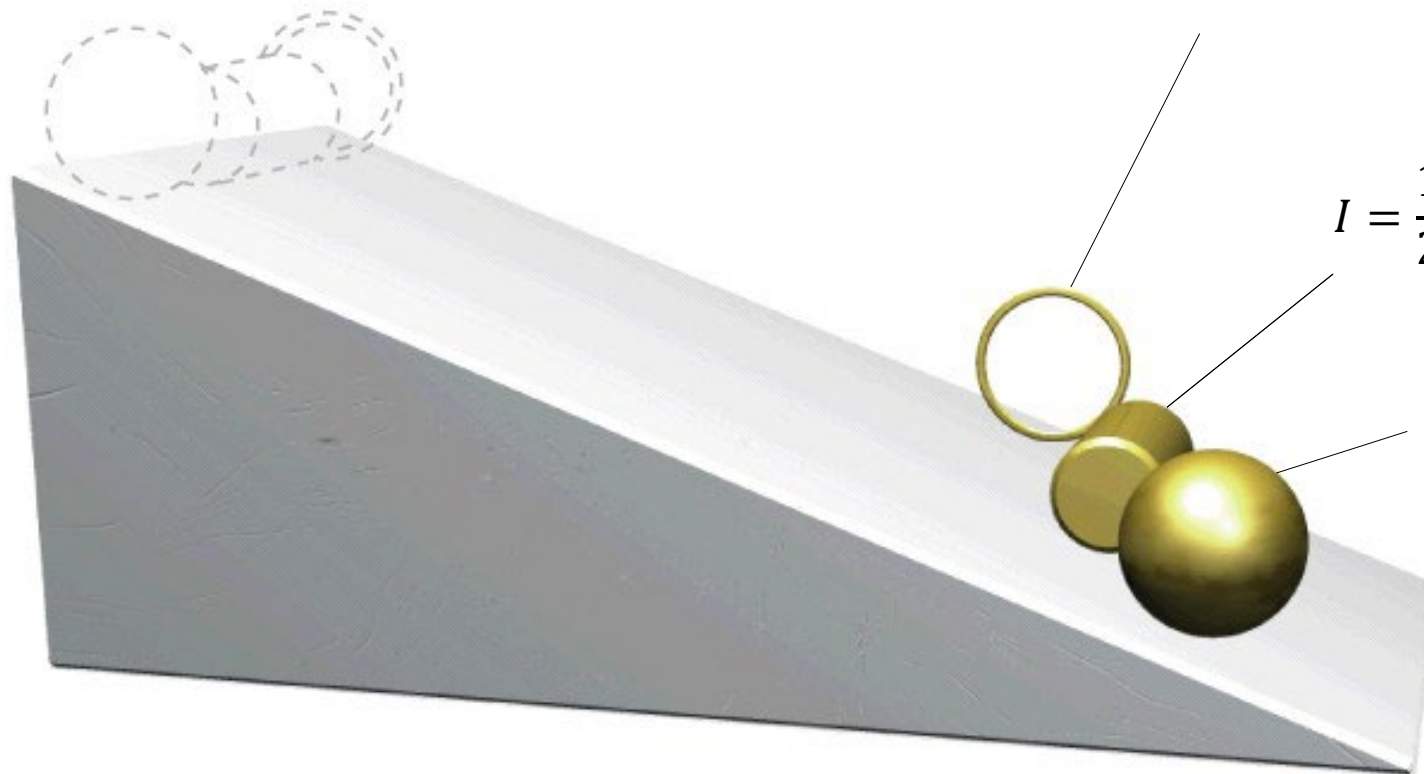
SOL: esfera, cilindro y anillo.

$$v_{\text{anillo}} = \sqrt{gh}. \quad v_{\text{cilindro}} = \sqrt{4gh/3}. \quad v_{\text{esfera}} = \sqrt{10gh/7}.$$

$$I = MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

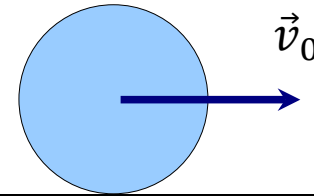
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



Problema (2003-04)



Un disco homogéneo de masa M y radio R , se lanza encima de un suelo horizontal rugoso con una velocidad inicial v_0 también horizontal pero sin velocidad angular. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento al deslizamiento μ es



constante, el disco comienza a avanzar deslizando hasta que pasado un tiempo T empieza a rodar sin deslizar (velocidad en el punto de contacto disco-suelo es nula).

Determinar:

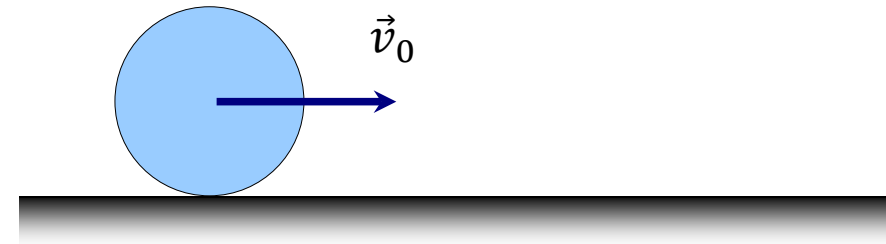
- a) Instante T indicado.
- b) Los valores que tendrán en dicho instante la velocidad del centro del disco y la velocidad angular.
- c) Mediante consideraciones energéticas determinar la distancia que habrá recorrido hasta ese instante.

SOL: a) $T=v_0/3\mu g$. b) $v=2v_0/3$, $\omega=2v_0/3R$. c) $d=v_0^2/6\mu g$.

Problema (2003-04)



- a) Instante T indicado.
b) Los valores que tendrán en dicho instante la velocidad del centro del disco y la velocidad angular.
c) Mediante consideraciones energéticas determinar la distancia que habrá recorrido hasta ese instante.
- SOL: a) $T=v_0/3\mu g$. b) $v=2v_0/3$, $\omega=2v_0/3R$. c) $d=v_0^2/6\mu g$.

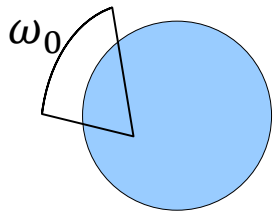


Problema



Un cilindro sólido homogéneo de radio $r=30\text{ cm}$ y masa $m=2\text{ kg}$ tiene una velocidad angular $\omega_0=10\text{ rad/s}$ cuando cae sobre una superficie plana horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el cilindro es de 0,1. Tras el contacto con el suelo, el cilindro girará deslizando durante un tiempo t , pasando después a rodar sin deslizar. Se pide: a) ¿Cuál es el valor de t ? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas en dicho instante t ?

SOL: a) $t=1.02\text{ s}$. b) $v=1\text{ m/s}$.



Problema



a) ¿Cuál es el valor de t ? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas en dicho instante t ?

SOL: a) $t=1.02$ s. b) $v=1$ m/s.

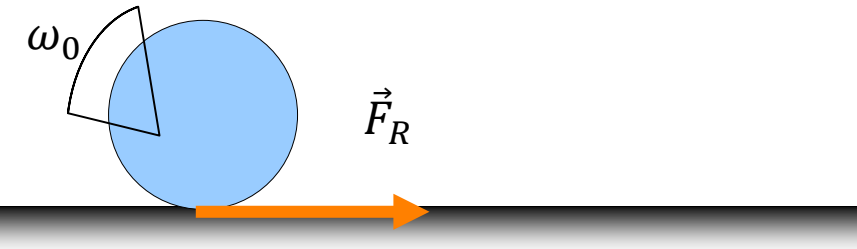


Problema



a) ¿Cuál es el valor de t ? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas en dicho instante t ?

SOL: a) $t=1.02$ s. b) $v=1$ m/s.



Problema

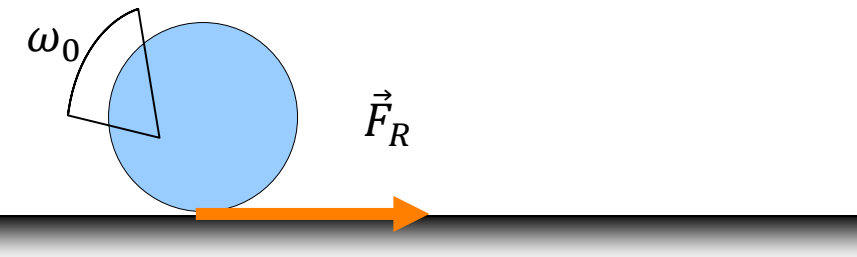


Un cilindro sólido homogéneo de radio $r=30\text{ cm}$ y masa $m=2\text{ kg}$ tiene una velocidad angular $\omega=10\text{ rad/s}$ cuando cae sobre una superficie plana horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el cilindro es de 0,1. Tras el contacto con el suelo, el cilindro girará deslizando durante un tiempo t , pasando después a rodar sin deslizar. Se pide: a) ¿Cuál es el valor de t ? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas en dicho instante t ?

SOL: a) $t=1.02\text{ s}$. b) $v=1\text{ m/s}$.

$$M = RF_R = R\mu mg = -I\alpha = \frac{-1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-2\mu g}{R}$$

$$\mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g$$



$$v = at = \mu gt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t$$

$$v = \omega R$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

Momento angular



- Se define el momento angular total de un sistema de partículas respecto a un punto del espacio O , como el vector que viene dado por la suma de los momentos angulares de cada partícula respecto del punto O :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

- La variación del momento angular total del sistema respecto a un punto O es igual al par o momento de las fuerzas externas que actúa sobre el sistema respecto al punto O .

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{ext}$$

Conservación del momento angular



- Si sobre un sistema de partículas no actúa ninguna fuerza externa o actúa una serie de fuerzas externas cuyo momento resultante respecto a un punto es nulo entonces el momento angular respecto a dicho punto se conserva.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = cte$$

Problema



Un astronauta sufre un accidente en el espacio exterior y queda colgado de una cuerda de masa despreciable de longitud d conectada a un eje. Si inicialmente el astronauta queda girando alrededor del eje con una velocidad angular ω_0 , ¿con qué velocidad girará si al tratar de alcanzar el eje estirando de la cuerda se reduce la distancia a $d/2$?

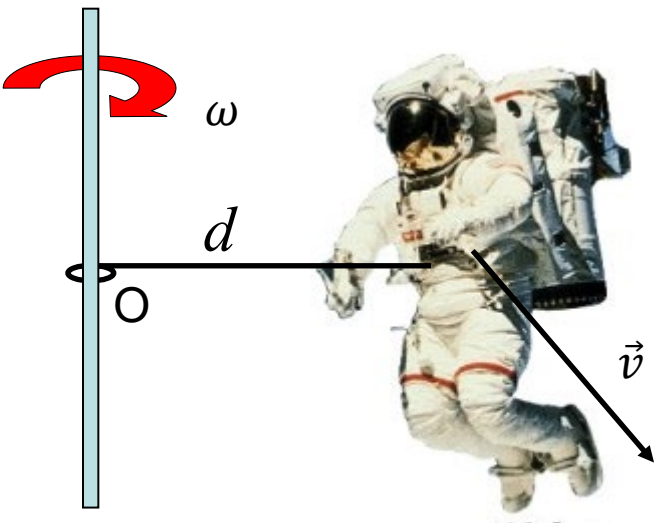
SOL: $\omega = 4\omega_0$.

Problema



Un astronauta sufre un accidente en el espacio exterior y queda colgado de una cuerda de masa despreciable de longitud d conectada a un eje. Si inicialmente el astronauta queda girando alrededor del eje con una velocidad angular ω_0 , ¿con qué velocidad girará si al tratar de alcanzar el eje estirando de la cuerda se reduce la distancia a $d/2$?

SOL: $\omega = 4\omega_0$.

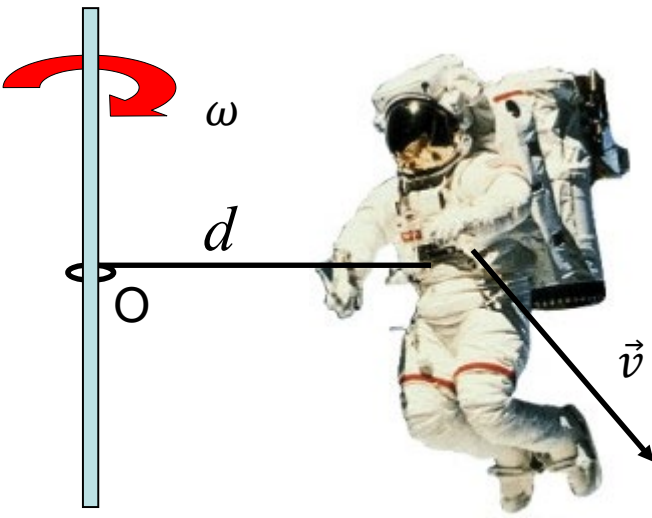


Problema



Un astronauta sufre un accidente en el espacio exterior y queda colgado de una cuerda de masa despreciable de longitud d conectada a un eje. Si inicialmente el astronauta queda girando alrededor del eje con una velocidad angular ω_0 , ¿con qué velocidad girará si al tratar de alcanzar el eje estirando de la cuerda se reduce la distancia a $d/2$?

SOL: $\omega = 4\omega_0$.



Como el astronauta es un sistema aislado se debe conservar su momento angular total respecto al eje de giro

$$\vec{L}_O = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{cte}$$

$$|\vec{L}_O| = m\omega_0 d^2 = \text{cte}$$

$$|\vec{L}'_O| = m\omega_0 (d/2)^2 = |\vec{L}_O|$$

$$\omega = 4\omega_0$$

Problema

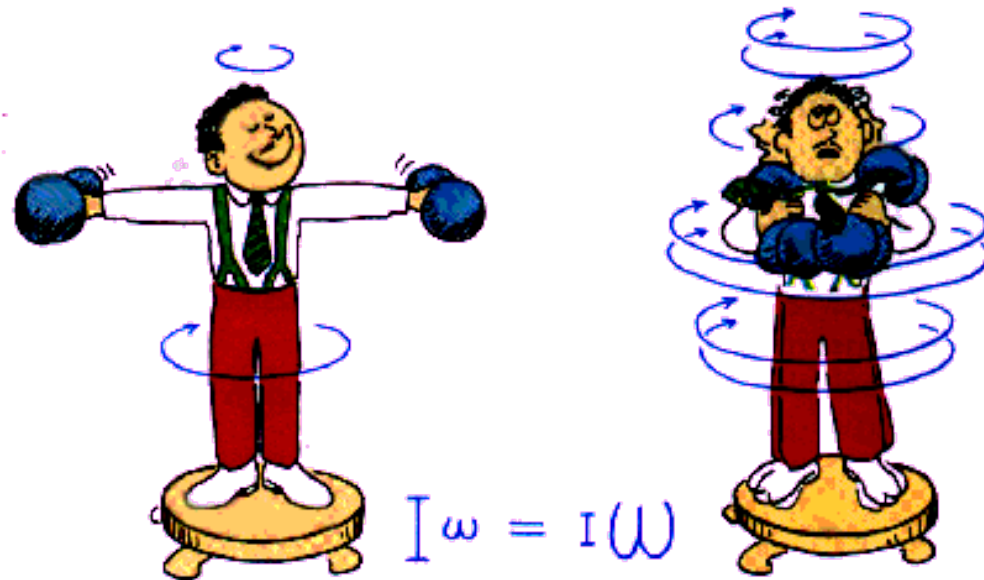


- Un señor está montado en un taburete giratorio y tiene una pesa en cada mano. Si extiende las manos y se le da un impulso gira despacio pero si se le ocurre pegar las manos al cuerpo gira muy deprisa. ¿Por qué?



Problema

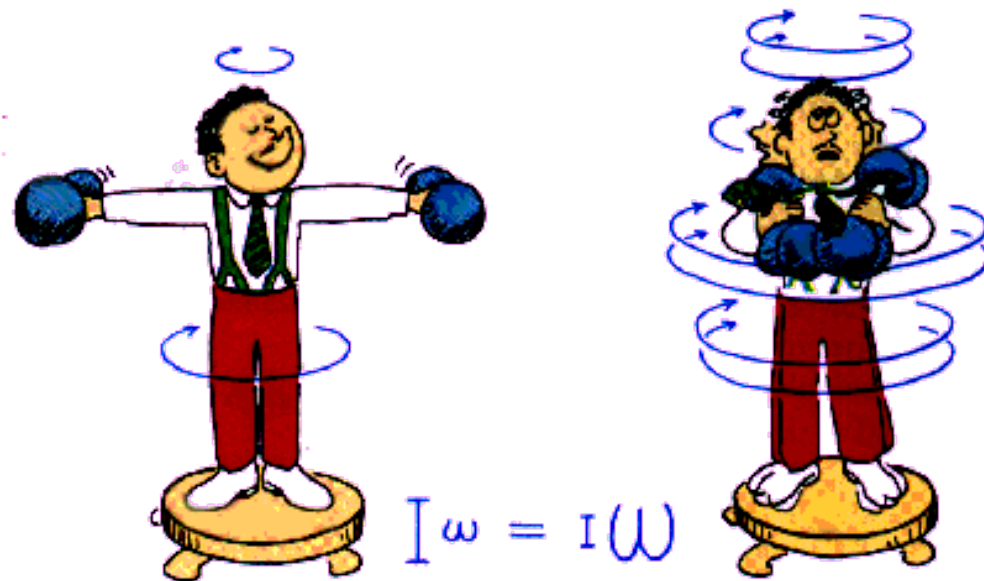
- Un señor está montado en un taburete giratorio y tiene una pesa en cada mano. Si extiende las manos y se le da un impulso gira despacio pero si se le ocurre pegar las manos al cuerpo gira muy deprisa. ¿Por qué?



Problema



- Un señor está montado en un taburete giratorio y tiene una pesa en cada mano. Si extiende las manos y se le da un impulso gira despacio pero si se le ocurre pegar las manos al cuerpo gira muy deprisa. ¿Por qué?



$$L_E = (I_{hi} + I_{pi})\omega_i = cte$$

$$I_{pi} = m_p R^2$$

$$L'_E = (I_{hf} + I_{pf})\omega_f = L_E$$

$$I_{pf} \approx 0 \quad I_{hf} < I_{hi}$$

$$\omega_f = \frac{I_{hi} + m_p R^2}{I_{hf}} \omega_i \gg \omega_i$$

Problema



En un parque hay instalada una plataforma en forma de disco que puede rodar sin rozamiento respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por su centro. La plataforma tiene una masa de 250 kg y un radio de 200 cm. Un niño (de 30 kg) que acaba de llegar a jugar la ve parada y libre y empieza a correr (tangencialmente a un radio) para subir en ella. Cuando salta encima lleva una velocidad lineal de 3 m/s. ¿Cuál será la velocidad angular que toma el conjunto una vez el niño se encuentra encima? ¿Qué pasa si el niño decidiese ir desde el extremo de la plataforma a una distancia de 1 m respecto al centro? SOL: a) 0,29 rad/s; b) 0,34 rad/s.



Problema

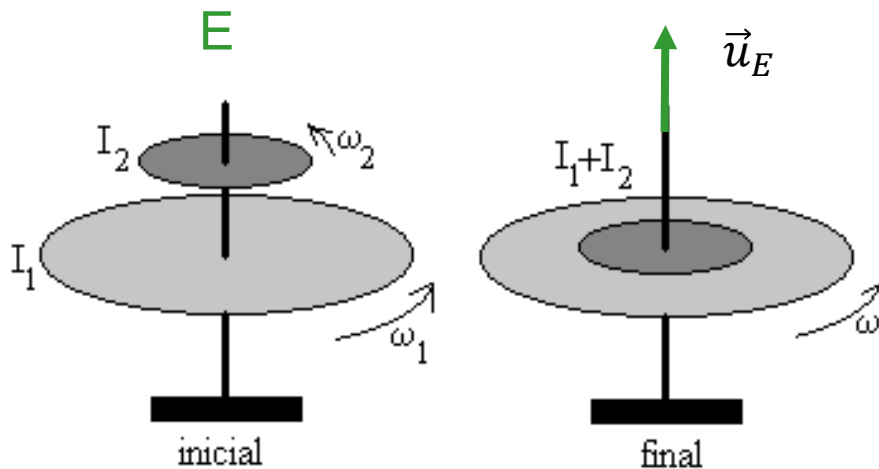


Dos discos de momentos de inercia distintos giran alrededor de un eje común con velocidades angulares distintas como se indica en la figura. Calcular la velocidad angular final ω con la que girarán ambos juntos. Si sobre el sistema final actúa una fuerza tangencialmente al disco de mayor radio que tiene a frenar el sistema calcular la aceleración angular del sistema.

Problema



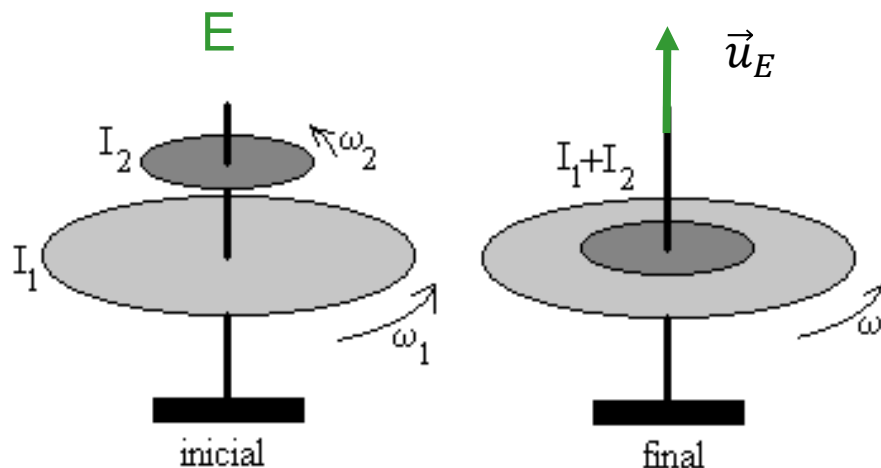
Dos discos de momentos de inercia distintos giran alrededor de un eje común con velocidades angulares distintas como se indica en la figura. Calcular la velocidad angular final ω con la que girarán ambos juntos. Si sobre el sistema final actúa una fuerza tangencialmente al disco de mayor radio que tiene a frenar el sistema calcular la aceleración angular del sistema.



Problema



Dos discos de momentos de inercia distintos giran alrededor de un eje común con velocidades angulares distintas como se indica en la figura. Calcular la velocidad angular final ω con la que girarán ambos juntos. Si sobre el sistema final actúa una fuerza tangencialmente al disco de mayor radio que tiene a frenar el sistema calcular la aceleración angular del sistema.



Antes de que actúe la fuerza el sistema de los dos discos es un sistema aislado

$$L_E = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = cte$$

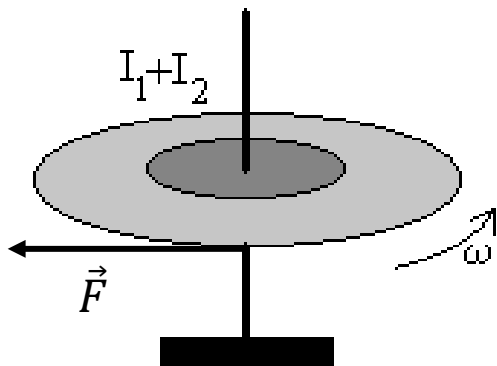
$$L'_E = (I_1 + I_2)\omega = cte$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

Problema



Dos discos de momentos de inercia distintos giran alrededor de un eje común con velocidades angulares distintas como se indica en la figura. Calcular la velocidad angular final ω con la que girarán ambos juntos. Si sobre el sistema final actúa una fuerza tangencialmente al disco de mayor radio que tiene a frenar el sistema calcular la aceleración angular del sistema.

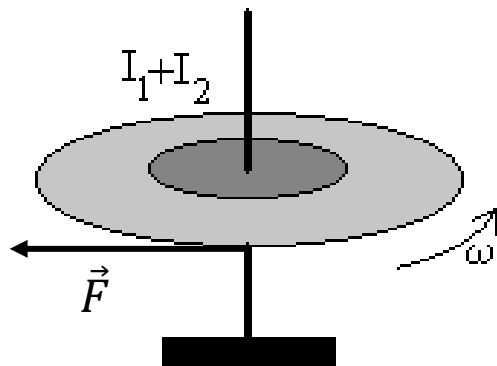


Problema



Dos discos de momentos de inercia distintos giran alrededor de un eje común con velocidades angulares distintas como se indica en la figura. Calcular la velocidad angular final ω con la que girarán ambos juntos. Si sobre el sistema final actúa una fuerza tangencialmente al disco de mayor radio que tiene a frenar el sistema calcular la aceleración angular del sistema.

La fuerza ejerce un momento respecto al eje



$$-R_1 F = (I_1 + I_2) \alpha$$

$$\alpha = \frac{-R_1 F}{I_1 + I_2}$$

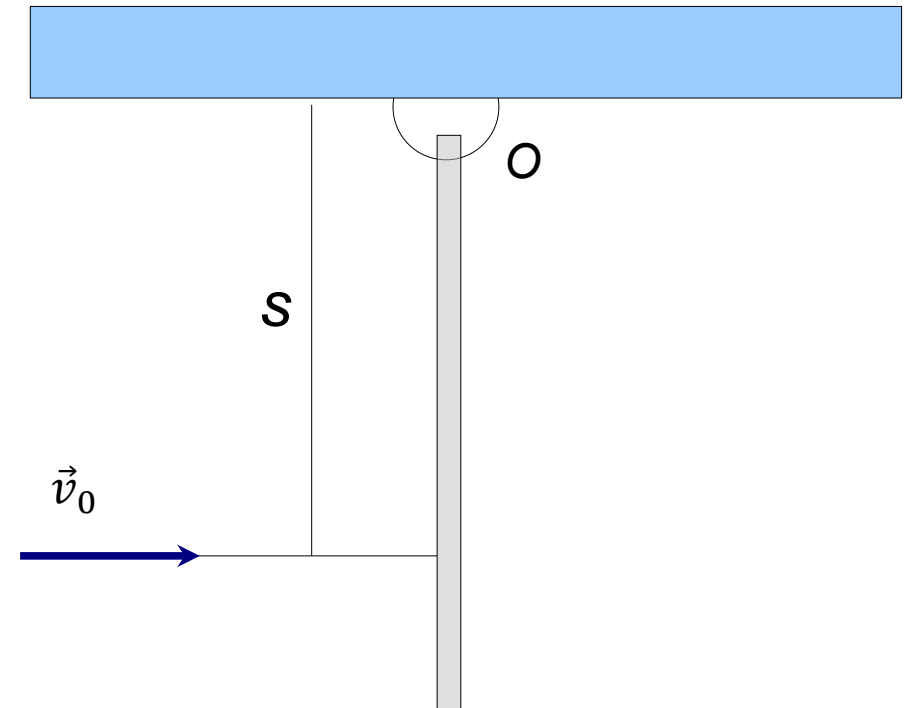
Problema



Una varilla de longitud l y masa M puede girar libremente alrededor del punto de suspensión O , como se indica en la figura. Sobre la barra se lanza una partícula de masa $m=M/6$ con una velocidad v_0 , quedando adherida a la barra a una distancia s del punto de suspensión (ver figura). Determinar:

- a) Distancia del centro de masas al punto O después del choque.
- b) Velocidad del centro de masas del sistema barra+partícula después del choque.

SOL: a) $(3l+s)/7$, b) $(sv_0)/(2l^2+s^2)(s+3l)/7$



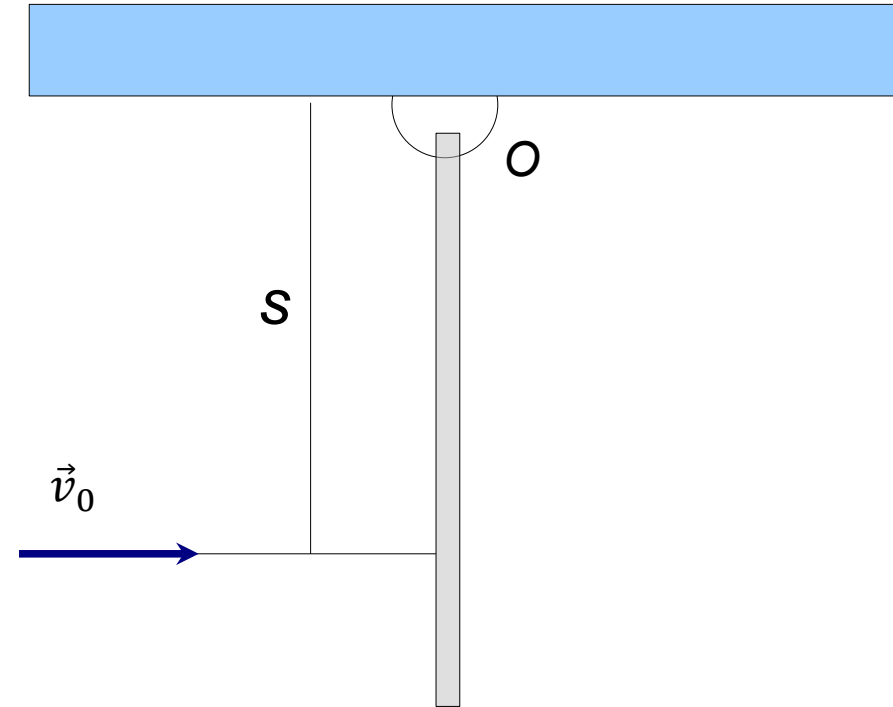
Problema



a) Distancia del centro de masas al punto O después del choque.

b) Velocidad del centro de masas del sistema barra+partícula después del choque.

SOL: a) $(3l+s)/7$, b) $(sv_0)/(2l^2+s^2)(s+3l)/7$



Problema



Una varilla de longitud l y masa M puede girar libremente alrededor del punto de suspensión O , como se indica en la figura. Sobre la barra se lanza una partícula de masa $m=M/6$ con una velocidad v_0 , quedando adherida a la barra a una distancia s del punto de suspensión (ver figura). Determinar:

- Distancia del centro de masas al punto O después del choque.
- Velocidad del centro de masas del sistema barra+partícula después del choque.

SOL: a) $(3l+s)/7$, b) $(sv_0)/(2l^2+s^2)(s+3l)/7$

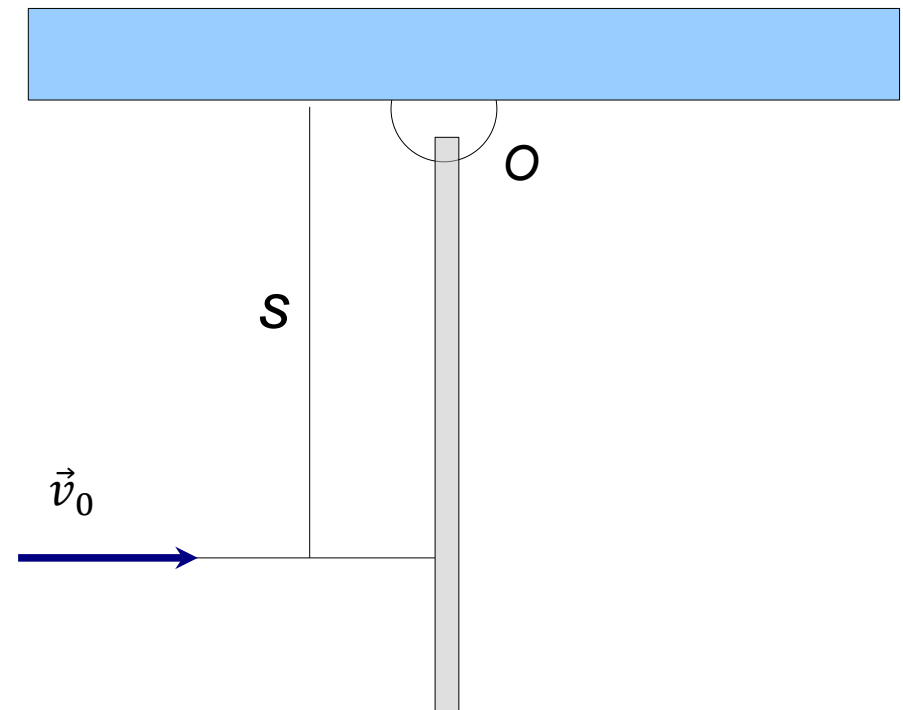
$$y_{cm} = \frac{M/6 \cdot s + M \cdot l/2}{7/6 \cdot M} = \frac{s + 3 \cdot l}{7}$$

$$L_1 + L_2 = I\omega$$

$$\frac{M}{6}s \cdot v_0 + 0 = \left(\frac{1}{3}M \cdot l^2 + \frac{1}{6}M \cdot s^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{s \cdot v_0}{2 \cdot l^2 + s^2}$$

$$v = \frac{s \cdot v_0}{2 \cdot l^2 + s^2} \frac{s + 3 \cdot l}{7}$$



Problema (Almería 2005)



SOL: <https://rsef.es/images/Problemas/OEF2005/P1-OEF-2005.pdf>

Un buen día soleado, Pedro y Ana se divierten en el parque de atracciones. Montados en la noria, a Pedro se le plantean muchas cuestiones de Física, como las siguientes. El radio de la noria es $R = 10$ m, y el motor que la acciona tiene una potencia $P = 2$ kW.

Se desprecian todos los rozamientos.

- ¿Cuál es la masa móvil de la noria, suponiendo que toda ella se encuentra en la periferia, si tarda 10 s en adquirir una velocidad angular de $0,2$ rad/s?
- Cuando Pedro pasa por la posición más alta, se le cae una moneda del bolsillo. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo? ¿A qué distancia cae, medida desde la vertical del punto más alto?
- ¿Qué velocidad angular debería tener la noria para que Ana se sintiera ingravida, y en qué posición le ocurriría esto?
- Describe el movimiento de Ana visto desde la cabina de Pedro, diametralmente opuesta a la suya. ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en función del tiempo? ¿Cómo es el movimiento de Pedro respecto a Ana?
- En un momento en que el motor está desconectado y la noria girando a una velocidad de $0,1$ rad/s, Pedro sube a la noria en marcha dando un pequeño salto lateral desde el andén. Si pesa 50 kg, ¿cuál es la variación de velocidad angular de la noria debida al salto?

Problema (2003)



Un muñeco saltarín se puede aproximar mediante un muelle de longitud $l_0 = 5,0$ cm de masa despreciable, unido a un disco de masa $m = 40$ g, y el conjunto está ensartado en un largo eje vertical fijo al suelo. El juguete se deja caer desde una altura $h_0 = 25$ cm (ver figura, arriba). Después de tocar el suelo, el muelle se comprime hasta una longitud $l = 2,0$ cm (abajo).

Se desprecian todos los rozamientos.

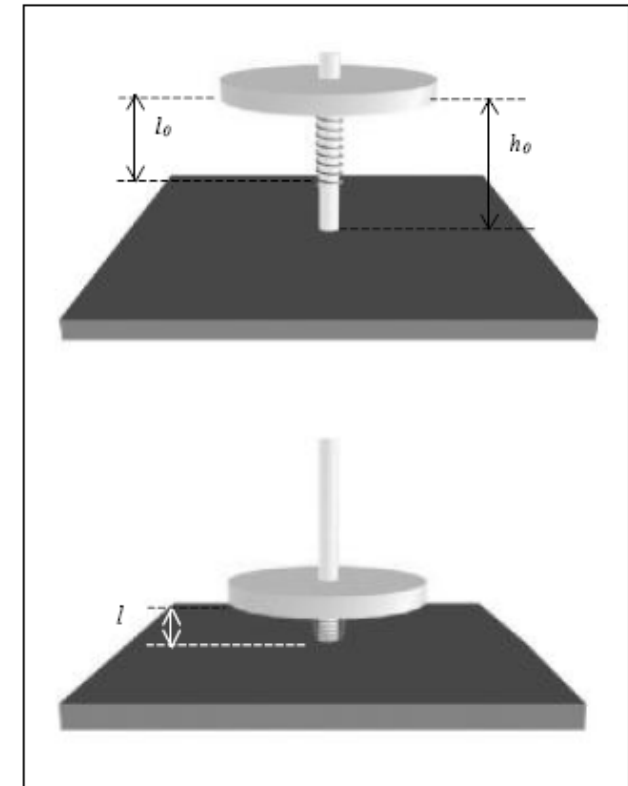
1. Describir el movimiento del disco, mediante:

- Una explicación cualitativa analizando el balance energético.
- Una representación gráfica de su altura h en función del tiempo t .
- Las ecuaciones del movimiento, indicando el significado de los términos incluidos en ellas.

2. Calcular:

- La constante elástica del muelle.
- La máxima energía potencial almacenada en el muelle.
- El periodo del movimiento.

Sol: <http://personales.upv.es/jogomez/of/sol/MunecoSaltarin.pdf>

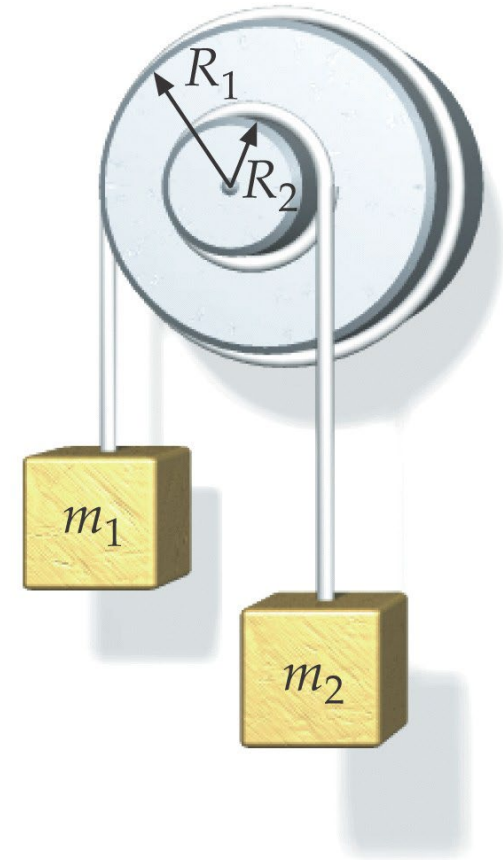


Problema



Dos objetos cuerpos cuelgan de dos masas unidas a dos ruedas capaces de girar respecto al mismo eje del modo en el que se indica en la figura. El momento de inercia total de las dos ruedas es de 40 kg m^2 . Los radios son $R_1=1,2 \text{ m}$ y $R_2=0,4 \text{ m}$. (a) Si $m_1=24 \text{ kg}$, calcúlese el valor de m_2 para que el sistema esté en equilibrio. (b) Si se colocan con suavidad 12 kg sobre la parte superior de m_1 , calcular la aceleración de cada cuerpo, la aceleración angular de la rueda y la tensión de las cuerdas.

SOL: (a) 72 kg . (b) $a_1=1,638 \text{ m/s}^2$, $a_2=0,546 \text{ m/s}^2$, $T_1=293,8 \text{ N}$, $T_2=744,9 \text{ N}$.

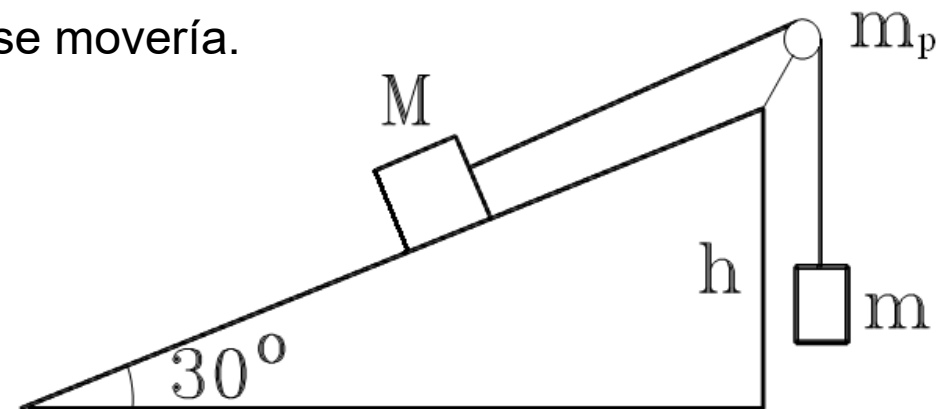


Problema



En el esquema de la figura, el bloque que cuelga tiene una masa de $m=0,8$ kg, mientras que el bloque de masa $M=2$ kg presenta un coeficiente de rozamiento con el plano de $\mu=0,1$. La polea tiene una masa $m_p=0,5$ kg y un radio de $r=0,2$ m. a) ¿Cuál es el sentido del movimiento y que aceleración adquiere el sistema? b) Determinése el error que se produciría en el cálculo de la aceleración el despreciar la masa de la polea. c) ¿Qué ocurriría si el coeficiente de rozamiento es 0,5?

SOL: Hacia la izquierda, $a=0,086$ m/s². b) 9%. c) No se movería.

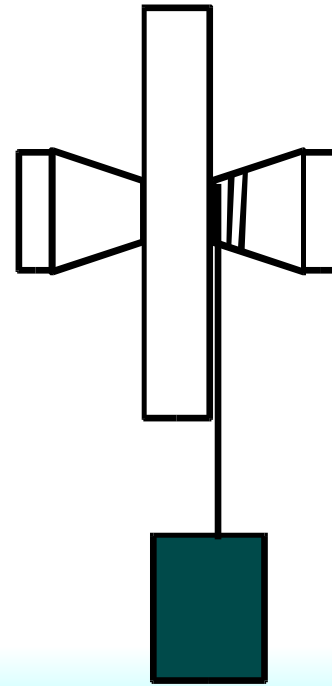
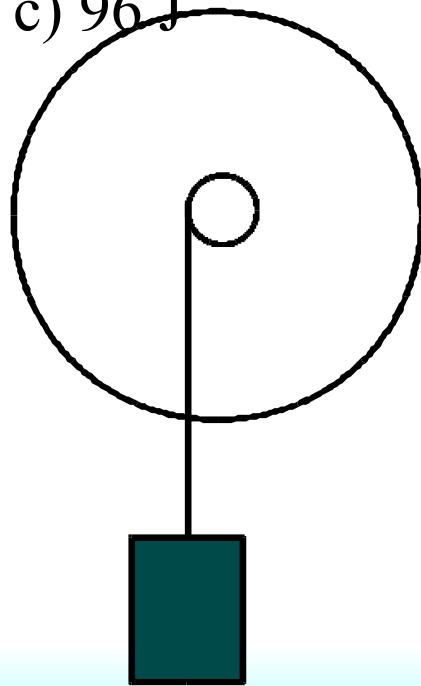


Problema



Un volante inercial lleva arrollado a su eje horizontal, un hilo ideal del que cuelga una masa $m=4\text{ kg}$ que desciende una altura $h=5\text{ m}$, con movimiento uniformemente acelerado, en un tiempo $t=2\text{ s}$, dando en ese tiempo un número de vueltas $N=50/\pi$. Sobre el eje actúa un par resistente debido al rozamiento, $M_o = 0,5\text{ Nm}$. Se pide calcular: a) la energía cinética de traslación adquirida por la masa m ; b) el trabajo de rozamiento en el eje; c) la energía cinética de rotación del volante.

SOL: a) 50 J. b) 50 J. c) 96 J

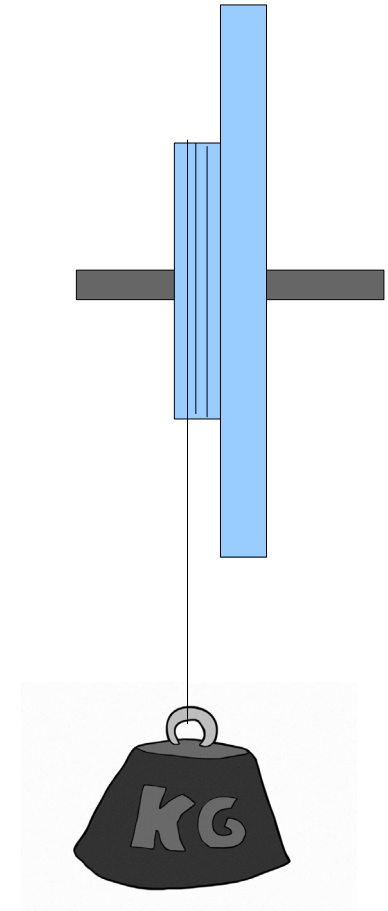


Problema



Dos poleas de radios $R_1=2,5$ cm y $R_2=5$ cm, y masas $m_1=0,8$ kg y $m_2=1,6$ kg se sueldan solidarias, de modo que ambas giran al mismo tiempo sobre su eje, tal y como indica la figura. a) Calcula el momento de inercia del conjunto. b) Una masa $m=1,5$ kg, sujeta de un hilo arrollado sobre la primera polea se suelta sin velocidad inicial a una altura $h=2$ m del suelo. Calcula la velocidad con la que llega al suelo. c) Si la masa se sujeta de un hilo arrollado sobre la segunda polea, a la misma altura que en el caso anterior, ¿llegará al suelo con la misma o con diferente velocidad? Justifica la respuesta.

SOL: a) $2,26 \cdot 10^{-3}$ kg m². b) 3,40 m/s. c) llegará con velocidad mayor: 4,95 m/s



Problema



Una polea de radio exterior 10 cm, masa 2 kg, y radio de giro 8 cm, lleva arrollado un hilo en su garganta. El extremo libre se sujeta a un punto fijo, manteniendo la polea siempre con su propio eje horizontal y sin sujetar, calcular: a) la aceleración con que descenderá el eje; b) la tensión del hilo.

SOL: $5,50 \text{ m/s}^2$; 8,60 N.