

MECÁNICA DEL PUNTO**1. Cinemática del punto****1.1. Movimiento de traslación**

Uniforme $v = \frac{e-e_0}{t}$; $e = e_0 + vt$

Uniformemente acelerado/decelerado $v = v_0 \pm at$; $e = e_0 + vt \pm \frac{1}{2}at^2$

Relativo de dos partículas $r_B = r_A + r_{B/A}$; $v_B = v_A + v_{B/A}$

1.2. Movimiento de rotación

Uniforme $\omega = \frac{\theta-\theta_0}{t}$; $\theta = \theta_0 + \omega t$

Uniformemente acelerado/decelerado $\omega = \omega_0 \pm \alpha t$; $\theta = \theta_0 + \omega t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$

1.3. Relaciones

$$v = \omega R \quad ; \quad \omega = \frac{v}{R} \quad ; \quad a_T = \alpha R \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad a^2 = a_T^2 + a_N^2$$

2. Dinámica del punto**2.1. Segunda ley de Newton**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad ; \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \text{cantidad de movimiento o momento lineal}$$

Ecuación vectorial que se descompone en 3 ecuaciones escalares que se pueden derivar o integrar independientemente (por ejemplo en el movimiento de un proyectil)

2.2. Momento angular o momento cinético o momento de la cantidad de movimiento

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad L = rmv \sin\theta \quad \text{Si la única fuerza que actúa sobre la partícula es central, entonces el momento angular es constante.}$$

2.3. Fuerza centrípeta

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

2.4. Trabajo de una fuerza

$$T_{1-2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} F dr \cos\varphi = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

$$\text{Trabajo del peso} \quad T_{1-2} = \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 = -W \Delta y$$

$$\text{Trabajo del par} \quad T = M\theta$$

Si la fuerza es conservativa el trabajo es independiente del camino seguido por la partícula $dT = -dV$

2.5. Potencia instantánea y potencia media

$$P = \frac{dT}{dt} \quad P_m = \frac{T}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Potencia del par} \quad P = M\omega$$

2.6. Energía cinética. Teorema de las fuerzas vivas

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad T_{1-2} = (E_c)_2 - (E_c)_1$$

2.7. Energía potencial

$$E_p = Wy = mgh$$

2.8. Relaciones

$$\text{Si la fuerza es conservativa} \quad (E_p)_1 - (E_p)_2 = (E_c)_2 - (E_c)_1 \rightarrow (E_p)_1 + (E_c)_1 = (E_p)_2 + (E_c)_2$$

Es decir, la energía total (mecánica) se mantiene constante.

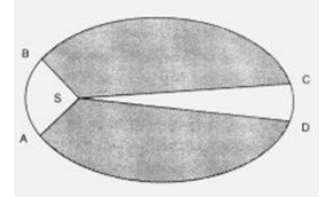
$$\text{Impulso lineal o impulso} \quad \int_0^t \vec{F} dt = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \quad (\text{percusión})$$

3. Teoría de la gravitación universal.

3.1. Leyes de Kepler.

3.1.1. **Ley de las órbitas:** Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra éste.

3.1.2. **Ley de las áreas:** Las áreas barridas por el radio vector que une el Sol con un planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.



3.1.3. **Ley de los periodos:** Los cuadrados de los periodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las respectivas órbitas.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

3ra Ley de Kepler				
T en años, a en unidades astronómicas; entonces $T^2 = a^3$				
Las discrepancias son debido a la exactitud limitada				
Planeta	Periodo T	Dist. a del Sol	T^2	a^3
Mercurio	0.241	0.387	0.05808	0.05796
Venus	0.616	0.723	0.37946	0.37793
Tierra	1	1	1	1
Marte	1.88	1.524	3.5344	3.5396
Júpiter	11.9	5.203	141.61	140.85
Saturno	29.5	9.539	870.25	867.98
Urano	84.0	19.191	7056	7068
Neptuno	165.0	30.071	27225	27192
Plutón	248.0	39.457	61504	61429

$$U.A. = 1,49597870 \times 10^{11} \text{ m}$$

3.2. Deducción de la ley de gravitación universal, realizada por Newton a partir de las leyes de Kepler

- 3.2.1. El Sol y los planetas son considerados como partículas, ya que sus distancias relativas son mucho mayores que sus diámetros.
- 3.2.2. El sistema de referencia está fijo en el Sol. La aceleración de cada planeta se mide respecto al Sol.
- 3.2.3. Cada planeta describe una órbita circular con una aceleración $a_c = \frac{v^2}{R}$. El error cometido con este enunciado es muy pequeño, ya que las órbitas elípticas reales tienen muy poca excentricidad (la razón entre semiejes en la Tierra es 0'99986).
- 3.2.4. La única fuerza significativa que actúa sobre un planeta es la gravitatoria del Sol.
- 3.2.5. Al considerarse las órbitas circulares y según la ley de las áreas, el movimiento es uniforme.
- 3.2.6. Por ser un movimiento uniforme el periodo de revolución vale $T = \frac{2\pi R}{v}$.
- 3.2.7. Utilizando la expresión de la aceleración centrípeta y la 3ª ley de Kepler se obtiene la expresión

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$$

que se puede generalizar para todos los cuerpos del Universo, y que nos dice que dos cuerpos cualesquiera se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros. La constante G de proporcionalidad tiene el valor de $6'67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

El peso de los cuerpos se suele expresar como $\vec{F} = m\vec{g}$ y comparando con la expresión anterior

$$|\vec{g}| = G \frac{M}{r^2}$$

3.3. Energía potencial gravitatoria

La fuerza gravitatoria es conservativa, por lo que tiene asociada una energía potencial.

3.3.1. Energía potencial asociada a dos partículas cualesquiera

Consideremos dos partículas separadas entre sí de manera que la interacción gravitatoria es nula, una situada en una posición fija y la otra en el infinito, es decir,

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$$

Supongamos ahora la partícula 1 en A y la 2 se desplaza desde el infinito hasta B que dista r_1 de la partícula 1. Si este desplazamiento de aproximación es originado por la interacción gravitatoria entre las dos partículas, el trabajo realizado por esta fuerza será

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\infty^B \frac{Gm_1 m_2}{r^2} dr = Gm_1 m_2 \left(-\frac{1}{r} \right)_\infty^B$$

$$W = -G \frac{m_1 m_2}{r_B}$$

A cada posición relativa de dos masas corresponde una energía potencial.

A la posición infinito le corresponde una energía potencial nula.

La energía potencial gravitatoria siempre es negativa. Sentido físico: a medida que la fuerza gravitatoria realiza el trabajo de aproximación de las dos masas, la energía potencial disminuye. Si inicialmente era cero al final del desplazamiento será negativa.

Cuando dos cuerpos se aproximan la energía potencial disminuye. Cuando se separan hay que aplicar una fuerza exterior al sistema que se emplea en aumentar la energía potencial.

3.3.2. Variación de la energía potencial entre dos puntos A y B

La variación de la energía potencial cuando una masa m_1 se desplaza de A hasta B es

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -G \frac{m_1 m_2}{r_B} - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r_A} \right) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

3.3.3. Energía potencial gravitatoria terrestre

Haciendo $m_1 = M$ masa de la Tierra y $m_2 = m$ masa del cuerpo

$$\Delta E_p = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{(R + h)}$$

Si la altura h es mucho menor que el radio R de la Tierra $\frac{h}{R} \cong 0$ y la expresión anterior resulta

$$\Delta E_p = mgh$$

Esta expresión es válida para g constante.

3.4. Campo gravitatorio terrestre

Caso particular de la gravitación universal referido a la Tierra.

Se define el campo gravitatorio como un vector que en cada punto del espacio es igual a la fuerza de atracción newtoniana ejercida por una masa sobre otra ($\vec{g}, A$).

El campo gravitatorio es conservativo: trabajo de la fuerza por camino cerrado, nulo.

El campo gravitatorio es estacionario, no cambia con el tiempo, sólo depende de las coordenadas del punto.

Se denomina intensidad de un campo gravitatorio en un punto a la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad de masa colocada en dicho punto.

$$[\vec{g}] = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{GM_T m}{mr^2} = \frac{GM_T}{r^2}$$

3.4.1. Variación de la intensidad del campo gravitatorio con la distancia

A nivel del mar

$$[\vec{g}_0] = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

A una altura h

$$[\vec{g}] = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = [\vec{g}_0] \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

3.5. Aplicación de la teoría de la gravitación universal al movimiento de satélites y planetas.

3.5.1. Periodo de revolución y velocidad orbital

Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra porque está sometido a una fuerza centrípeta originada por la atracción gravitatoria

$$F_g = F_c \rightarrow G \frac{mM_T}{R_0^2} = m \frac{v^2}{R_0}$$

La velocidad lineal con la que gira el satélite

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}}$$

El periodo de revolución viene dado por

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM}}$$

Estas expresiones son válidas para cualquier planeta que gira en torno al Sol.

3.5.2. Velocidad de escape de un cohete

Se llama velocidad de escape a la velocidad mínima de lanzamiento de un cohete para que éste pueda "escapar" de la atracción terrestre. A medida que el cohete se aleja de la Tierra aumenta su energía potencial a costa de su energía cinética de forma que la energía mecánica se conserva, ya que nos movemos en un campo conservativo (fuerzas conservativas).

Se debe cumplir $E_{m(0)} = E_{m(h)} \rightarrow E_{c(0)} + E_{p(0)} = E_{c(h)} + E_{p(h)}$

Caso 1 Velocidad de lanzamiento para que el cohete alcance una altura h:

$$\frac{1}{2}mv_l^2 + \left(-G \frac{M_T m}{R_T}\right) = 0 + \left(-G \frac{M_T m}{R_T + h}\right)$$

Caso 2 Velocidad de lanzamiento para que el cohete abandone el campo gravitatorio $h = \infty$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11'2 km/s$$

En este caso la Velocidad de lanzamiento coincide con la Velocidad de escape. Esta última expresión es válida para cualquier objeto lanzado desde cualquier planeta.

3.5.3. Lanzamiento de satélites artificiales. Energía y órbitas

La colocación de un satélite en órbita se realiza en dos fases:

1. Se lleva el satélite a una altura h mediante cohetes de lanzamiento.
2. Desde esa altura se lanza el satélite con una velocidad horizontal v_0 . El tipo de trayectoria que sigue el satélite depende del valor de v_0 .
 - a) Si v_0 es pequeña el satélite cae sobre la superficie de la Tierra describiendo una parábola.
 - b) Si $v_0 = v_c$ (velocidad límite para la que el satélite no cae), describe una circunferencia. En este caso la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria

$$m \frac{v_c^2}{R_T + h} = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} \rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

- c) Si $v_0 > v_c$ la órbita es una elipse cuya excentricidad aumenta con la Velocidad de lanzamiento. En el caso de $v_0 \gg v_c$ la elipse se abre de forma que su eje mayor se hace infinito y el satélite sale del campo gravitatorio siguiendo una parábola. En este caso, v_0 es la velocidad de escape correspondiente a la altura h ($v_0 = v_{eh}$). La energía mecánica del satélite será cero

$$\frac{1}{2}mv_{eh}^2 + \left(-G \frac{M_T m}{R_T + h}\right) = 0 \rightarrow v_{eh} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2}v_c$$

Es decir, la velocidad de escape desde una órbita circular es $\sqrt{2}$ veces la velocidad en esa órbita.

- d) Si $v_0 > v_{eh}$ el satélite describe una órbita hiperbólica y llega al infinito con una velocidad mayor que cero.

3.5.4. Energía mecánica de un satélite para órbitas cerradas

Se llama energía de enlace a la energía mecánica que debe tener un satélite para mantenerse en una órbita estacionaria a una altura sobre la superficie terrestre. Si describe una órbita circular, la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria

$$m \frac{v_c^2}{R_T + h} = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} \rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

Y la energía cinética del satélite en su movimiento orbital es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

La energía potencial gravitatoria asociada al sistema Tierra-satélite vale.

$$E_p = -G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

Por tanto la energía mecánica será

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}G \frac{M_T m}{R_T + h} + \left(-G \frac{M_T m}{R_T + h}\right) = -\frac{1}{2}G \frac{M_T m}{R_T + h} = -\frac{GM_T m}{2R_0}$$

En el caso de órbitas elípticas se sustituye el radio por el semieje mayor "a" de la elipse.

Datos:

Radio Tierra: 6.370 km Radio Luna: 1.738 km Radio Sol: 669.000 km

Masa Tierra: $5'98 \times 10^{24}$ kg Masa Luna: $7'35 \times 10^{22}$ kg Masa Sol: $1'99 \times 10^{30}$ kg

Distancia Tierra-Luna: $3'844 \times 10^8$ m Distancia Tierra-Sol: $1'496 \times 10^{11}$ m

$G = 6'67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$