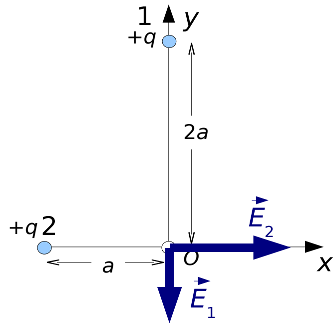
Examen parcial FFI, 11 de diciembre de 2006

1. Dadas dos cargas puntuales iguales $+q$, situadas en los puntos $(-a,0)$ y $(0,2a)$ y en reposo, calcula el campo eléctrico y el potencial electrostático en el punto O.



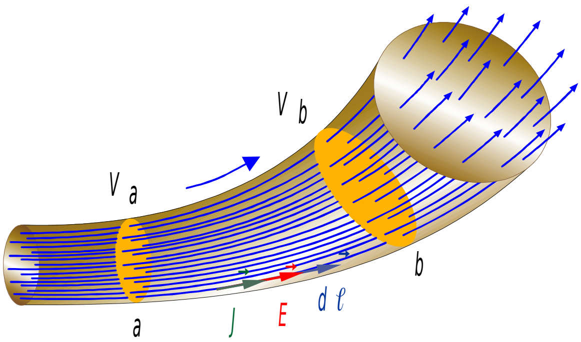
$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{4a^2}(-\vec{j}) \qquad \vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}(\vec{i})$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\left(\vec{i}-\frac{\vec{j}}{4}\right)$$

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2a} \qquad V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} \quad \Rightarrow \quad V=V_1+V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{2a}+\frac{q}{a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q}{2a}$$

2. A partir de la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico en un material óhmico (ley de ohm microscópica), deduce la relación entre la diferencia de potencial y la intensidad de corriente en dicho material (ley de ohm "macroscópica"). Define la resistencia eléctrica.

Páginas 5-9 y 5-10 del libro de teoría:



Camino paralelo al campo

Ley de Ohm microscópica: $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$$V_a-V_b=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=\int_a^b E\,d\ell$$

Para el caso de materiales óhmicos en los cuales $J = \sigma E$, se obtiene,

$$V_a - V_b = \int_a^b E\,d\ell = \int_a^b \frac{J}{\sigma}\,d\ell$$

Si consideramos ahora que la densidad de corriente es uniforme en la sección del conductor a lo largo del elemento de longitud $d\ell$, la densidad de corriente se puede expresar como I/A, siendo A el área transversal del conductor en el punto concreto. De esta forma,

$$V_a - V_b = \int_a^b \frac{I}{A\sigma}\,d\ell$$

y puesto que la intensidad de corriente es uniforme a lo largo de todo el conductor se obtiene finalmente que la diferencia de potencial entre dos puntos a y b para un material óhmico viene dada por,

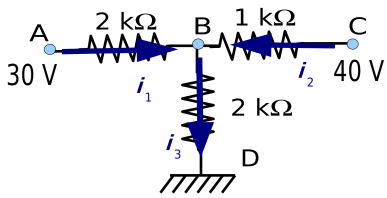
$$V_a - V_b = I\int_a^b \frac{d\ell}{A\sigma}$$

Definiendo la resistencia de un conductor como:

$$R = \int_a^b \frac{d\ell}{A\sigma}$$

Se ha obtenido la ley de Ohm "macroscópica".

3. Dado el circuito de la figura, calcula la intensidad que circula por la resistencia de 1 kΩ, indicando su sentido:



a) Aplicando las leyes de Kirchhoff.
b) Mediante el método de las mallas.
c) Aplicando el principio de superposición.
d) Utilizando el equivalente de Thevenin entre *B* y tierra.

En todos los casos hay que calcular únicamente la intensidad i_2.

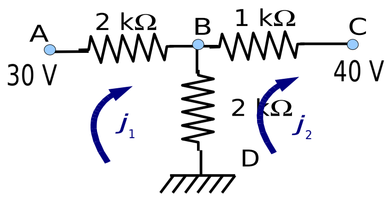
a)

$$i_1+i_2=i_3$$

$$30=2i_1+2i_3=4i_1+2i_2 \rightarrow 15=2i_1+i_2 \rightarrow i_1=(15-i_2)/2$$

$$40=i_2+2i_3=3i_2+2i_1 \qquad \rightarrow \qquad 40=3i_2+15-i_2=2i_2+15 \rightarrow i_2=\frac{(40-15)}{2}=\frac{25}{2}mA$$

b)



$$\begin{pmatrix}30\\-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix}$$

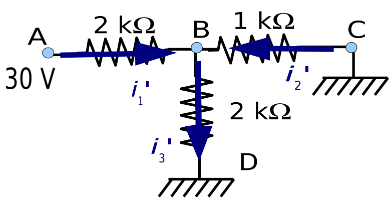
$$i_2=-j_2=-\frac{\begin{vmatrix}4 & 30\\-2 & -40\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{vmatrix}}=-\frac{-160+60}{12-4}=\frac{100}{8}=\frac{25}{2}mA$$

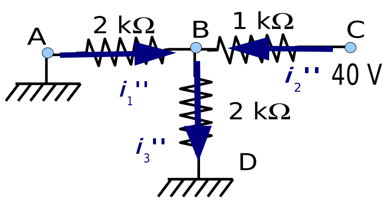
NOTA: en el enunciado del problema no se pide, pero podemos calcular fácilmente las intensidades i_1 e i_3:

$$i_1=j_1=-\frac{\begin{vmatrix}30 & -2\\-40 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{90-80}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}mA$$

$$i_3=j_1-j_2=\frac{5}{4}+\frac{25}{2}=\frac{5+50}{4}=\frac{55}{4}mA$$

c)
En este caso hay que resolver los dos circuitos siguientes para calcular i_2' e i_2'':





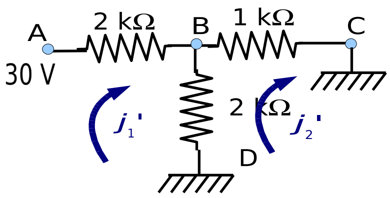
Una vez hecho esto, aplicando el principio de superposición, $i_2 = i_2' + i_2''$. Ambos circuitos pueden ser resueltos por cualquiera de los métodos aplicados en los apartados a) y b).
Mediante las leyes de Kirchhoff:

$$i_1'+i_2'=i_3' \qquad\qquad i_1''+i_2''=i_3''$$

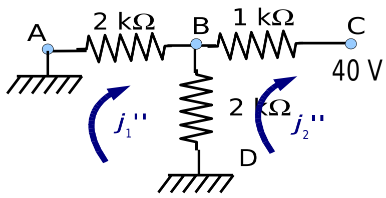
$$30=2i_1'+2i_3'$$
$$0=i_2'+2i_3'$$
$$\Rightarrow i_2'=-\frac{15}{2}\,mA$$

$$0=2i_1''+2i_3''$$
$$40=i_2''+2i_3''$$
$$\Rightarrow i_2''=20\,mA$$

Método matricial de las corrientes de malla:

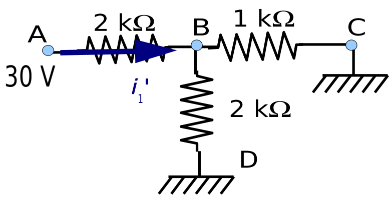


$$\begin{pmatrix}30\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1'\\j_2'\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow i_2'=-j_2'=-\frac{15}{2}\,mA$$



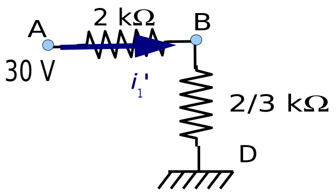
$$\begin{pmatrix}0\\-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1''\\j_2''\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow i_2''=-j_2''=20\,mA$$

O en este caso, se puede resolver también de la siguiente forma:



Las resistencias BD y BC están en paralelo, por lo que puedo sustituirlas por su resistencia equivalente,

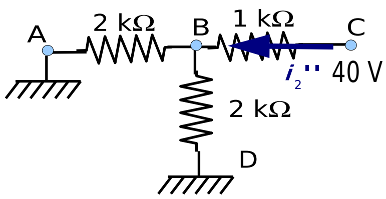
$$R_{eq}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}k\,\Omega$$



$$i_1'=\frac{30}{(2+2/3)}=\frac{30}{8/3}=\frac{90}{8}=\frac{45}{4}\,mA$$

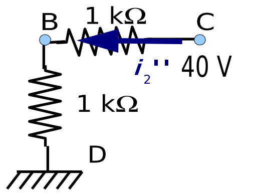
Con lo cual:

$$V_A-V_B=2i_1'=\frac{45}{2}$$
$$V_B=V_A-\frac{45}{2}=30-\frac{45}{2}=\frac{15}{2}V$$
$$i_2'=\frac{V_C-V_B}{1}=\frac{-15/2}{1}=-\frac{15}{2}\,mA$$



Las resistencias AB y BD están en paralelo, por lo que puedo sustituirlas por su resistencia equivalente,

$$R_{eq}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1}=1k\,\Omega$$



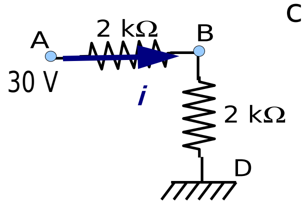
$$i_2''=\frac{40}{(1+1)}=20\,mA$$

Con lo cual, aplicando ahora el principio de superposición,

$$i_2=i_2'+i_2''=-\frac{15}{2}+20=\frac{-15+40}{2}=\frac{25}{2}\,mA$$

d)

En primer lugar, calculamos el equivalente de Thevenin entre B y tierra del circuito de la figura:

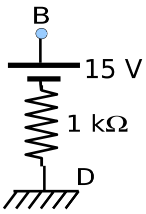


$$i = \frac{30}{2+2} = \frac{15}{2} mA$$

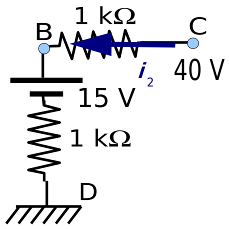
$$\varepsilon_T = V_B - V_D = 2i = 15V$$

$$R_T = R_{eq}^{BD} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = 1 k\,\Omega$$

De esta forma, el equivalente de Thevenin será:



Y añadiendo ahora la rama BC, la intensidad i_2 será:



$$i_2 = \frac{40-15}{1+1} = \frac{25}{2} mA$$