Tema 10

Corriente alterna sinusoidal

Objetivos

- Conocer las características de la corriente alterna, y su efecto sobre resistencias, condensadores y bobinas.
- Interpretar el desfase entre diferencia de potencial e intensidad de corriente en circuitos de corriente alterna.
- Calcular relaciones entre diferencias de potencial e intensidades de corriente en dipolos RLC en serie.
- Definir la impedancia de un circuito.
- Analizar un circuito RLC serie desde el punto de vista energético.
- Conocer el significado del factor de potencia.
- Estudiar la resonancia de un circuito RLC y sus aplicaciones a filtros.
- Conocer la notación compleja en corriente alterna.

10. Corriente alterna sinusoidal (c.a.s.)

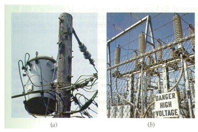
1. Introducción. Generación de una c.a.s.
2. Características de una c.a.s.
3. Respuesta de los dipolos básicos.
4. Impedancia de un dipolo RLC en serie.
5. Potencia de un dipolo RLC en serie.
6. Resonancia y filtros.
7. Notación compleja de la c.a.s.

Introducción

- Fácil generación.

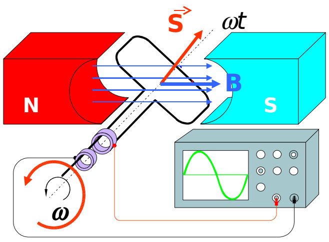
- Fácil transporte.

- Fácil transformación.

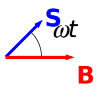


Generación de *cas*

- Bobina girando en el interior de un campo magnético B.

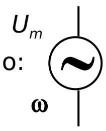


$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\omega t$$



$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = NSB\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

Símbolo:

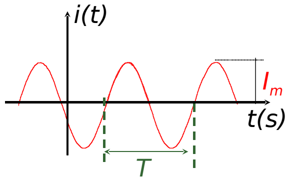


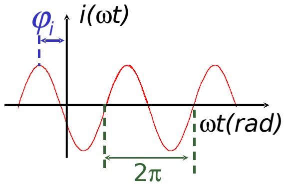
Características de una *cas*

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi_i)$$

i(t): Valor instantáneo de la intensidad (A) I_m: amplitud (A)

ω: pulsación (rad/s) φ_i: fase inicial (rad) $(\omega t + \varphi_i)$: fase (rad)





T: periodo (s) *f* : frecuencia (Hz) = 1/*T* $\omega = 2\pi f$

En caso de que la c.a.s. representara una tensión, tanto el valor instantáneo como la amplitud vendrían expresados en voltios.

Valor eficaz

- *valor eficaz* (o *valor cuadrático medio*)

$$I_{ef}=I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

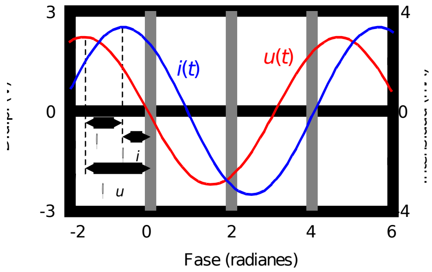
$$U_{ef}=U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- La intensidad eficaz de una corriente alterna sinusoidal es igual al valor de la intensidad de corriente continua que disipa la misma energía por efecto Joule durante un tiempo T.

Desfase de dos señales

- Se define el desfase entre dos señales como la diferencia entre sus fases iniciales. En particular, se define el desfase entre tensión e intensidad (φ) como:

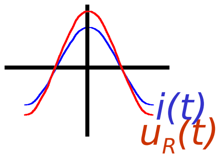
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$



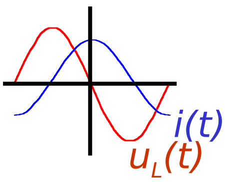
Desfase de dos señales

- Dependiendo del signo de $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, se dice que:

- $\varphi = 0$ $u(t)$ está en fase con $i(t)$

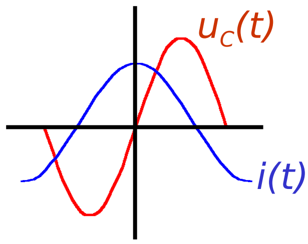


- $\varphi > 0$ $u(t)$ está adelantada respecto a $i(t)$

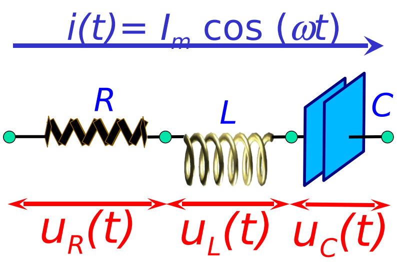


Desfase de dos señales

- $\varphi < 0$ $u(t)$ está retrasada respecto a $i(t)$



Circuito *RLC* serie



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

Circuito *RLC* serie

Resistencia, ley de Ohm: $u_R(t) = Ri(t)$

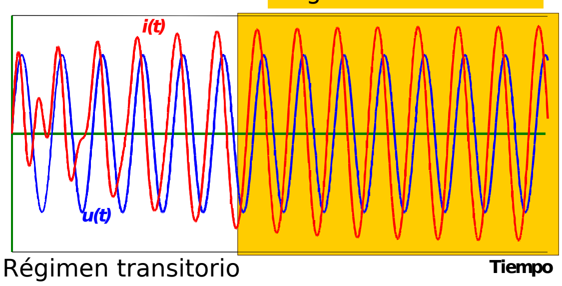
Bobina, ley de Faraday $u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$

Condensador, $u_C(t)=\frac{q(t)}{C}$ $\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{i(t)}{C}$

$$\frac{du(t)}{dt}=R\frac{di(t)}{dt}+L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+\frac{i(t)}{C}=-U_m\,\omega\sin(\omega t+\phi_u)$$

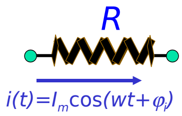
Circuito *RLC* serie

$$\frac{du(t)}{dt}=R\frac{di(t)}{dt}+L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{i(t)}{C}=-U_m\omega\sin(\omega t+\phi_u)$$



CAS en una resistencia

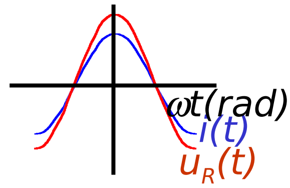
- Sea una resistencia recorrida por una $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$



$u_R(t) = R\ i(t) = R\ I_m \cos(\omega t+\varphi_i)$

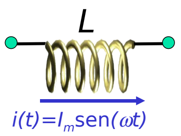
Pero $u_R(t) = U_{Rm} \cos(\omega t+\varphi_R)$

Luego
$$\begin{cases} U_{Rm}=I_m R \\ \phi_R=\phi_i \\ \phi=\phi_R-\phi_i=0 \end{cases}$$
(u está en fase con i)



CAS en una autoinducción

- Sea una autoinducción recorrida por una $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$



$u_L(t) = L\ di(t)/dt = -L\omega I_m \operatorname{sen}(\omega t+\varphi_i) =$
$= L\omega I_m \cos(\omega t+\varphi_i+\pi/2)$

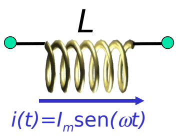
Pero $u_L(t) = U_{Lm} \cos(\omega t+\varphi_L)$

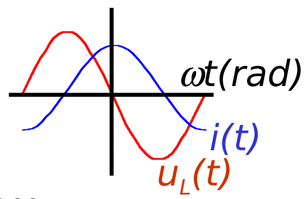
$$L\omega=X_L$$

Luego
$$\begin{cases} U_{Lm}=I_m L\omega=X_L I_m \\ \phi=\phi_L-\phi_i=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Reactancia inductiva ó Inductancia (Ω)

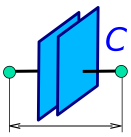
CAS en una autoinducción





(u adelantada 90º respecto de i)

CAS en un condensador



- Sea un condensador sometido a una tensión $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d(Cu(t))}{dt}=-CU_{Cm}\omega\operatorname{sen}(\omega t+\phi_C)=CU_{Cm}\omega\cos(\omega t+\phi_C+\frac{\pi}{2})$$

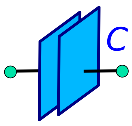
Pero como $i(t) = I_m \cos(\omega t+\varphi_i)$

$$\begin{cases} U_{Cm}=\dfrac{I_m}{C\omega}=X_C I_m \\ \phi=\phi_C-\phi_i=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

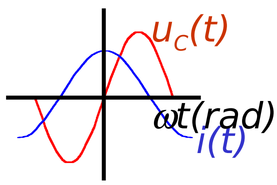
$$\frac{1}{Cw}=X_C$$

Reactancia capacitiva ó Capacitancia (Ω)

CAS en un condensador

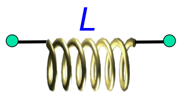


(u retrasada 90º respecto de i)

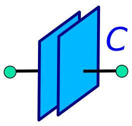


Circuitos en *CAS*: *R*, *L* y *C*

$$u_R = I_m R\cos(\omega t+\phi_R)\left\{\begin{array}{l} U_m^R = R\, I_m \\ \phi = 0 \end{array}\right.$$



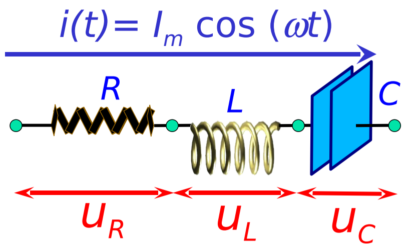
$$u_L = I_m L w\cos(\omega t+\phi_L)\left\{\begin{array}{l} U_m^L = X_L\, I_m \\ \phi = +\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$



$$u_C = \frac{I_m}{Cw}\cos(\omega t+\phi_C)\quad\left\{\begin{array}{l} U_m^C = X_C\, I_m \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Circuito *RLC* serie

- Sea la asociación de una resistencia, una autoinducción y un condensador en serie (dipolo *RLC* serie), todos recorridos por una corriente $i(t)=I_m\cos(\omega t)$



$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = U_m \cos(\omega t+\varphi)$$

Ahora debemos calcular U_m y φ

Circuito *RLC* serie

$\boxed{\varphi_i = 0}$

$$u_R(t) = RI_m \cos(\omega t) \qquad u_L(t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$u_C(t) = (1/C\omega) I_m \cos(\omega t - \pi/2)$$

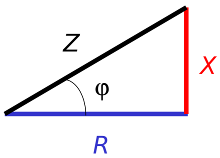
- Sumando las tres tensiones resulta:

$$Z = \sqrt{(R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \frac{U_m}{I_m}$$ Impedancia del dipolo (Ω)

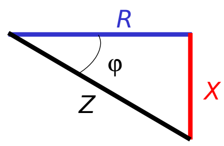
$$tg\,\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$ Desfase entre tensión total del dipolo e intensidad

Triángulo de impedancias

- A $X=X_L-X_C$ se le llama reactancia del dipolo.
- Todas las ecuaciones de un dipolo *RLC* serie se pueden resumir en el triángulo de impedancias:



Si $X<0$ ($\varphi<0$)



$X = X_L - X_C = L\omega - 1/C\omega$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{X}{R}$$

Potencia dipolo *RLC* serie

$$p(t) = \frac{dW_{AB}(t)}{dt} = \frac{u_{AB}(t)\,dq(t)}{dt} = i(t)\,u_{AB}(t)$$

$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\phi_i) \qquad u(t) = U_m\cos(\omega t+\phi_u)$$

$$p(t) = U\,I\left[\cos(2\omega t+\phi_u+\phi_i)+\cos(\phi_u-\phi_i)\right]$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Potencia dipolo *RLC* serie

- Valor medio de la potencia instantánea durante un período:

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = U\,I\cos\phi$$

UI = Potencia aparente (W).

cos φ = factor de potencia.

$$-\pi/2 \le \phi \le \pi/2 \Rightarrow P_{media} > 0$$

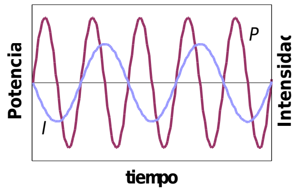
Potencia en una autoinducción

$\varphi_i = 0$

- La potencia instantánea consumida por una autoinducción es:

$$p_L(t) = u_L(t)i(t) = U_m \cos(\omega t + \pi/2)\, I_m \cos(\omega t)$$

$$p_L(t) = L\omega I^2 \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



- El valor medio a lo largo de un ciclo es: $\overline{p_L(t)} = 0$
- Una autoinducción no consume energía

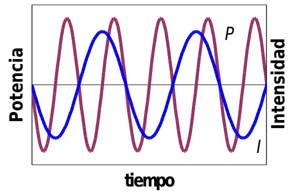
Potencia en un condensador

$\varphi_i = 0$

- La potencia instantánea consumida por un condensador es:

$$p_C(t) = u_C(t)i(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/2)\, I_m \cos(\omega t)$$

$$p_C(t) = \frac{I^2}{C\omega} \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

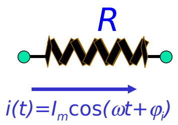


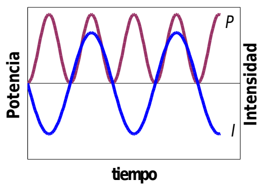
- El valor medio a lo largo de un ciclo es: $\overline{p_C(t)} = 0$
- Un condensador no consume energía

Potencia en una resistencia

$\varphi_i = 0$

- La potencia instantánea consumida por una resistencia es: $P_R(t) = i^2(t)R = 2R\, I^2 \cos^2(\omega t)$





$$\overline{p_R(t)} = R \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{Z\sqrt{2}} = IU \frac{R}{Z} = IU \cos\phi$$

- Una resistencia consume energía

Potencia en una resistencia

$\varphi_i = 0$

$$\overline{p_R(t)} = R \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{Z\sqrt{2}} = IU \frac{R}{Z} = IU \cos\phi$$

potencia activa:

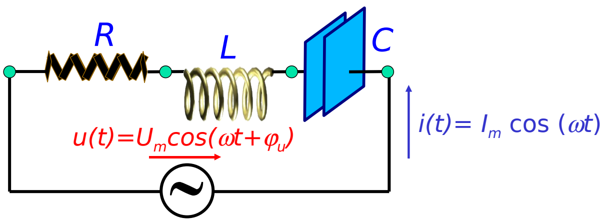
$P_a = IU \cos\varphi$

factor de potencia $\cos(\varphi)$

$$P_a = IU\cos\phi = IIZ\frac{R}{Z} = I^2 R$$

$$P_a = cte \Rightarrow I = cte \Rightarrow U = \frac{IR}{\cos\phi}$$

Resonancia en circuitos *RLC* serie



- En este circuito, dados R, L y C, la impedancia Z sólo depende de ω. Existe un valor de ω, que llamaremos ω_r (pulsación de resonancia) que minimiza la impedancia del circuito; en esta situación:

$$X = X_L - X_C = L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Resonancia en circuitos *RLC* serie

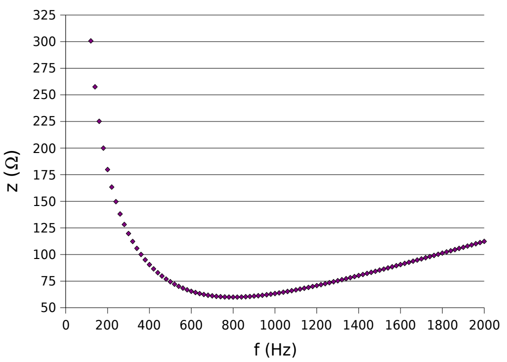
- En resonancia: $Z(\omega = \omega_r) = R$
- Y la frecuencia correspondiente a ω_r es la frecuencia de resonancia, f_r:

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

- En resonancia, si fijamos la tensión del generador del circuito, obtenemos la máxima corriente posible que circula por él, que vale:

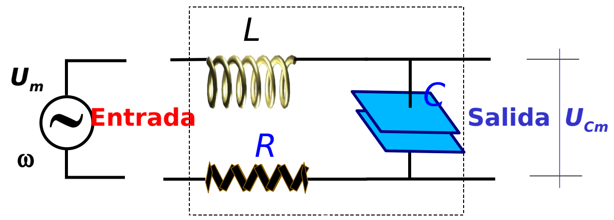
$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

Resonancia en circuitos *RLC* serie



- El mínimo de Z se da en resonancia, y ese valor mínimo es R.

Filtros. Filtro pasa baja

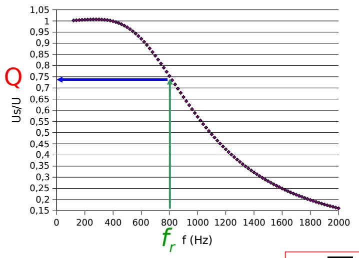


- Si consideramos un circuito RLC, con dos terminales que llamaremos entrada, y los terminales del condensador como salida, si aplicamos en la entrada una tensión sinusoidal, la tensión a la salida se podrá calcular como:

$$I_m=\frac{U_m}{Z}=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}\Rightarrow U_{Cm}=I_m\frac{1}{C\omega}=\frac{U_m}{C\omega\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

Filtros. Filtro pasa baja

- Si representamos gráficamente la relación de amplitudes entre la salida y la entrada:

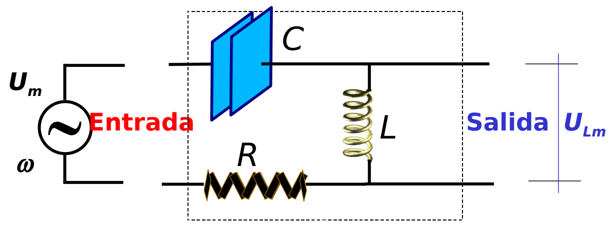


$$\frac{U_{Cm}}{U_m}=\frac{1/C\omega}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-1/C\omega\right)^2}}$$

$$\frac{U_{Cm}}{U_m}(\omega=\omega_r)=\frac{1}{C\omega_r R}=\boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=Q}$$ FACTOR DE CALIDAD

- El filtro pasa baja sólo deja "pasar" las frecuencias bajas.

Filtros. Filtros pasa alta

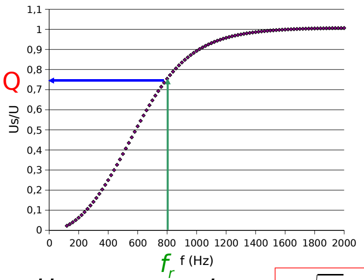


- Si consideramos un circuito RLC, con dos terminales que llamaremos entrada, y los terminales de la autoinducción como salida, si aplicamos en la entrada una tensión sinusoidal, la tensión a la salida se podrá calcular como:

$$I_m=\frac{U_m}{Z}=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}\Rightarrow U_{Lm}=I_m L\omega=\frac{U_m L\omega}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

Filtros. Filtros pasa alta

- Si representamos gráficamente la relación de amplitudes entre la salida y la entrada:

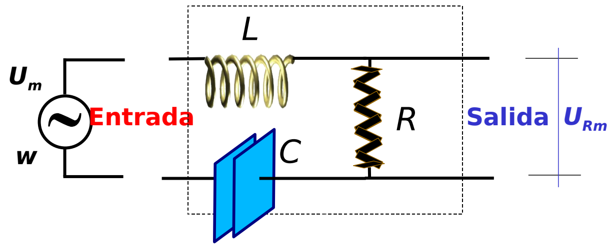


$$\frac{U_{Lm}}{U_m}=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-1/C\omega\right)^2}}$$

$$\frac{U_{Lm}}{U_m}(\omega=\omega_r)=\frac{L\omega_r}{R}=\boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=Q}$$ FACTOR DE CALIDAD

- El filtro pasa alta sólo deja "pasar" las frecuencias altas.

Filtros. Filtros pasa banda

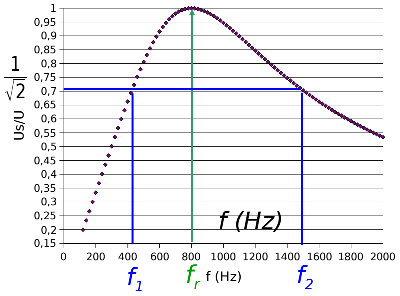


- Si consideramos un circuito RLC, con dos terminales que llamaremos entrada, y los terminales de la resistencia como salida, si aplicamos en la entrada una tensión sinusoidal, la tensión a la salida se podrá calcular como:

$$I_m=\frac{U_m}{Z}=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}\Rightarrow U_{Rm}=I_m R=\frac{U_m R}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

Filtros. Filtros pasa banda

- Si representamos gráficamente la relación de amplitudes entre la salida y la entrada:



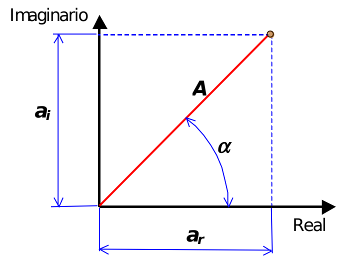
$$\frac{U_{Rm}}{U_m}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{Q=\frac{f_r}{f_2-f_1}}$$

FACTOR DE CALIDAD

- El filtro pasa banda sólo deja "pasar" las frecuencias entorno a la frecuencia de resonancia.

Notación compleja de la cas



$$\bar{A}=a_r+a_i\,j$$

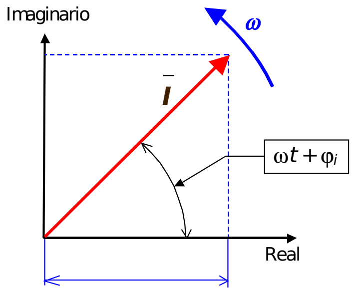
$$\tan\alpha=\frac{a_i}{a_r}$$

$$A=\sqrt{a_i^2+a_r^2}$$

$$\bar{A}=Ae^{j\alpha}=A|\underline{\alpha}$$

$$j=\sqrt{-1}$$

Notación compleja de la cas



$i(t) = I_m \cos(\omega t+\varphi_i)$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{I}=I_m\cos(\omega t+\phi_i)+j\,I_m sen(\omega t+\phi_i)$$

$$\bar{I}=I_m e^{j(\omega t+\phi_i)}=I_m|\underline{\omega t+\phi_i}$$

Notación compleja de la cas

$$\bar{U}=U_m e^{j(\omega t+\phi)}=U_m|\underline{\omega t+\phi}$$

$$\bar{I}=I_m e^{j(\omega t)}=I_m|\underline{\omega t}$$

Ley de Ohm simbólica:

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}}=Z|\underline{\phi}$$

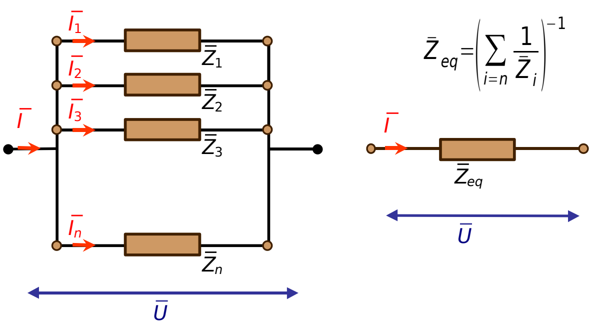
$$\bar{Z}=R+Xj$$

Impedancia compleja

Admitancia compleja: $\bar{Y}=\frac{1}{\bar{Z}}=\left(\frac{1}{Z}\right)|\underline{-\phi}$

Notación compleja de la cas

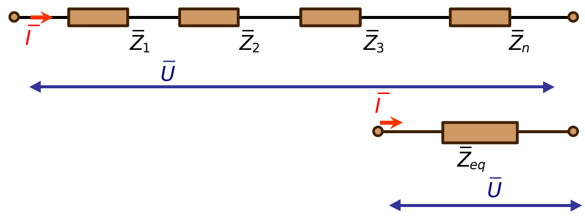
Asociación en paralelo de impedancias:



$$\bar{Z}_{eq}=\left(\sum_{i=n}\frac{1}{\bar{Z}_i}\right)^{-1}$$

Notación compleja de la cas

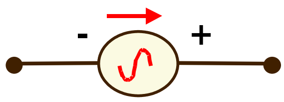
Asociación en serie de impedancias:



$$\bar{Z}_{eq}=\sum_{i=1}^{n}\bar{Z}_i$$

Notación compleja de la cas

Generadores:



$$\varepsilon(t)=\varepsilon_m\cos(\omega t+\phi_\varepsilon)$$

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_m e^{j(\omega t+\phi_\varepsilon)}=\varepsilon_m\left|\underline{\omega t+\phi_\varepsilon}\right.$$

Notación compleja de la cas

- La ecuación del circuito:

$$\bar{I}=\frac{\sum\bar{\varepsilon}_i}{\sum\bar{Z}_j}$$

- La diferencia de potencial:

$$\overline{U_{AB}}=\sum\bar{I}\,\bar{Z}_j-\sum\bar{\varepsilon}_i$$

Notación compleja de la cas

- Ley de nudos: $\sum_1^n \bar{I}_i=0$
- Ley de mallas: $\sum_1^n \overline{U_{i,i+1}}=0$
- Método de mallas: $[\bar{\varepsilon}_i]=[\overline{Z_{ij}}]\cdot[\bar{J}_j]$
- Impedancia equivalente: $\overline{Z_{eqAB}}=\frac{|\bar{Z}|}{|\overline{Z_{11}}|}$