Teoría de Colas.

¿Quién es el último?

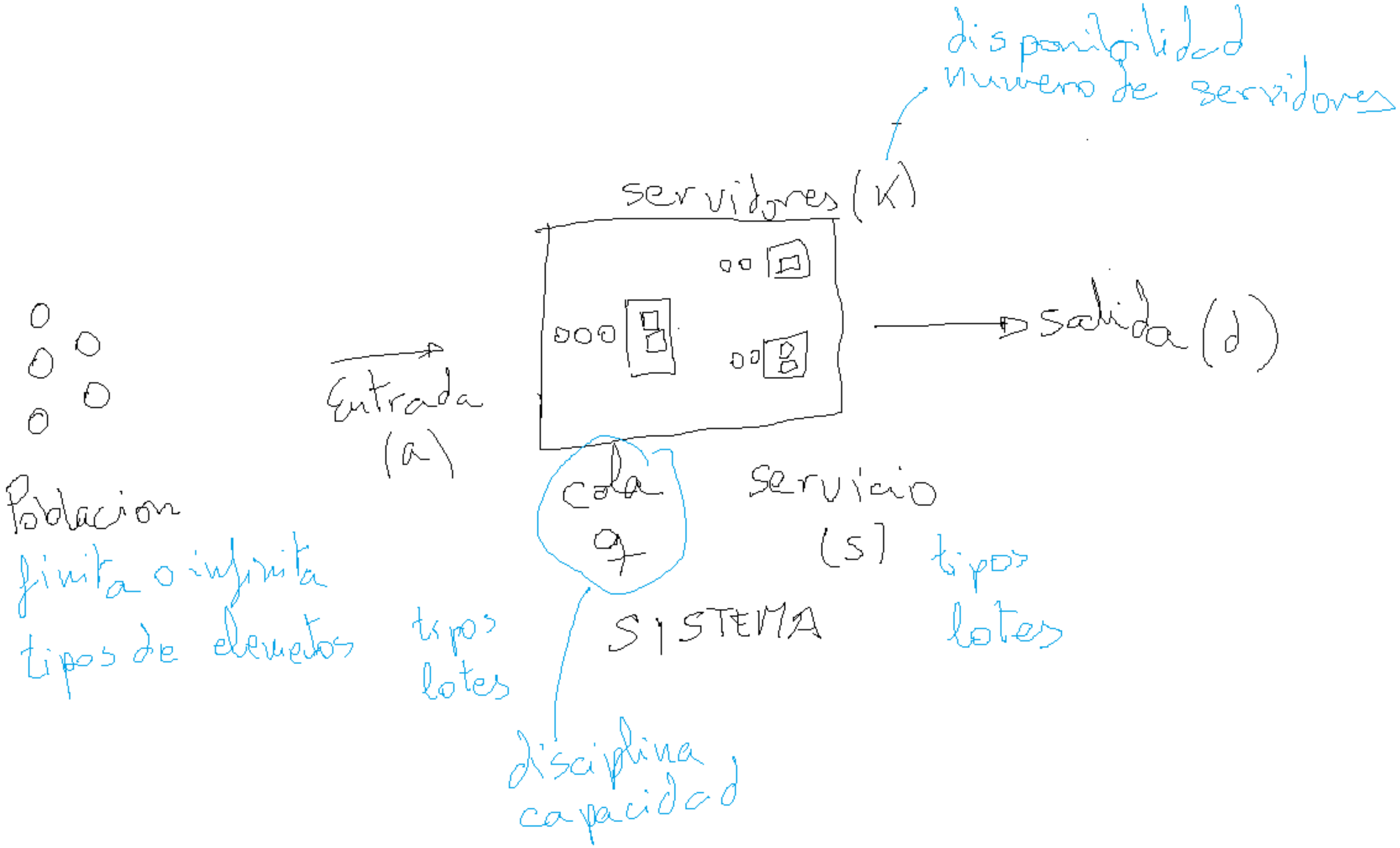
Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
  - Características
  - Notación
  - Medibles
  - Resultados Generales
  - Cómo se obtienen datos para un sistema de colas particular.
- El análisis de una cola
  - Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
- Redes y Series
  - Colas en Serie
  - Agregando y desagregando flujos
  - Redes de Jackson abiertas
  - Redes de Jackson cerradas
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
- Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
- Redes y Series
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos

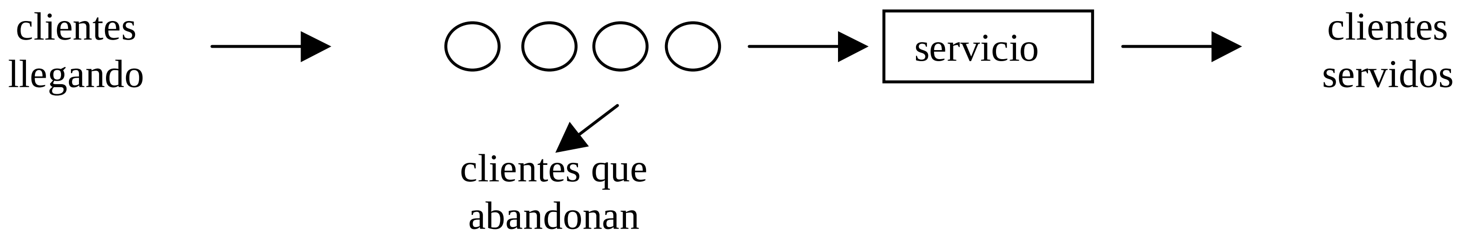
Qué es un Sistema de Colas



Algunas ideas importantes

- Por qué la teoría de colas puede competir con la simulación.
- Qué significan los valores que nos da la teoría de colas.
- Qué cosas podemos saber sí o sí, porque lo indican los resultados analíticos.
- Para qué puede servir saber calcular una cola en concreto si hay excels que ya lo hacen.

Descripción de un problema de colas



- Características de los sistemas de colas
- Notación
- Cómo medir el rendimiento del sistema
- Algunos resultados generales
- Como recoger los datos
- Los procesos de Poisson y la distribución exponencial
- Procesos de nacimiento y muerte en el proceso estable

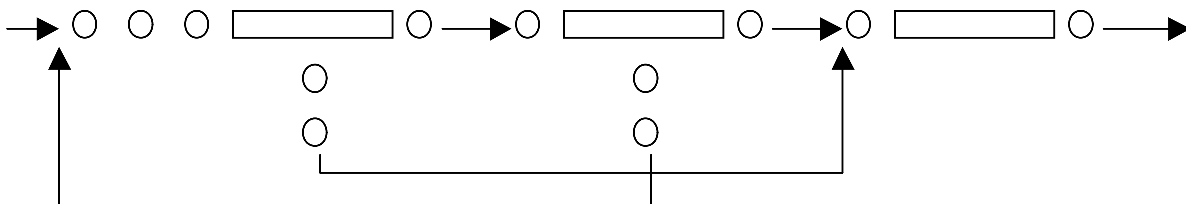
Características de los Sistemas de Colas (I)

- Patrón de llegada de los clientes
  - Llegada estocástica.
  - Llegada por lotes.
  - Clientes impacientes
  - Patrón de llegada variable
- Patrón de servicio de los servidores
  - Tiempo de servicio constante o variable
  - Servicio en lotes o individual
  - Patrón de servicio no estacionario
- Disciplina de Cola
  - FIFO, LIFO…
  - Con prioridades

Características de los Sistemas de Colas (II)

- Capacidad del Sistema
  - Limitación de capacidad de la cola
- Número de canales de servicio
  - Una cola o múltiples colas
  - Los mecanismos de servicio operan de manera independiente

- Número de etapas de servicio



Notación

A / B / X /Y / Z

- A: indica la distribución de tiempo entre llegadas consecutivas
- B: alude al patrón de servicio de servidores
- X: es el número de canales de servicio
- Y: es la restricción en la capacidad del sistema
- Z: es la disciplina de cola

Característica	Símbolo	Explicación
Distribución de tiempos de llegada (A) Distribución de tiempos de servicio (B)	M D Ek Hk PH G	Exponencial Determinista Erlang tipo-k (k=1,2,...) Mezcla de k exponenciales Tipo fase General
Número de servidores	1,2,...,∞	
Disciplina de cola	FIFO LIFO RSS PR GD	Servir al primero que llega El último que llega se sirve primero Selección aleatoria de servicio Prioridad Disciplina general

Cómo medir el rendimiento de un Sistema

- Tiempo de Espera de un cliente
  - Tiempo en la cola
  - Tiempo en el sistema
- Cómo se acumulan los clientes
  - Número de clientes en la cola
  - Número de clientes en el sistema
- Cuánto tiempo están los servidores vacíos
- Cual es el throughput del sistema

El diseño exige definir el nivel de servicio al cliente que compensa el coste de implantación y ejecución

Nomenclatura (I)

- λ= Número de llegadas por unidad de tiempo
- μ= Número de servicios por unidad de tiempo si el servidor está ocupado
- c= Número de servidores en paralelo
- $\rho = \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu}$ Congestión de un sistema con parámetros (λ,μ, c)
- N(t): Número de clientes en el sistema en el instante t
- Nq(t): Número de clientes en la cola en en el instante t
- Ns(t): Número de clientes en servicio en el instante t
- Pn(t): Probabilidad que haya n clientes en el sistema en el instante t=Pr{N(t)=n}
- N: Número de clientes en el sistema en el estado estable
- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en estado estable

Nomenclatura (II)

- L : Número <u>medio</u> de clientes en el sistema
- Lq : Número <u>medio</u> de clientes en la cola
- Tq : Representa el tiempo que un cliente invierte en la cola
- S : Representa el tiempo de servicio
- T = Tq+S: Representa el tiempo total que un cliente invierte en el sistema
- Wq= E[Tq]:Tiempo medio de espera de los clientes en la cola
- W=E[T]:Tiempo medio de estancia de los clientes en el sistema
- P_b: probabilidad de que cualquier servidor esté ocupado

Relaciones Generales

- Teorema de Little
  - $L = \lambda W$
  - $L_q = \lambda W_q$
- Otros resultados

$$L = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n$$

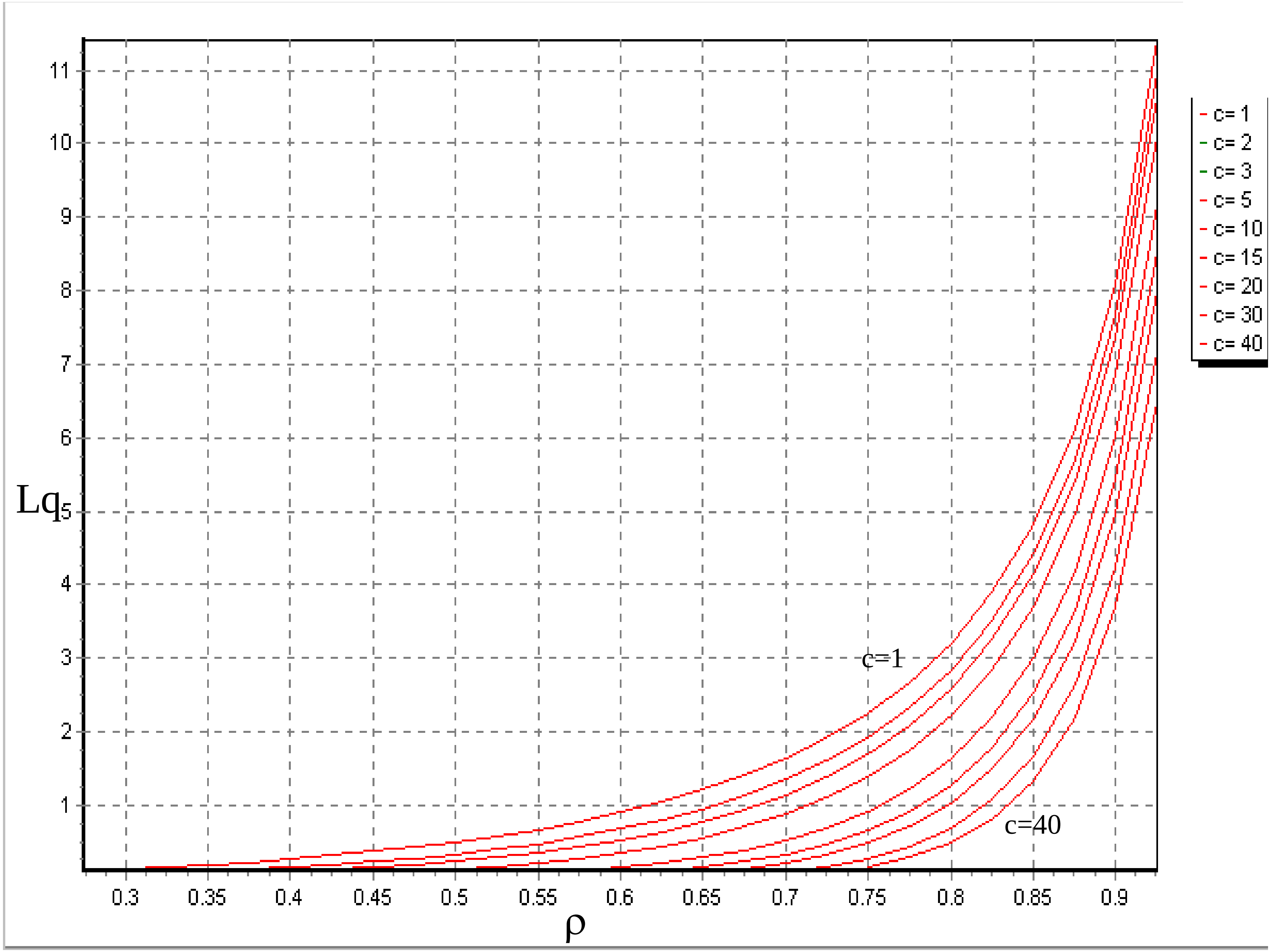
$$L_q = E[n_q] = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) \cdot P_n$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$r = L - L_q = \lambda \cdot (W - W_q) = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_b = \rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$$

$$L - L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0$$



Lq
ρ
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
c=1
c=40
c= 1
c= 2
c= 3
c= 5
c= 10
c= 15
c= 20
c= 30
c= 40

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
  - Características
  - Notación
  - Medibles
  - Resultados Generales
  - Cómo se obtienen datos para un sistema de colas particular.
- El análisis de una cola
  - Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
- Redes y Series
  - Colas en Serie
  - Agregando y desagregando flujos
  - Redes de Jackson abiertas
  - Redes de Jackson cerradas
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos
  - Estadística elemental
  - Uso del QTS-plus
  - Distribuciones Estadísticas
  - Uso de Excel para la resolución de Problemas de Programación Lineal.

Cómo recoger datos en un sistema de colas

- "La información se recoge cuando algo ocurre"
- Los datos a recoger
  - a) Cada cuánto llega un cliente.
  - b) Cuánto se tarda en servir a cada cliente

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tiempo entre llegadas entre i+1 e i	2	1	3	1	1	4	2	5	1	2	2	-
Tiempo de servicio al cliente	1	3	6	2	1	1	4	2	5	1	1	3

Reloj (t)	Entrada/ salida del cliente i	Tiempo en que el cliente i entra en servicio	Tiempo en que el cliente i sale del servicio	Tiem-po en la cola	Tiempo en el sistema	Tamaño de colas después de t	Clientes en el sistema después de t
0	1-E	0	1	0	1	0	1
1	1-S					0	0
2	2-E	2	5	0	3	0	1
3	3-E	5	11	2	8	1	2

Procesos de nacimiento y muerte en el estado estacionario

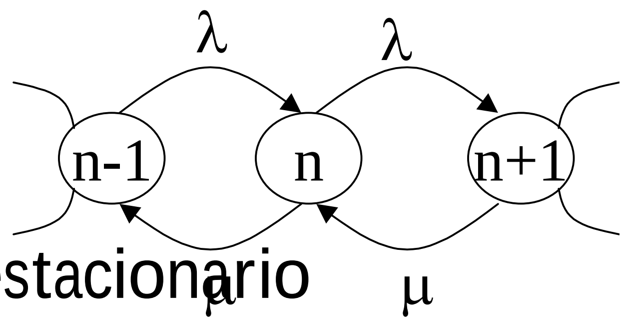
ROGLE
Reengineering Operations
GroupWork Logistics Excellence

- Un proceso estocástico es la abstracción matemática de un proceso empírico, cuyo desarrollo está gobernado por alguna ley de probabilidad.
- Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, un proceso estocástico se define como una familia de variables aleatorias {X(t),tT} definidas sobre un horizonte T. X(t) es el estado del sistema.
- Se dice que un proceso estocástico {X(t),t=0,1,...} es un proceso de Markov si, para cualquier conjunto de n instantes t1<t2<...<tn, la distribución de X(t) depende únicamente del valor de X(tn-1). Es decir:
  - "Dada la situación presente, el futuro es independiente del pasado y el proceso carece de memoria"
- Una cola, con proceso de llegada Poisson-Exponencial de media λ, y con proceso de servicio Poisson-Exponencial de media μ, se puede modelar como una cadena de Markov continua, donde en cada intervalo infinitesimal de tiempo puede ocurrir un nacimiento (llegada) o una muerte (salida)

Procesos de nacimiento y muerte en el estado estable

$$P_r\{n \to n+1 \;\; en \;\; (t, t+\Delta t)\} = \lambda_n \Delta t + o(t) \qquad\qquad n \geq 0$$

$$P_r\{n \to n-1 \;\; en \;\; (t, t+\Delta t)\} = \mu_n \Delta t + o(t) \qquad\qquad n \geq 1$$



- En el estado estacionario

$$\lambda_n P_n + \mu_n P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} \qquad \forall \mathrm{n} > 0$$

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
  - Características
  - Notación
  - Medibles
  - Resultados Generales
  - Cómo se obtienen datos para un sistema de colas particular.
- El análisis de una cola
  - Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
- Redes y Series
  - Colas en Serie
  - Agregando y desagregando flujos
  - Redes de Jackson abiertas
  - Redes de Jackson cerradas
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos
  - Estadística elemental
  - Uso del QTS-plus
  - Distribuciones Estadísticas
  - Uso de Excel para la resolución de Problemas de Programación Lineal.

Sistema M / M / 1

- La probabilidad de que haya n elementos en el estado estable es:

$$\text{Pn} = \left(1\text{-}\rho\right)\rho^{n}$$

- De donde los valores de tiempo de estancia media y cola media son:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \qquad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Peluquería M@ripuri

- La peluquería m@ripuri está dirigida y gestionada únicamente por su propietaria. Atiende según el principio de que el primero que entra es el primero que sale. La peluquería, dado su carácter cibernético está muy ocupada los sábados por la mañana y la propietaria se plantea la posibilidad de contratar a una ayudante. Así pues, hace un estudio y se da cuenta de que los clientes llegan con una distribución de poisson de media 5 clientes por hora. Debido a su excelente reputación los clientes están dispuestos a esperar lo que haga falta. La propietaria, señora Purificación, sigue con sus estudios y estima que el tiempo medio en el que atiende un cliente es de 10 minutos según una distribución exponencial. Decide primero calcular el numero medio de clientes en el salón y el número de medio de clientes esperando un corte de pelo . Sólo tiene 4 sillas además del sillón de peluquera, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente y no encuentre sitio?, ¿cual es la probabilidad de que alguien espere más de 45 minutos?

Sistema M / M / c

- La probabilidad de que haya n elementos en el estado estable es:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 & 1 \le n < c \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\mu^n} P_0 & n \ge c \end{cases} \qquad P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)} \right)^{-1} \qquad \frac{r}{c} = \rho < 1$$

- De donde los valores de tiempo de estancia media y cola media son:

$$L_q = \frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0 \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{r^c}{c!(c_\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left(\frac{r^c}{c!(c_\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0 \qquad L = r + \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right)$$

Sistema M / M / c / K

- La probabilidad de que haya n elementos en el estado estable es:

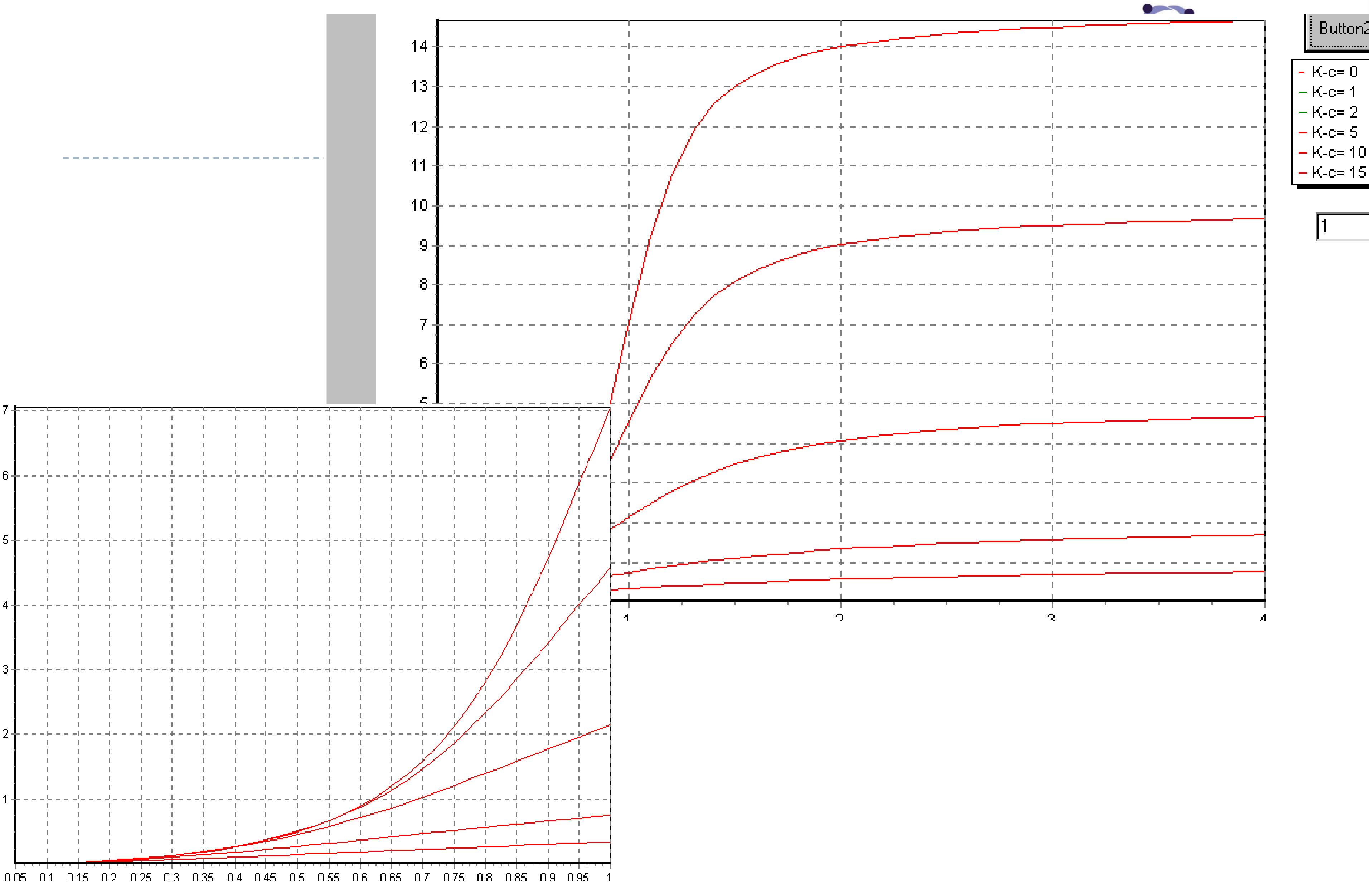
$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 & 1 \le n < c \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\mu^n} P_0 & c \le n \le K \end{cases} \qquad P_0 = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} \frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} \right)^{-1} & \rho \ne 1 \\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} (K-c+1) \right)^{-1} & \rho = 1 \end{cases}$$

- De donde los valores de tiempo de estancia media y cola media son:

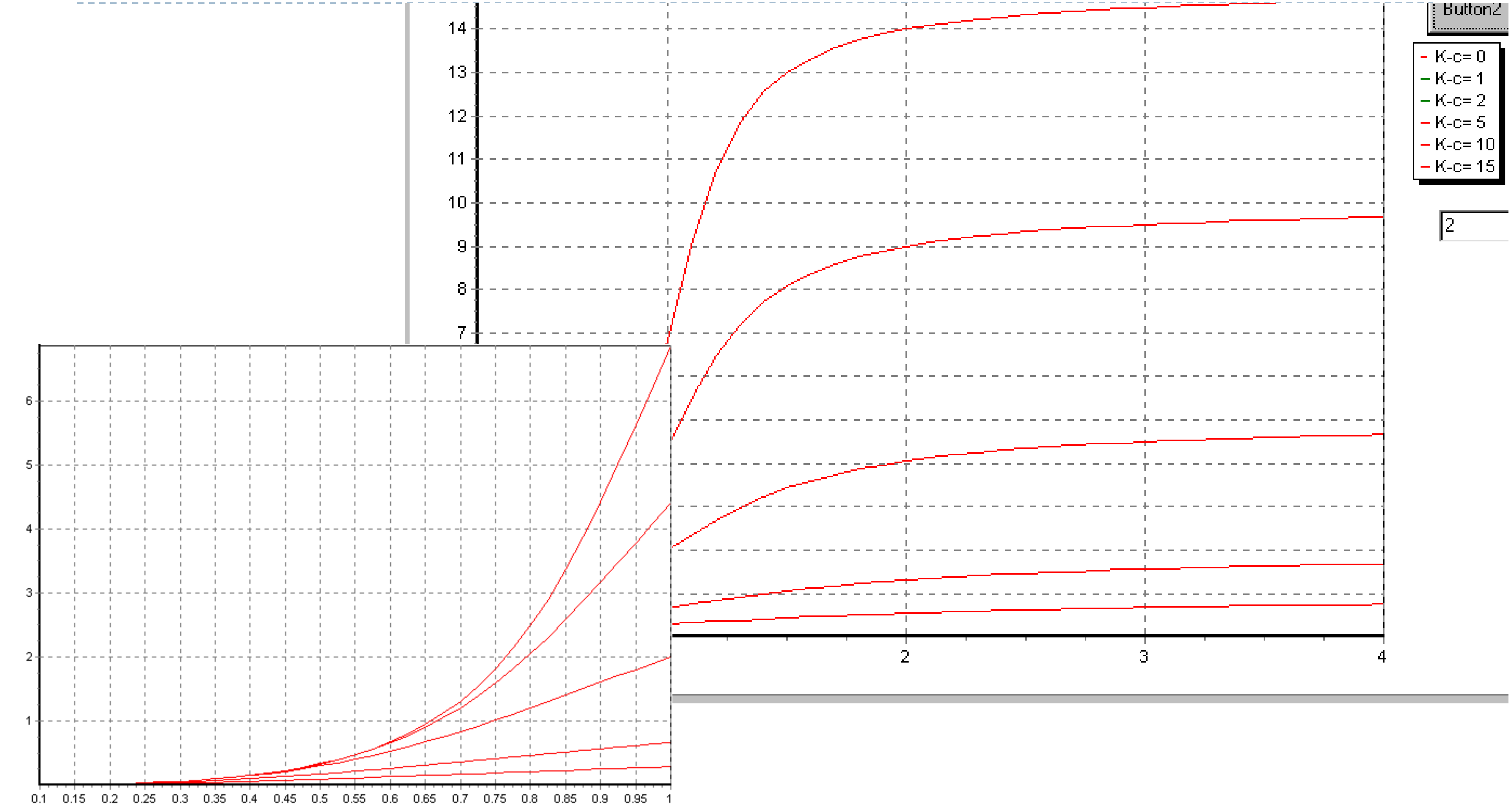
$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_K)$$

$$L_q = \frac{P_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c} \right]$$

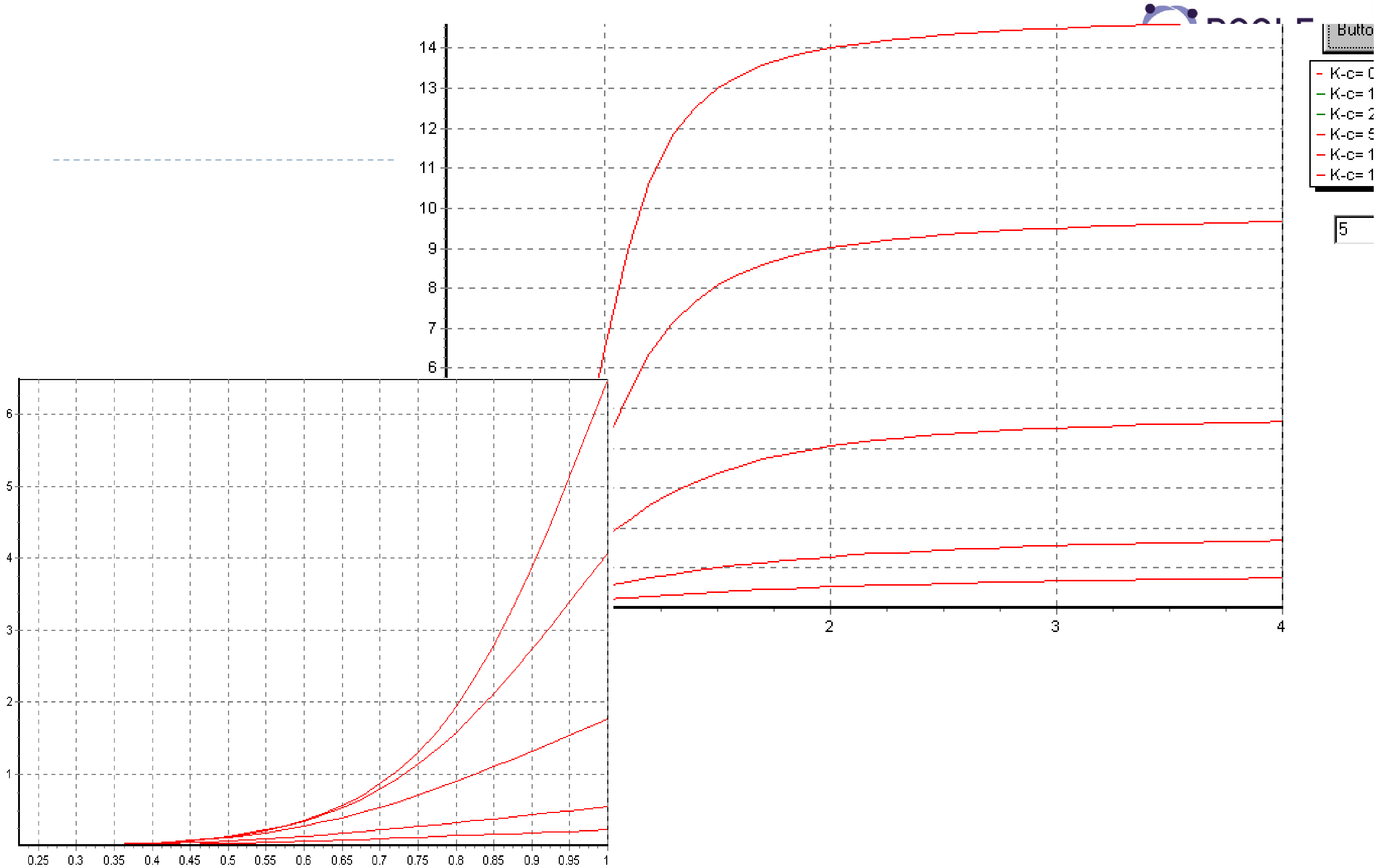
$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} \qquad L = L_q + r(1-P_K) \qquad W_q = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} - \frac{1}{\mu}$$


Button2
K-c= 0
K-c= 1
K-c= 2
K-c= 5
K-c= 10
K-c= 15
1
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
1
2
3
4
7
6
5
4
3
2
1
0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

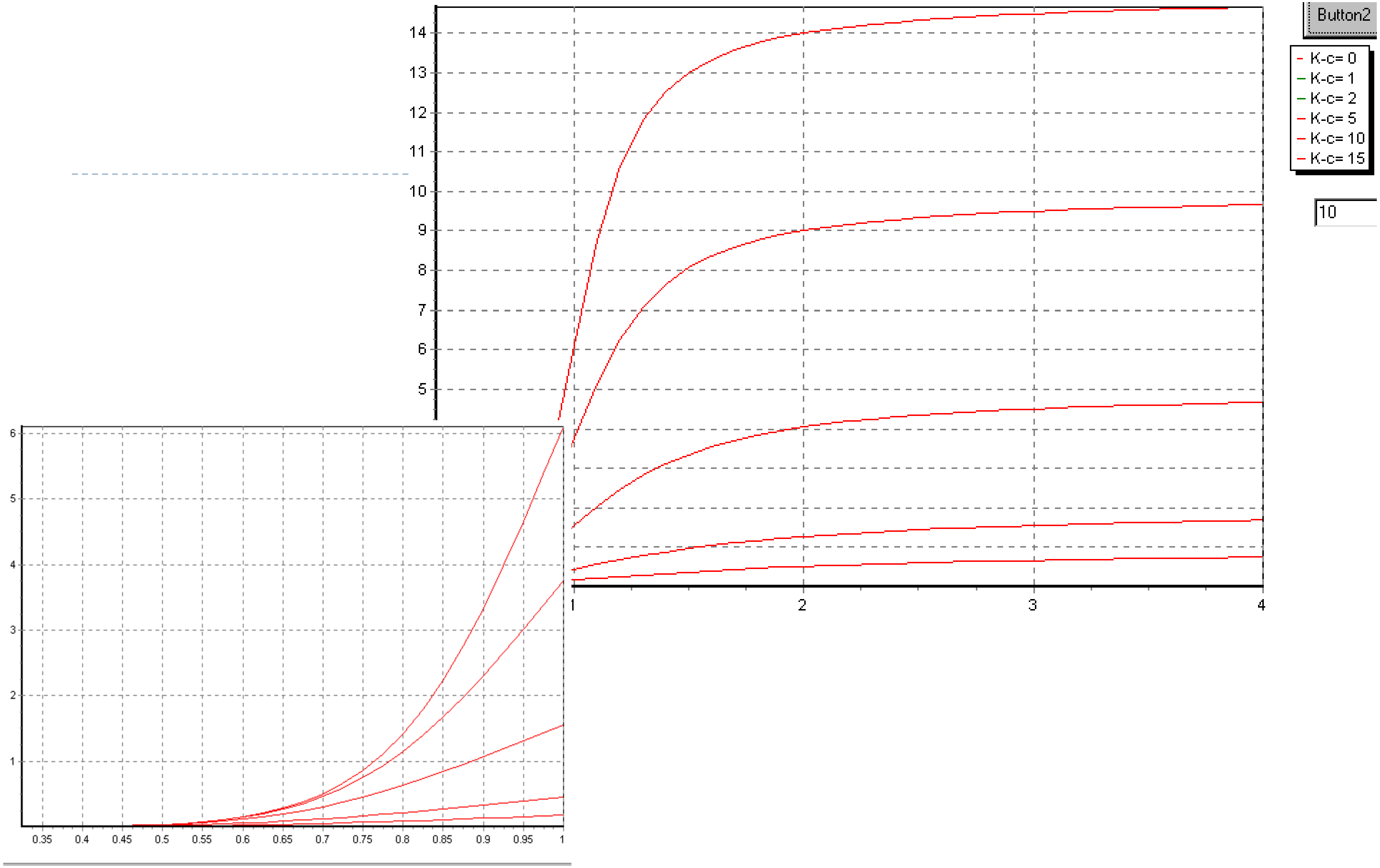
M/M/1/K


Button2
K-c= 0
K-c= 1
K-c= 2
K-c= 5
K-c= 10
K-c= 15
2
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1
2
3
4

M/M/2/K



M/M/5/K



M/M/10/K

ITV

- Una estación de ITV cuenta con tres puestos para inspección y en cada uno sólo puede ser atendido un coche. Cuando un coche sale de un puesto la vacante es ocupada por otro que está en cola. La llegada de coches sigue una distribución de Poisson con una media de un coche por minuto en sus horas punta. En el párking sólo caben 4 vehículos. El tiempo de inspección sigue una distribución exponencial de media 6 minutos. El inspector jefe desea saber el número medio de coches en la estación, el tiempo medio (incluida la inspección) de espera, y el número medio de coches en cola debido a que los puestos están ocupados.

Sistema M/G/c/c (La Fórmula de Erlang)

- La probabilidad de que haya n clientes en el sistema es:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^i}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}$$

- La probabilidad de que el sistema esté lleno es:

$$P_c = \frac{r^c/c!}{\sum_{i=0}^{c} \frac{r^i}{i!}}, r = \lambda/\mu \qquad \lambda_{eff} = \lambda(1 - P_K)$$

Cola sin limite de servidores M / M / ∞

- Asumiremos que el tiempo el tiempo de servicio tiene igual distribución con el número de servidores ($\mu_n = n\mu$).

$$P_n = \frac{r^n e^{-r}}{n!} \qquad n \geq 0 \qquad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \qquad W = \frac{1}{\mu}$$

Colas con límite en la fuente

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & 0 \le n < M \\ 0 & n \ge M \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \le n < c \\ c\mu & n \ge c \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \binom{M}{n} r^n P_0 & 1 \le n < c \\ \binom{M}{n} \dfrac{n!}{c^{n-c} c!} r^n P_0 & c \le n < M \end{cases} \qquad \sum P_n = 1 \Rightarrow 1 = P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n} r^n + \sum_{n=c}^{M} \frac{n!}{c^{n-c} c!} r^n \right)$$

$$L = \sum_{n=1}^{M} n P_n \qquad \lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{M-1} (M-n)\lambda P_n = \lambda(M-L)$$

$$L_q = L - \frac{\lambda eff}{\mu} = L - r(M-L) \qquad W = \frac{L}{\lambda(M-L)} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

Problema

- Una fabrica de semiconductores usa cinco robots para la fabricación de sus placas de circuitos. Los robots se estropean periódicamente, y la compañía tiene dos reparadores para las reparaciones. Cuando un robot es arreglado, el tiempo hasta que el siguiente se rompe se cree que es una exponencial distribuida con una media de 30 horas. La empresa tiene suficiente trabajo en cola para asegurarse que todos los robots en condiciones de trabajar estarán funcionando. El tiempo de reparación se distribuye según una exponencial de media 3 horas. Al encargado le gustaría saber: el número medio de robots operativos en cualquier momento, el tiempo que un robot tarda en ser reparado, el porcentaje de tiempo en que algún operario está parado.

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
- El análisis de una cola
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
- Redes y Series
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos

M / G / 1

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$W_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$W_q\left(M \,/\, G \,/\, 1\right) = \left(\frac{1 + \mu^2\sigma^z}{2}\right) W_q\left(M \,/\, M \,/\, 1\right)$$

G / G / 1

- Cuando la entrada tampoco sigue una distribución exponencial se puede utilizar la aproximación de difusión Kingman para calcular el valor del tiempo de espera en cola en función de los coeficientes de variación al cuadrado de la entrada y de la salida. De hecho esta es una aproximación que además es siempre una cota superior.

$$Wq\left(G \diagup G \diagup 1\right) \approx \left(\frac{\lambda^2\sigma_e^2 + \mu^2\sigma_s^2}{2}\right) Wq\left(M \diagup M \diagup 1\right)$$

G / G / c

- Si el caso G/G/1 ya es una generalización no exacta, menos exacta aún es la generalización G/G/c. En cualquier caso dado que el error es pequeño es interesante la siguiente fórmula que permite calcular el tiempo de estancia medio en cola para un sistema cualquiera.

$$Wq(G/G/c) \approx \left(\frac{\lambda^2 \sigma_e^2 + \mu^2 \sigma_s^2}{2} \right) \frac{\rho^{\sqrt{2c+2}-1}}{c(1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

Variabilidad en el tiempo de servicio.

- Variabilidad natural
- Variabilidad debida a fallos de máquina
- Variabilidad debida la interacción hombre máquina
- Variabilidad debida a la existencia de tiempos de preparación.

Rotura y Reparación

- Un sistema de un único servidor que sufra averías que deban ser reparadas, ve afectado su tiempo de servicio y su disponibilidad.

$$E\left[T_e\right] = \frac{E[T_a]}{a}$$

$$a = \frac{E[F_i]}{E[F_i] + E[R_i]}$$

$$C_e^2 = C^2\left[T_e\right] = C_s^2 + \frac{\left(1 + C^2\left[R_i\right] a\left(1 - a\right) E[R_i]\right)}{E\left[T_S\right]}$$

$$\rho_e = \frac{\rho}{a}$$

$$W_q = \frac{C_a^2 + C_e^2}{2}\left(\frac{\rho_e}{1 - \rho_e}\right) E\left[T_e\right]$$

Interacción Hombre-Máquina

- No hay resultados generales. Deben ser derivados en cada caso.
- La propuesta de Curry y Feldman para un sistema con dos máquinas idénticas y un operador es que cada estado lo representa una tripleta *(n,i,j)* donde n es el número de trabajos en el sistema, i y j son el estado de cada una de las máquinas, pudiendo ser 0;s;p.
  - 0 indica que la máquina está vacía y parada, s indica que la máquina está sometida a un setup y p indica que la máquina está en producción.

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
- El análisis de una cola
  - Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
- Redes y Series
  - Colas en Serie
  - Agregando y desagregando flujos
  - Redes de Jackson abiertas
  - Redes de Jackson cerradas
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos

El servicio depende del número de clientes.

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 1 \le n < k \\ \mu & n \ge k \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \rho_1^n P_0 & 0 \le \mathrm{n} < \mathrm{k} \\ \rho_1^{k-1} \rho^{n-k+1} P_0 & \mathrm{n} \ge \mathrm{k} \end{cases} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$$

$$L = P_0 \left(\frac{\rho_1 \left[1 + (k-1)\rho_1^k - k\rho_1^{k-1}\right]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho \rho_1^{k-1} \left[k - (k-1)\rho\right]}{(1-\rho\ )^2} \right)$$

$$L_q = L - (1 - P_0) \qquad W = \frac{L}{\lambda} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

El coche feliz

- Pepe y Juan han patentado un invento para pulir automóviles y han montado su propia empresa de pulir coches, para ello han alquilado un viejo local. El local solo se abre los sábados Los clientes son atendidos según norma FIFO. Se supone que su local está situado en una zona donde pueden aparcar y esperar los clientes sin problemas. La máquina de pulir puede funcionar a dos velocidades, a mímina velocidad tarda una media de 40 minutos y la máxima tarda una media de 20 minutos, se pueden asumir los tiempos distribuidos de forma exponencial. Los clientes llegan según una distribución de Poisson de media 30 minutos. Juan tiene un curso de teoría de colas y ha decidido estudiar el efecto de dos políticas: 1) poner la máquina a máxima velocidad si hay alguien esperando y 2) poner a máxima velocidad solo si hay más de uno esperando (3 o más en el sistema). La velocidad se puede cambiar en cualquier momento, incluso si la máquina está trabajando. Se quiere saber el tiempo medio de espera bajo estas dos política

Clientes impacientes

- Los que no se unen a la cola

$$\lambda_n = b_n \lambda \qquad\qquad 0 \le b_{n+1} \le b_n \le 1$$

$$P_n = P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \prod_{i=1}^{n} b_{i-1}$$

  - La serie debe ser monótona decreciente

- Los que abandonan

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \lambda^n \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)}$$

$$P_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)}$$

  - r(i) es la probabilidad de que un cliente abandone si tiene i clientes delante de él.

Teoría de Colas

- Introducción
- Descripción de un problema de colas
- El análisis de una cola
  - Procesos de Nacimiento y Muerte
- Modelos de colas simples
  - M/M/1, M/M/c, M/M/c/K, M/M/inf
  - Más variantes (G/G/1, G/G/c)
  - Variantes (Clientes impacientes, Población Limitada, Tiempos variables de Servicio…)
- Redes y Series
  - Colas en Serie
  - Agregando y desagregando flujos
  - Redes de Jackson abiertas
  - Redes de Jackson cerradas
- Simulación
- Más Problemas
- Anexos

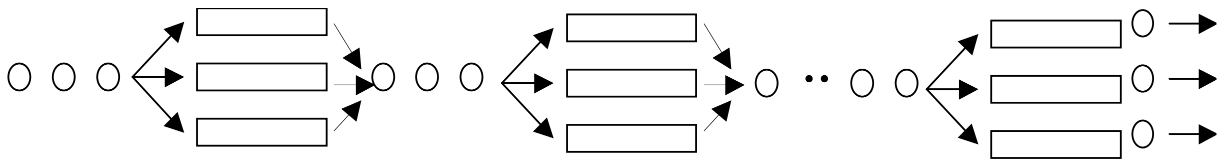
Redes de Colas

- Las redes de colas se pueden representar con nodos en el que cada nodo representa una instalación de servicio.
- Redes de Jackson: son un tipo especial de Redes de Colas.

1. Las llegadas desde el exterior al nodo i siguen un proceso de Poisson de media γ_i
2. Los tiempos de servicio en cada nodo y son independientes y siguen una distribución negativa exponencial con parámetro μ_i, que podría ser dependiente del estado
3. La probabilidad de que un cliente que haya completado su servicio en el nodo i vaya al nodo j es r_{ij} con i=1,2,....,k, j=0,1,...,k.
4. $r_{i,0}$ indica la probabilidad de que un cliente abandone desde el nodo i

- Tipos de Redes de Jackson:
  - En Serie
  - Generales
  - Cerradas

Redes enSerie



$$r_i = \begin{cases} \lambda & i=1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & j=i+1 \quad 1 \le i \le k-1 \\ 1 & i=k \quad j=0 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

$$P_{n1,n2...nk} = P_{n1} \cdot P_{n2} \cdot .... \cdot P_{nk}$$

- El comportamiento de cada cola, si no hay límites de capacidad es independiente...

Mercanona

Jon Ros, presidente de Mercanona, está experimentando una nuevo tipo de tiendas y para ello ha remodelado una de ellos como sigue. En vez de las típicas colas en el cajero ha puesto una sala donde esperar tu turno para pagar. Conforme van llegando los clientes, una vez hecha la compra, pasan a la sala, si todos los cajeros están ocupados entonces cogen número y esperan sentados. Tan pronto como una caja esté libre el siguiente número será llamado para que pase por ella. En la sala no hay límite de clientes que puedan estar esperando. El ingeniero estima que durante las horas punta los clientes llegan de acuerdo a una distribución de Poisson de media 40 por hora, tardan por término medio ¾ de hora para llenar sus carros (distribución exponencial). El tiempo que tarda un cajero en pasar toda la compra tiene de media 4 minutos (exponencial), independientemente de la cantidad de compra (cada caja tiene un cajero y un embolsador). Ros quiere saber lo siguiente:

a) ¿Cuál es el número mínimo de cajas durante las horas punta?

b) Si se pone una caja más que el mínimo requerido, ¿cuál es el tiempo medio de espera en la cola? ¿Cuánta gente habrá en cajas? ¿cuánta gente habrá en todo el supermercado?

Microsoft Excel - m-m-inf

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	M/M/infinity -- POISSON INPUT, EXPONENTIAL SERVICE, UNLIMITED SERVERS:							
2	This routine includes both transient and steady-state analyses.							
3	--							
4	**INPUT VARIABLES:**							
5								
6	lambda	40,		Arrival rate (#arrivals/unit of time)				
7					[MAKE SURE THAT UNITS MATCH]			
8	st	0,75		Mean time to complete service				
9	t	10,		Test time for transient analysis				
10							Graph	
11	SPREADSHEET DEFAULT:							
12		*[If K has been changed, the graphs need to be refreshed by hitting the above button.]*						
13	K	10		Max value of variable whose steady-state probability				
14				is to be plotted (full printout contains 50)				
15	**OUTPUT VARIABLES:**							
16								
17	iat	0,025		Mean interarrival time				
18	mu	1,333333		Service rate (# served/unit of time)				
19	r	30,0		Traffic intensity = mean # servers busy				
20	L	30,0		Mean s/s system size = limiting mean # servers busy				
21	W	0,75		Mean wait in the system = average service time				
22	L(t)	29,999951		Transient mean size at time t				

Microsoft Excel - m-m-c

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

	A	B	C–J
1	**M/M/c -- MULTIPLE SERVERS / UNLIMITED MARKOVIAN QUEUE:**		
2	--		
3	**INPUT VARIABLES:**		
4			
5	lambda	40,	Arrival rate (arrivals/unit of time)
6			[MAKE SURE THAT UNITS MATCH]
7	st	0,066667	Mean time to complete service
8			
9	c	3	Number of servers in the system (c > 1)
10			
11	T	1	Total time horizon for prob plotting
12			Graph
13	SPREADSHEET DEFAULT		
14			
15	K	10	Maximum value (K>c) of variable whose probability
16			is to be plotted (full printout contains 50)
17			***[If K is changed, refresh the probability plot by hitting the above button.]***
18	**OUTPUT VARIABLES:**		
19			
20	iat	0,025	Mean interarrival time
21	mu	15,0	Service rate (# served/unit of time)
22	r	2,666667	Average # arrivals during mean service time
23	rho	0,888889	Fraction of time each server is busy [MUST BE < 1]
24	p0	0,028037	Fraction of time all servers are idle
25			
26	Lq	6,380062	Expected queue size
27	L	9,046729	Expected system size
28	Wq	0,159502	Expected waiting time in the queue
29	W	0,226168	Expected waiting time in the system

m-m-c

Inicio | Microsoft Word - ... | Microsoft Power... | Microsoft Exc... | 19:00

Microsoft Excel - m-m-c

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

	A	B	C	D
1	**M/M/c -- MULTIPLE SERVERS / UNLIMITED MARKOVIAN QUEUE:**			
2	--			
3	**INPUT VARIABLES:**			
4				
5	lambda	40,		Arrival rate (arrivals/unit of time)
6				[MAKE SURE THAT UNITS MATCH]
7	st	0,066667		Mean time to complete service
8				
9	c	4		Number of servers in the system (c > 1)
10				
11	T	1		Total time horizon for prob plotting
12				Graph
13	SPREADSHEET DEFAULT			
14				
15	K	10		Maximum value (K>c) of variable whose probability
16				is to be plotted (full printout contains 50)
17			***[If K is changed, refresh the probability plot by hitting the above button.]***	
18	**OUTPUT VARIABLES:**			
19				
20	iat	0,025		Mean interarrival time
21	mu	15,0		Service rate (# served/unit of time)
22	r	2,666667		Average # arrivals during mean service time
23	rho	0,666667		Fraction of time each server is busy [MUST BE < 1]
24	p0	0,059867		Fraction of time all servers are idle
25				
26	Lq	0,756837		Expected queue size
27	L	3,423503		Expected system size
28	Wq	0,018921		Expected waiting time in the queue
29	W	0,085588		Expected waiting time in the system

m-m-c

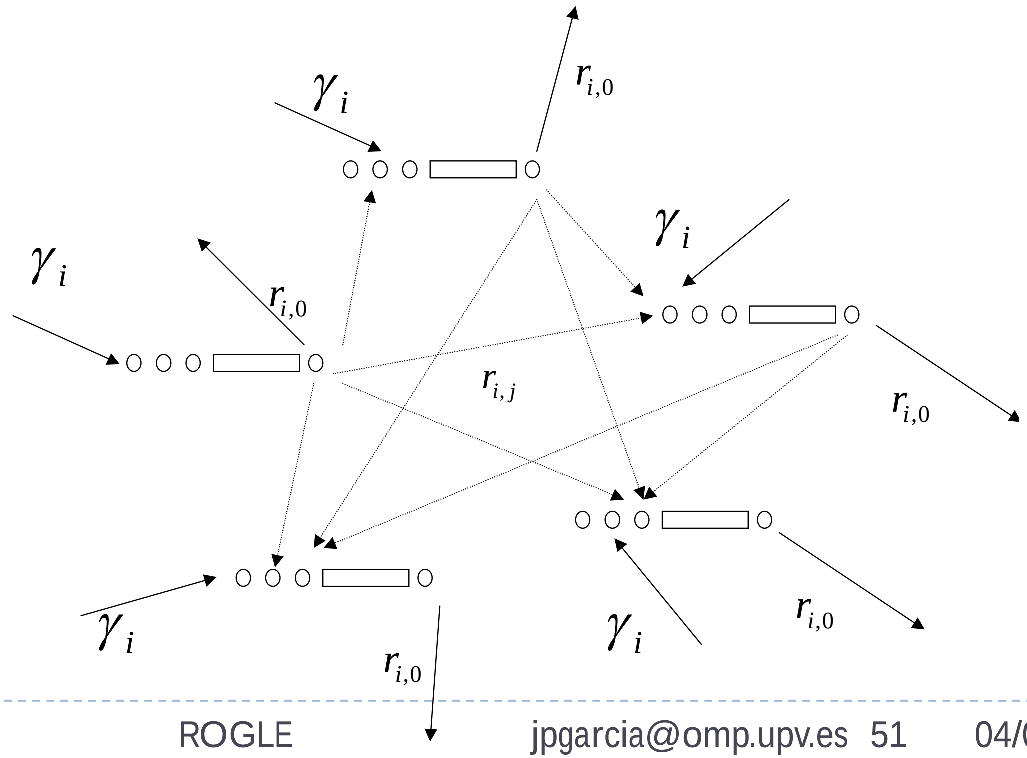
Inicio | Microsoft Word - ... | Microsoft Power... | Microsoft Exc... | 19:00

Redes de Jackson Generales (I)

a) La llegada externa a cualquier nodo es Poisson γ_i

b) Todos los servidores de cada etapa tiene un servicio exponencial de media μ_i

c) De cada etapa i un cliente se mueve a otra etapa con probabilidad r_{ij}, y al exterior con probabilidad $r_{i,0}$



Redes de Jackson Generales (II)

- El ratio de llegada λ_i a cada etapa se obtiene mediante las denominadas “ecuaciones de tráfico”

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_{ji} \qquad \vec{\lambda} = \vec{\gamma} + \vec{\lambda} R \qquad \vec{\lambda} = \vec{\gamma} + (I - R)^{-1}$$

- La probabilidad de que en el estado estacionario haya n_i clientes en el nodo 1, n_2 en el nodo 2, etcétera

$$P_{n1n2n3...nk} = \prod \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)} P_{oi}$$

$$a(n_i) = \begin{cases} n_i! & n_i < c_i \\ c_i^{n_i - c_i} c_i & n_i \geq c_i \end{cases} \qquad P_{o,i} \ / \ \sum P_{oi} \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)} = 1$$

- Si c_i=1

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}\dots(1-\rho_k)\rho_k^{n_k}$$

Redes de Jackson Generales (III)

- Pueden existir diferentes tipos de clientes con diferentes matrices de transición $R^{(t)}$

$$\vec{\lambda}^{(t)} = \vec{\gamma}^{(t)} + (I - R^{(t)})^{-1} \qquad \lambda = \sum_{t=1}^{n} \lambda^{(t)}$$

$$L_i^{(t)} = \frac{\lambda_i^{(t)}}{\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)} + \ldots + \lambda_i^{(n)}} L_i$$

Problema

La compañía de seguros "La otra vida" tiene una centralita telefónica. Las llamadas llegan según una distribución de media 35 cada hora. Los clientes llaman para dos cosas: para reclamaciones o para solicitar información, para ello deben apretar el botón 1 o el 2. Se cree que el tiempo que tarda un cliente en tomar la decisión y apretar el botón tiene una media de tiempo de 30 segundos según una distribución exponencial. Las llamadas realizadas solo pueden ser procesadas por este contestador de una en una, si alguien llama mientras tanto se le pone una bonita música, se le dice que espere y se le pone en cola. Aproximadamente el 55% de las llamadas son para reclamaciones, el resto para demanda de servicios. El nodo de reclamaciones tiene 3 servidores en paralelo y se estima que el tiempo medio en que atiende un cliente es de 6 minutos (exponencial). El nodo de solicitud de información tiene 7 servidores en paralelo con un tiempo de servicio medio de 20 minutos (exponencial). Se asume que puede haber todos los clientes que se quieran esperando en los nodos. Alrededor del 2% de llamadas que van al nodo de reclamaciones acaban en el de demanda de información, y el 1% que llama al nodo de demanda de información se va al nodo de reclamaciones. Se desea saber por término medio el tamaño de las colas en cada nodo y el tiempo medio que un cliente pasa en el sistema.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix} \qquad (I - R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5546 & 0.4611 \\ 0 & 1.0002 & 0.02 \\ 0 & 0.01 & 1.0002 \end{bmatrix}$$

Microsoft Excel - m-m-c

Archivo Edición Ver Insertar

	A	B
1	M/M/c -- MULTIPLE SERV	
2	------------------------------------	
3	**INPUT VARIABLES:**	
4		
5	lambda	35,
6		
7	st	0,008333
8		
9	c	1
10		
11	T	1
12		
13	SPREADSHEET DEFAULT	
14		
15	K	10
16		
17		
18	**OUTPUT VARIABLES:**	
19		
20	iat	0,028571
21	mu	120,0
22	r	0,291667
23	rho	0,291667
24	p0	0,708333
25		
26	Lq	0,120098
27	L	0,411765
28	Wq	0,003431
29	W	0,011765

m-m-c

Microsoft Excel - m-m-c

Archivo Edición Ver Insertar

	A	B
1	M/M/c -- MULTIPLE SERV	
2	------------------------------------	
3	**INPUT VARIABLES:**	
4		
5	lambda	19,411
6		
7	st	0,1
8		
9	c	3
10		
11	T	1
12		
13	SPREADSHEET DEFAULT	
14		
15	K	10
16		
17		
18	**OUTPUT VARIABLES:**	
19		
20	iat	0,051517
21	mu	10,0
22	r	1,9411
23	rho	0,647033
24	p0	0,120794
25		
26	Lq	0,764713
27	L	2,705813
28	Wq	0,039396
29	W	0,139396

m-m-c

Microsoft Excel - m-m-c

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventan

	A	B	C	D	E
1	M/M/c -- MULTIPLE SERVERS / UNLIMITED MARKOVIAN QU				
2	--				
3	**INPUT VARIABLES:**				
4					
5	lambda	16,138		Arrival rate (arrivals/unit c	
6					[MAKE SUI
7	st	0,333333		Mean time to complete ser	
8					
9	c	7		Number of servers in the s	
10					
11	T	1		Total time horizon for prot	
12					
13	SPREADSHEET DEFAULT				
14					
15	K	10		Maximum value (K>c) of v	
16				is to be plotted (full prii	
17			***[If K is changed, refresh the probabili***		
18	**OUTPUT VARIABLES:**				
19					
20	iat	0,061966		Mean interarrival time	
21	mu	3,0		Service rate (# served/unit	
22	r	5,379333		Average # arrivals during	
23	rho	0,768476		Fraction of time each serv	
24	p0	0,00378		Fraction of time all servers	
25					
26	Lq	1,401373		Expected queue size	
27	L	6,780706		Expected system size	
28	Wq	0,086837		Expected waiting time in tl	
29	W	0,42017		Expected waiting time in tl	

m-m-c

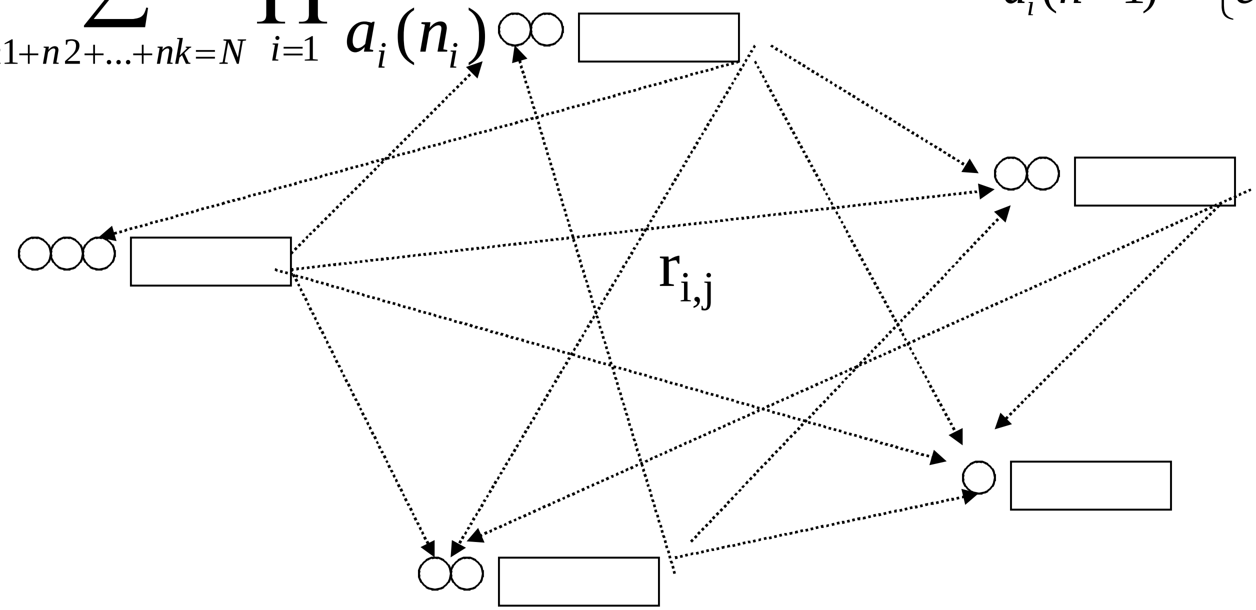
Redes de Jackson Cerradas

$$P_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^{n(i)}}{a_i(n_i)}$$

$$a_i(n_i) = \begin{cases} n_i! & n_i < c_i \\ c_i^{\,n_i - c_i} c_i! & n_i \geq c_i \end{cases}$$

$$\alpha_i(n) = \frac{a_i(n)}{a_i(n-1)} = \begin{cases} j & j < c_i \\ c_i & j \geq c_i \end{cases}$$

$$G(N) = \sum_{n1+n2+\ldots+nk=N} \prod_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^{n(i)}}{a_i(n_i)}$$



Algoritmo de Valor Medio para Redes Cerradas

Paso 1 Resolver las ecuaciones de tráfico

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} v_j r_{ji} \quad \text{asumiendo } v_l = 1$$

Paso 2 Inicializar $L_i(0)$, $p_i(0,0)=1$, $p_i(j,0)=0 \; \forall \; i=1..k, j \neq 0$

Paso 3 Para n=1 hasta N, calcular

Paso3.1 $$W_i(n) = \frac{1}{c_i \mu_i}\left(1 + L_i(n-1) + \sum_{j=0}^{c_1-2} (c_i - 1 - j) p_i(j, n-1)\right) \quad \forall i$$

Paso 3.2 $$\lambda_l(n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} v_i W_i(n)} \quad \text{con } v_l = 1$$

Paso 3.3 $$\lambda_i(n) = \lambda_l(n) \cdot v_i \qquad \forall i, i \neq l$$

Paso 3.4 $$L_i(n) = \lambda_i(n) W(n) \qquad \forall i$$

Paso 3.5 $$P_i(j,n) = \frac{\lambda_i(n)}{\alpha_i(j)\mu_i} P_i(j-1, n-1) \qquad \forall i = 1..k, j = 1..n$$

Servicio de Mantenimiento

Se desea que dos máquinas estén operativas en cualquier momento. La máquina se rompe de acuerdo con una exponencial de media λ=2. Una vez rota, una maquina tiene una probabilidad r_{12}=0.75 de ser reparada localmente por un responsable de mantenimiento que trabaja con una media de tiempo de μ_2=1. Con probabilidad 1- r_{12} la máquina debe ser reparada por un especialista, que también trabaja según una exponencial de media μ_3=3. Más allá, después de una reparación local, existe una probabilidad r_{23}=0.33 de que la máquina requiera un servicio especial. Después del servicio con el especialista la máquina siempre se pone a trabajar. Se desea saber cómo se distribuyen los tiempos de estancia de las máquinas en reparación.

Simulación

- Selección de los datos de entrada
  - Selección de la familia estadística adecuada
  - Selección de los parámetros.
- Simulación
  - Diferentes mecanismos de simulación
  - Búsqueda de estacionario
  - *Subruns, Repeated Runs*
- Análisis de Resultados
  - Naturaleza estadística de cada resultado
  - Análisis de experimentos
  - Intervalos de Confianza
- Validación del Modelo
  - Suficientemente simple
  - Creíble
  - ¿Reproduce la realidad?

ROGLE

Reengineering Operations GroupWork Logistics Excellence

Más problemas

Selección de Maquinaria

- Tiene que decidir que máquina comprar para la estampación de piezas metálicas.
  - La máquina A cuesta 20.000 €. 10 unidades/hora
  - La máquina B cuesta 30.000 € 11 unidades/hora
- Las piezas llegan según una distribución de Poisson de media 8 por hora y tienen un coste de espera de 2 € por hora debido a las especiales condiciones de mantenimiento que exigen.
- La planta opera durante 24 horas por día y 360 días al año.

Problema

- La academia "Grandes Escritores" ofrece un curso por correspondencia para aprender a escribir. Las solicitudes son aceptadas en cualquier momento y el curso empieza inmediatamente. La llegada de nuevas solicitudes sigue una distribución de Poisson con una media de 8 cada mes. Se estima que el tiempo medio en que se acaba el curso es de 10 semanas (distribución exponencial). Por término medio, ¿cuántos alumnos hay matriculados en la academia en cualquier momento?

Oficina bancaria

- Una pequeña sucursal de un banco tiene dos empleados, uno para los pagos y otro para los cobros. Los clientes llegan a cada caja siguiendo una distribución de Poisson con una media de 20/hora. (el total de llegada al banco es de 40/hora). El tiempo de servicio de cada empleado es una exponencial de media 2 minutos. El encargado de la sección está pensando hacer un cambio en que los dos empleados puedan hacer tanto pagos como cobros para evitar situaciones en que una cola está llena y la otra parada. Sin embargo, se estima que cuando los empleados se encarguen de las dos cosas el tiempo de servicio aumentará a una media de 2,4 minutos. Compara el sistema que se emplea ahora con el propuesto, calculando el total de gente en el banco, el tiempo medio que pasaría un cliente en el banco hasta que es atendido, la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos y el tiempo medio que están parados los empleados.

Problema

- Las máquinas que dispensan billetes para el metro en la compañía “RNFV”se suelen estropear cada 45 horas. Se supone que el único reparador de la estación tarda 4 horas en reparar la máquina. Se asume que los dos tiempos son la media de una distribución exponencial. ¿Cuál es el mínimo número de máquinas que debe haber para asegurarse que haya al menos 5 máquinas en servicio con una probabilidad mayor que 0.95?

Media, varianza...

Definiciones

- Media
- Varianza
- Desviación Estadística
- Coeficiente de Variación al cuadrado.
- Coeficiente de Variación

Distribuciones Importantes

- Discreta (toma valores de un conjunto numerable)
  - Discreta-Uniforme
  - Bernouilli
  - Binomial
  - Geométrica
  - Poisson
- Continua (toma valores en un intervalo)
  - Continua-Uniforme
  - Exponencial
  - Erlang
  - Gamma
  - Weibull
  - Normal
  - LogNormal

Distribuciones Estadísticas

Distribuciones Discretas

- Las distribuciones estadísticas de tipo discreto toman valores de un conjunto finito de posibilidades. En teoría de colas son relevantes porque permiten representar el número de clientes en un intervalo de tiempo.
- Si las posibles ocurrencias son un conjunto finito y uniforme de valores (e.g. el lanzamiento de un dado perfecto) se conoce como variable **Uniforme Discreta**. Si la variable se da entre los valores a y b enteros, la media de la distribución es (a+b)/2 y la varianza es ((b-a+1)^2-1)/12
- Si la probabilidad de cada ocurrencia es diferente, la más sencilla de todas las distribuciones de **Bernouilli** donde la variable puede sólo tomar dos valores (e.g. chico o chica, A o B) con una cierta probabilidad *p* para el primero miembro del par, que suele denominarse éxito. La media es *p* y la varianza es p(1-p)
- La distribución **Binomial** representa la probabilidad de obtener k sucesos A con probabilidad p, a partir de n intentos. Es por tanto la suma de n Bernouilli de probabilidad p. La media es *np* y la varianza es *np(1-p)*
- La distribución **Geométrica** representa la probabilidad de obtener la primera ocurrencia A en el lanzamiento n. Esta variable tiene un rango infinito aunque sigue siendo discreta. La media es 1/p y la varianza es (1-p)/p^2
- También tiene un rango infinito la conocida como **Poisson** en la que se representan ocurrencias para un conjunto grande e independiente de eventos distribuidos a lo largo del espacio o del tiempo La distribución tiene propiedades matemáticas interesantes que la hacen muy utilizada. La media es λ y la varianza es también λ.

Distribuciones Continuas

- La **Continua Uniforme** toma valores equiprobables en un determinado rango [a,b]. La media de esa función es (a+b)/2 y la varianza es (b-a)^2/12
- La **exponencial** (o negativa exponencial) es la complementaria de la distribución de Poisson. Su media es 1/λ y la varianza es 1/λ^2
- La **Erlang[k,β]** es una distribución que es la suma de k exponenciales de media β/k. La media de dicha distribución es β y la varianza es β^2/k.
- De hecho la distribución Erlang es una parte de una clase más amplia que son las distribuciones **gamma.** Cada función gamma es definida por dos parámetros α y β. La media es βα y la varianza es αβ^2
- La distribución **Weibull** permite describir la ruptura de materiales por uso continuado.
- La distribución **Normal.** Qué decir de la distribución normal, pues que permite que los valores sean negativos.
- La distribución **logNormal** describe adecuadamente los tiempos de reparación de Maquinaria.

Los procesos de Poisson y la distribución Exponencial

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- P1 El número de llegadas en intervalos de tiempo no superpuestos es estadísticamente independiente
- P2 La probabilidad de que una llegada ocurra entre el tiempo t y t+Δt es $\lambda\Delta$t+o(Δt), donde λ es la tasa de llegada y o(Δt) cumple

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

- P3 La distribución estadística del número de llegadas en intervalos de tiempo iguales es estadísticamente equivalente

$$P_n(t-s) = \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \qquad \forall t, s \geq 0, \quad t > s$$

Los Procesos de Poisson-Exponencial

- P4 Si el número de llegadas sigue una distribución de Poisson el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de media (1/λ) y al contrario

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \Leftrightarrow P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

- P5 Si el proceso de llegada es Poisson, los tiempos de llegada son completamente aleatorios con una función de probabilidad uniforme sobre el periodo analizado.

$$f_\tau(t_1, t_2, ..., t_k / k \ \ llegadas \ \ en[0, T]) = \frac{k!}{T^k}$$

- P6 Para conocer los datos que definen un proceso de Poisson solo es necesario conocer el número medio de llegadas
- P7 Amnesia de la Distribución Exponencial: La probabilidad de que falten t unidades para que llegue el siguiente cliente es independiente de cuanto tiempo llevamos sin que llegue ningún cliente.

$$P_r\{T \leq 1 / T \geq t_0\} = P_r\{0 \leq T \leq t_1 - t_0\}$$

Generalizaciones al Proceso Poisson-Exponencial

- Variabilidad de λ
  - Se puede admitir que λ varíe con el tiempo. En este caso

$$P_n(t) = e^{-m(t)} \cdot \frac{(m(t))^n}{n!}, m(t) = \int_o^t \lambda(s)ds$$

- Llegadas múltiples
  - Se puede admitir que en cada evento de llegada aparezcan i clientes, donde:

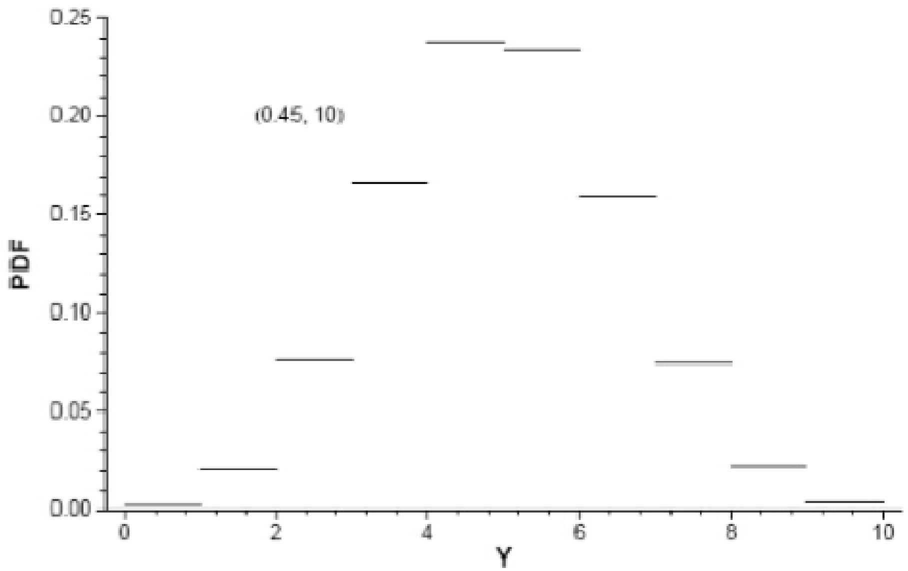
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda$$

  - En este caso la probabilidad de que en el instante t hayan aparecido m clientes es:

$$P_r\{N(t) = m\} = \sum e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} c_m^{(k)}$$

Binomial

Binomial(A,B) $y = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < A < 1, \quad y, 2 \le B$



$$\text{PDF} = \binom{B}{y} A^{y} (1 - A)^{B-y}$$

Parameters -- A (p): Prob(success), B (N): Number of Bernoulli trials (constant)

Moments, etc.

$$\text{Mean} = A\,B$$

$$\text{Variance} = A\,(1 - A)\,B$$

$$\text{Mode} = \text{int}\left(A\,(B + 1)\right)$$

Número de aciertos al observar B resultados dicotómicos o serie de Bernoulli.
B=1, distribución de Bernoulli

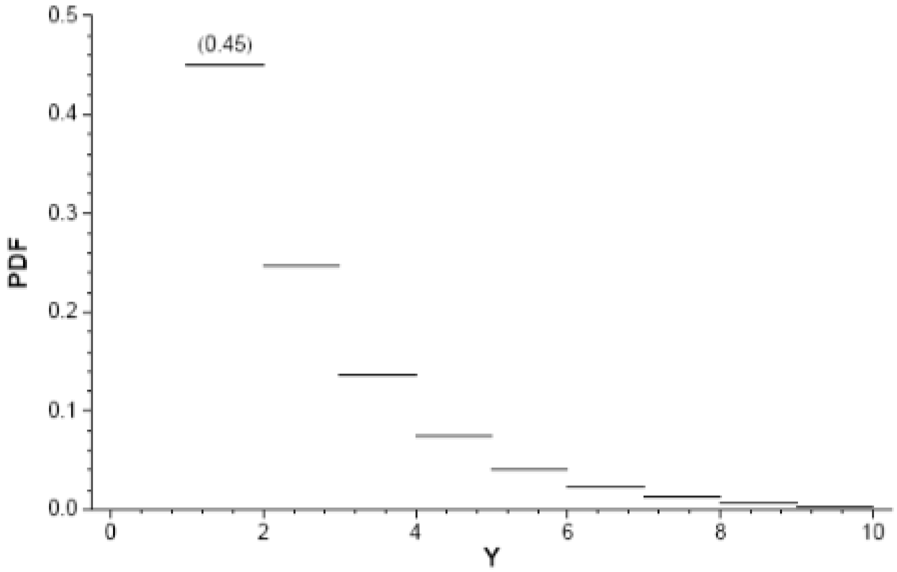
La probabilidad de observar un número de aciertos en B ensayos independientes con una proporción de aciertos A

Hipergeométrica: Binomial en un contexto de muestreo de n elementos con reemplazamiento, Np aciertos, Nq fallos, N=Np+Nq y n
$\text{PDF} = C^{Np}_{y} C^{Nq}_{n-x} / C^{N}_{n}$
Mean = np, Variance = npq(N-n)/(N-1)

Multinomial: resultados en más de dos clases o categorías.

Geométrica.

Geometric(A) $y = 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 < A < 1$



$$\mathrm{PDF} = A\left(1 - A\right)^{y-1}$$

Parameters -- A (p): Prob(success)

Moments, etc.

$$\mathrm{Mean} = \frac{1}{A}$$

$$\mathrm{Variance} = \frac{1 - A}{A^2}$$

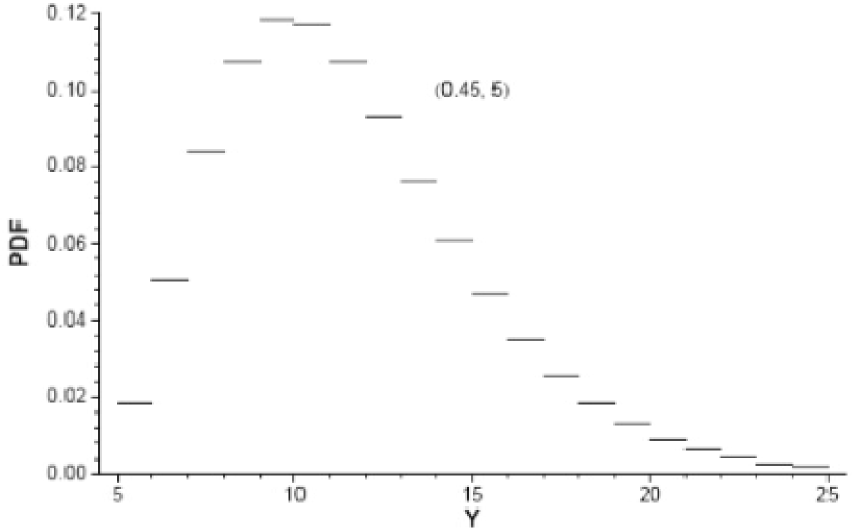
$$\mathrm{Mode} = 1$$

Número de ensayos independientes hasta el primer acierto, con una propoción A de acierto

Versión discreta de la distribución continua Exponencial

Binomial negativa

NegativeBinomial(A,B) $y = 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 < A < 1, \quad 1 \le B \le y$



$$\text{PDF} = \binom{y-1}{B-1} A^{B} (1-A)^{y-B}$$

Parameters -- A (p): Prob(success), B (k): a constant, target number of successes

Moments, etc.

$$\text{Mean} = \frac{B}{A}$$

$$\text{Variance} = \frac{B(1-A)}{A^{2}}$$

$$\text{Mode} = \text{int}\left(\frac{A+B-1}{A}\right)$$

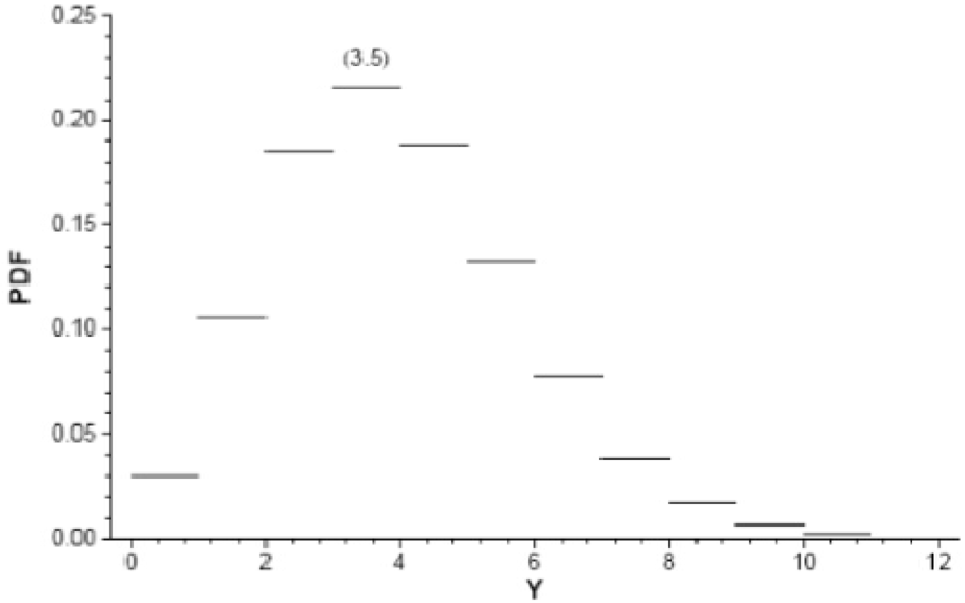
Binomial Negativa

Número de ensayos hasta completar B aciertos en una serie de Bernoulli.

B=1, distribución geométrica.

Poisson

Poisson(A) $y = 0, 1, 2, \ldots, \quad A > 0$



$$\text{PDF} = \frac{\exp(-A)\, A^{y}}{y!}$$

Parameters -- A (θ): Expectation

Moments, etc.

$$\text{Mean} = \text{Variance} = A$$

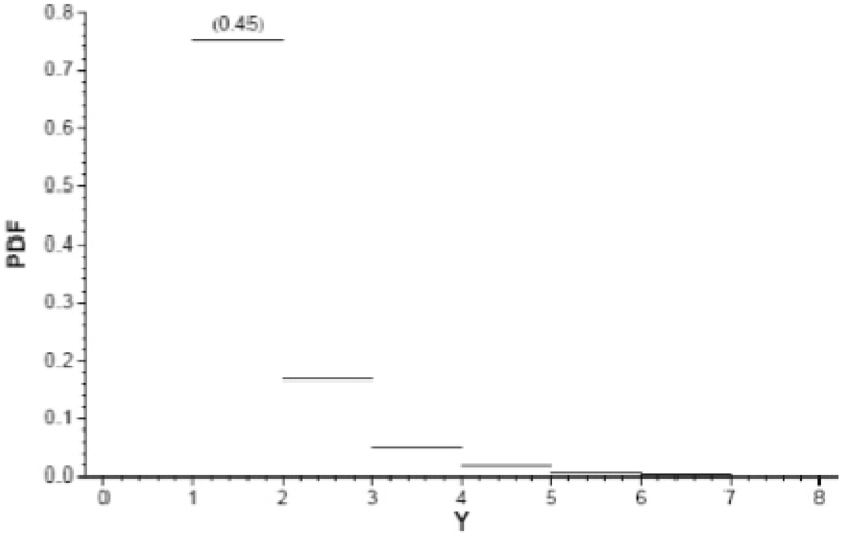
$$\text{Mode} = \text{int}(A)$$

Número de eventos en un periodo de tiempo (soporte) dado con una tasa fija y estable (A) .

Soporte continuo: tiempo, longitud, superficie,…

Logaritmica

Logarithmic(A) $y = 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 < A < 1$



$$\text{PDF} = \frac{-A^y}{\log(1-A)\,y}$$

Parameters -- A (θ): Shape

Moments, etc.

$$\text{Mean} = \frac{-A}{(1-A)\log(1-A)}$$

$$\text{Variance} = \frac{-A\left[A + \log(1-A)\right]}{(1-A)^2 \log^2(1-A)}$$

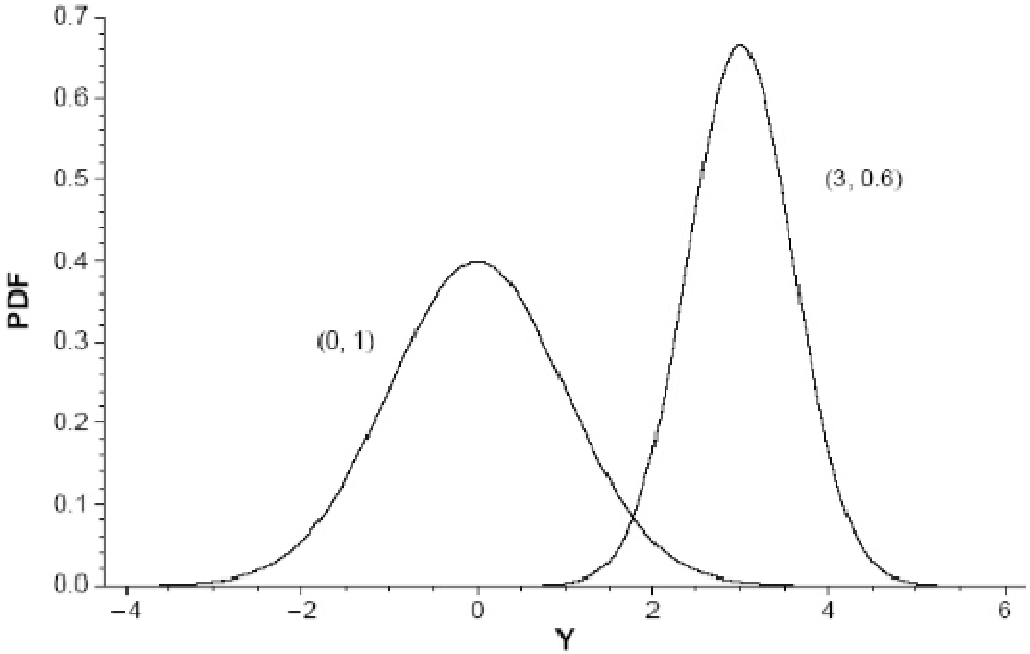
$$\text{Mode} = 1$$

Número de eventos en un periodo de tiempo dado.

Número de artículos adquiridos por un comprador en un periodo de tiempo dado.

Normal

Normal(A,B) $B > 0$



$$PDF = \frac{1}{B\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-A}{B}\right)^2\right)$$

$$CDF = \Phi\left(\frac{y-A}{B}\right)$$

Parameters -- A (μ): Location, B (σ): Scale

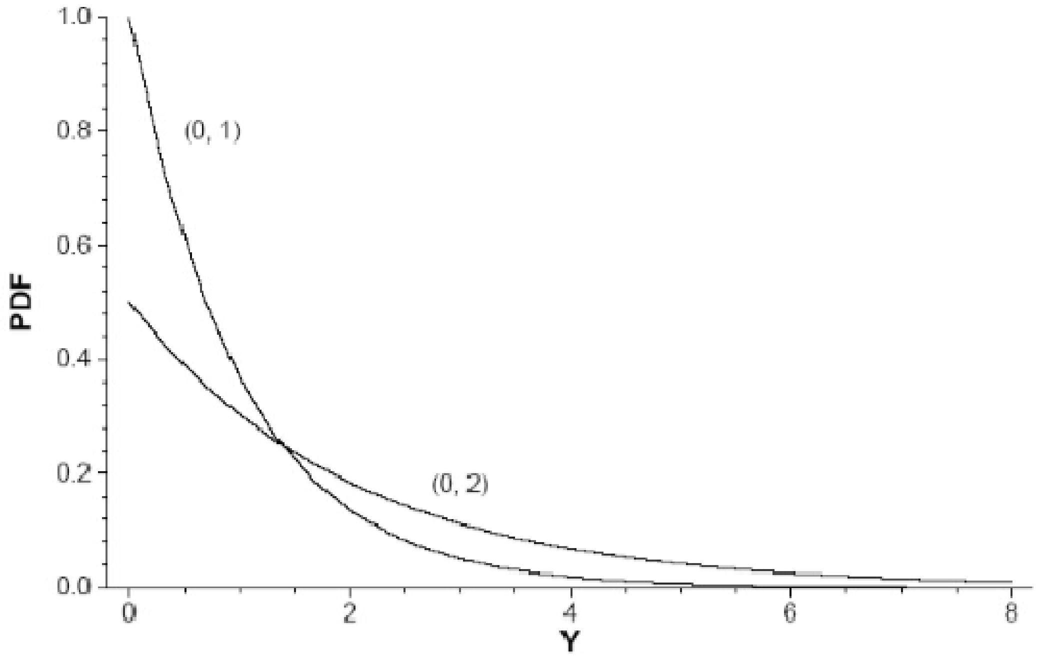
La distribución de errores de observaciones físicas que manifiesta ruido blanco en la medida

Distribución simétrica

Asociadas a la distribución Normal están las Distribuciones Chi-cuadrado y t-student

Exponential

Exponential(A,B) $y \geq A, \quad B > 0$



$$\text{PDF} = \frac{1}{B} \exp\left(\frac{A-y}{B}\right)$$

$$\text{CDF} = 1 - \exp\left(\frac{A-y}{B}\right)$$

Parameters -- A (θ): Location, B (λ): Scale

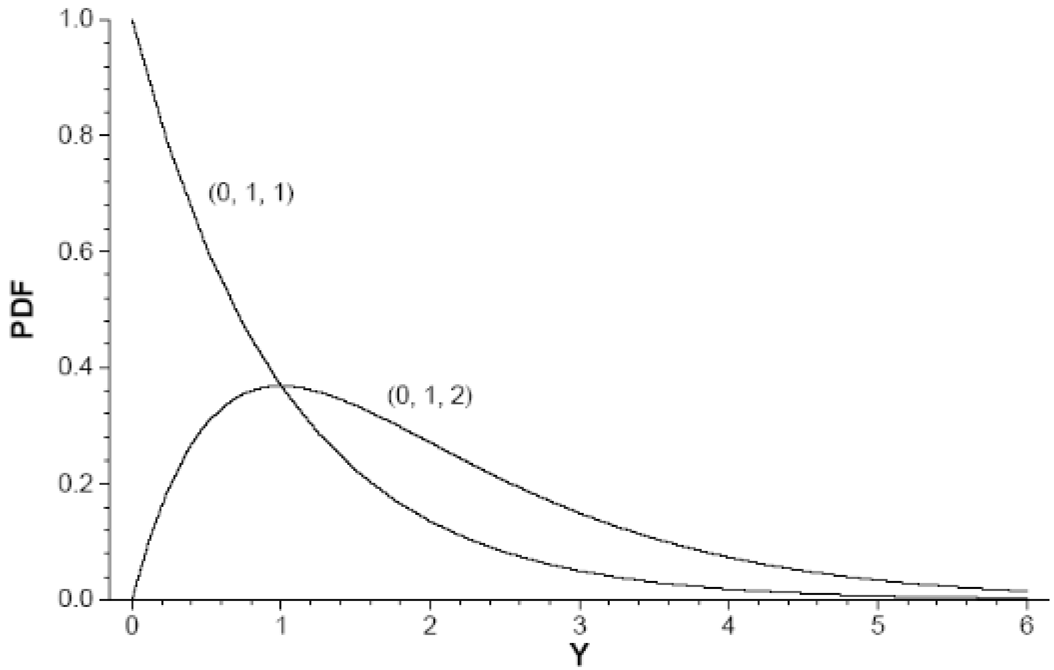
Distribución asociada al soporte continuo de La variable aleatoria discreta de Poisson

Caso particular de la distribución Gamma y Weibull

Tiempo de vida o entre fallos de procesos sin memoria

Gamma

Gamma(A,B,C) $y > A, \quad B > 0, \quad 0 < C \leq 100$



$$\text{PDF} = \frac{1}{B\,\Gamma(C)}\left(\frac{y-A}{B}\right)^{C-1} \exp\left(\frac{A-y}{B}\right)$$

$$\text{CDF} = \Gamma\left(C, \frac{y-A}{B}\right)$$

Parameters -- A (γ): Location, B (β): Scale, C (α): Shape

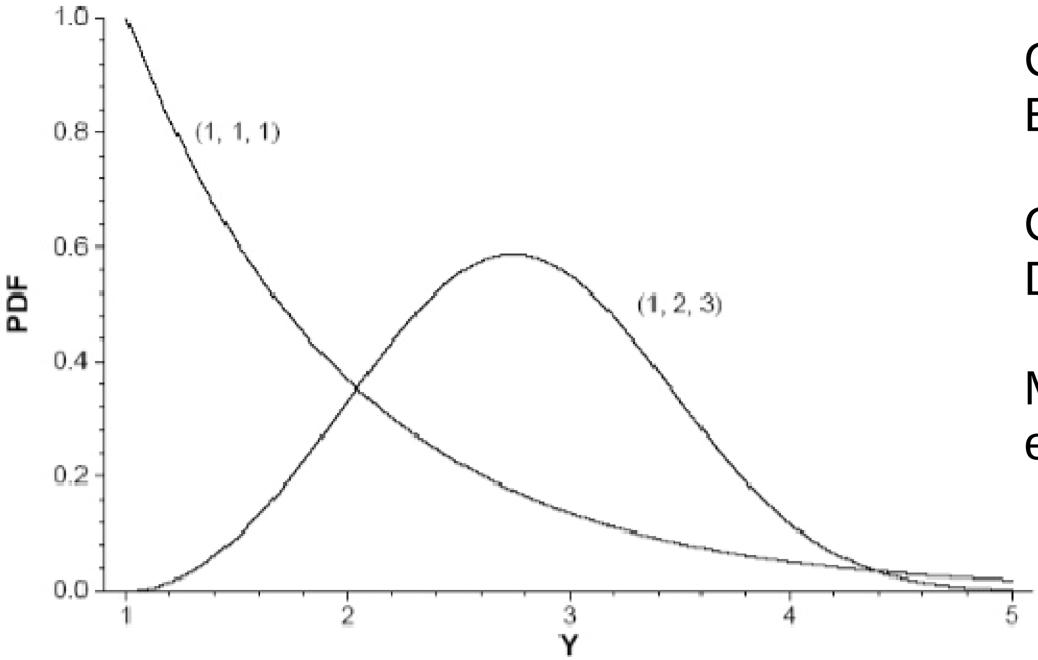
C=1, distribución Exponencial

Modela distribuciones cuya asimetria es muy significativa

Con C grande se aproxima a la Normal

Weibull

Weibull(A,B,C) $y > A, \quad B, C > 0$



C=1, distribución Exponencial

Generalización de la Distribución Exponencial

Modelización de tiempos en fiabilidad de sistemas

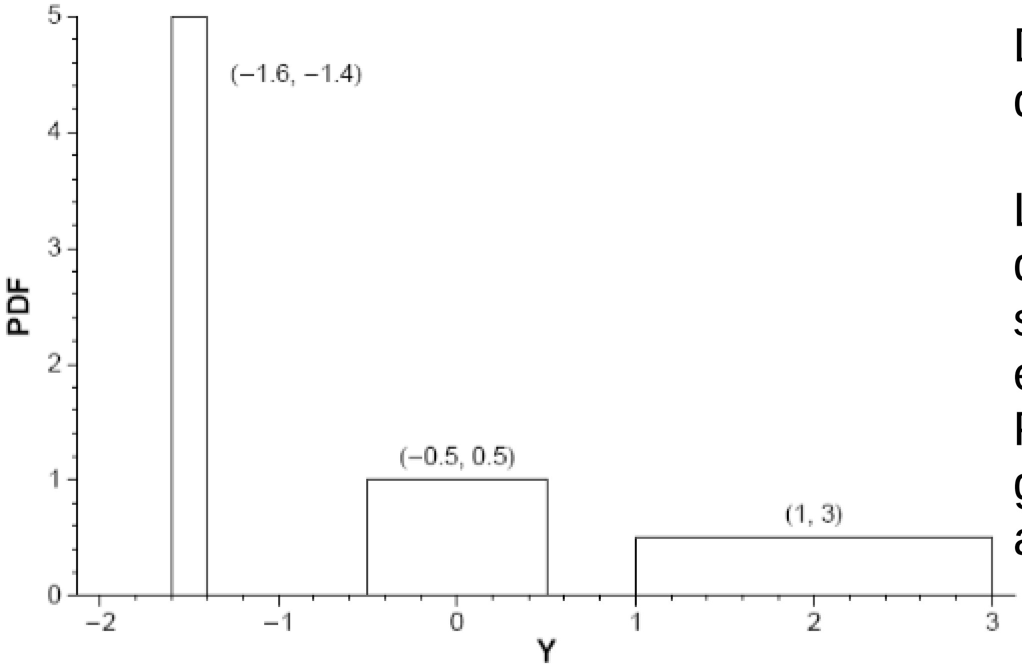
$$\text{PDF} = \frac{C}{B}\left(\frac{y-A}{B}\right)^{C-1} \exp\left(-\left(\frac{y-A}{B}\right)^{C}\right)$$

$$\text{CDF} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y-A}{B}\right)^{C}\right)$$

Parameters -- A (ξ): Location, B (α): Scale, C (c): Shape

Uniform

Uniform(A,B) $A < y < B$



$$\text{PDF} = \frac{1}{B - A}$$

$$\text{CDF} = \frac{y - A}{B - A}$$

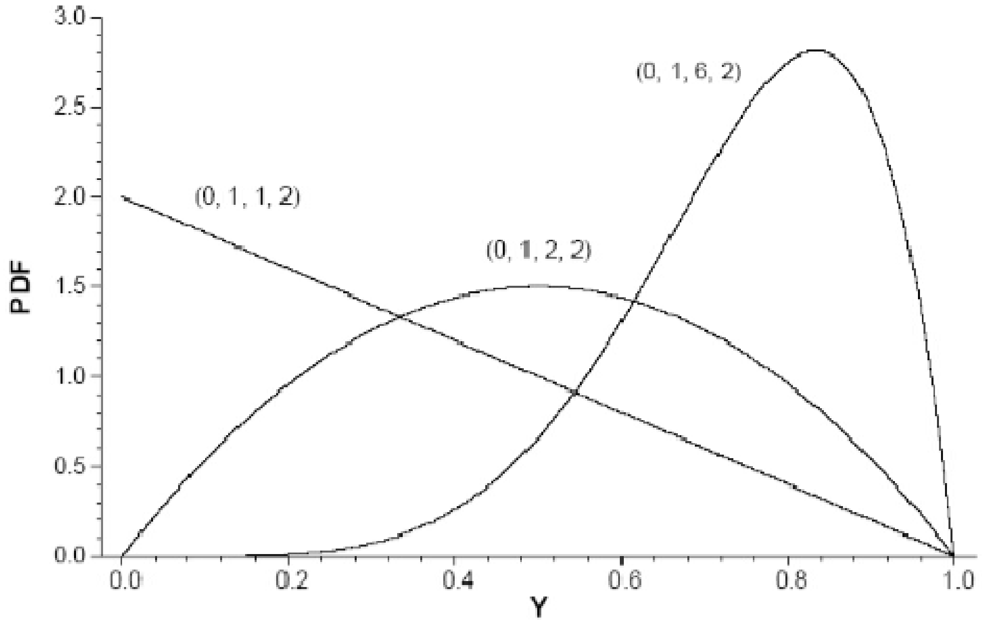
Parameters -- A : Location, B : Scale (upper bound)

Describe la ignorancia dentro de un intervalo

Los números pseudo-aleatorios que se generan en las simulaciones son uniformes en el intervalo [0,1]
Posteriomente se utilizan para generar valores del proceso aleatorio de interés.

Beta

Beta(A,B,C,D) $A < y < B, \quad C, D > 0$



$$\text{PDF} = \frac{\Gamma(C+D)}{\Gamma(C)\,\Gamma(D)\,(B-A)^{C+D-1}}(y-A)^{C-1}(B-y)^{D-1}$$

$$\text{CDF} = I\left(\frac{y-A}{B-A}, C, D\right)$$

Parameters -- A: Location, B: Scale (upper bound), C, D (p, q): Shape

Estimación bayesiana

Distribución de probabilidad de los parámetros de un Modelo