Matemáticas

David Jornet, Vicente Montesinos

Índice general

Introducción vii

1. Variable compleja **1**

1.1. El plano complejo 1
1.2. Preliminares 3
1.3. Series de potencias 4
1.4. Derivada de una función compleja 5
1.4.1. Definición y propiedades básicas 5
1.4.2. Relación entre diferenciabilidad real y derivabilidad compleja 6
1.4.3. Funciones armónicas 7
1.4.4. Funciones definidas por series de potencias 8
1.5. Funciones exponenciales y trigonométricas 9
1.5.1. Definiciones y propiedades básicas 9
1.5.2. Forma polar de un número complejo. Argumentos . . . 11
1.5.3. Producto de dos números complejos. Potencias 12
1.5.4. Raíces n-ésimas 12
1.5.5. Elección continua del argumento 12
1.5.6. Logaritmos 12
1.6. Integración compleja 13
1.6.1. Integrales a lo largo de una trayectoria 13
1.6.2. Integración y series de potencias 15
1.7. Teorema de Cauchy 16
1.8. Consecuencias del Teorema de Cauchy 18
1.8.1. Funciones derivables y series de potencias 18
1.8.2. Funciones enteras y polinomiales 19
1.8.3. El Teorema del Módulo Máximo 20

1.8.4. El teorema de Morera 20
1.9. Singularidades 21
1.10. Teorema del Residuo 23
1.10.1. Cálculo de residuos 23
1.11. Aplicaciones 24
1.11.1. Aplicaciones geométricas (transformaciones conformes) 24
1.11.2. Aplicaciones a la teoría de flujos 29
1.11.3. Aplicaciones a la ecuación de Laplace. Funciones armónicas 30
1.11.4. Aplicaciones al problema de Dirichlet 31
1.11.5. La ecuación de Poisson 33
1.11.6. Cálculo de integrales reales mediante residuos 34

2. Análisis de Fourier **37**
2.1. Algunos resultados sobre integrales 37
2.1.1. Concepto de integral de Riemann 37
2.1.2. Teoremas de convergencia 39
2.1.3. Integrales paramétricas 39
2.1.4. Integrales impropias 40
2.2. Series de Fourier 41
2.2.1. Algunas clases especiales de funciones 41
2.2.2. Sistemas ortonormales de funciones trigonométricas . . 42
2.2.3. Series de Fourier 45
2.2.4. Convergencia en media 47
2.2.5. Series de funciones particulares 48
2.2.6. Series de exponenciales complejas 49
2.2.7. Cambio de intervalo 49
2.2.8. Convergencia puntual de una serie de Fourier 49
2.2.9. Convergencia uniforme de la serie de Fourier 54
2.2.10. Diferenciación e integración de series de Fourier 55
2.2.11. Sumabilidad de Cesàro 55
2.2.12. Series dobles de Fourier 57
2.2.13. Aplicaciones de las Series de Fourier 58
2.2.14. Las series de Fourier como transformadas 60
2.3. Integrales de Fourier 61
2.4. Transformaciones integrales 62
2.4.1. Forma general de una transformación integral 62
2.4.2. La Transformada de Fourier 64

2.4.3. Transformación de Fourier y convoluciones 66
2.4.4. Algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier . . 68
2.4.5. Transformada de Laplace 71

3. Ecuaciones en Derivadas Parciales 75

3.1. Conceptos básicos 75
3.1.1. Definiciones 75
3.1.2. Formulación de un problema mediante una EDP 76
3.1.3. El principio de superposición para EDP lineales 76
3.2. Modelos matemáticos 77
3.2.1. La ecuación de ondas 77
3.2.2. La ecuación del calor 84
3.2.3. La ecuación de Laplace 85
3.3. EDP lineales de segundo orden. Formas canónicas 86
3.3.1. Clasificación 86
3.3.2. Cambio de variable 87
3.3.3. Formas canónicas 88
3.4. El problema de Cauchy 89
3.4.1. Aplicación a la ecuación unidimensional de ondas . . . 91
3.5. El Método de Separación de Variables 92
3.5.1. Preliminares 92
3.5.2. Planteamiento. 93
3.5.3. Algunas consideraciones sobre las condiciones de contorno 94
3.5.4. Problemas homogéneos 95
3.5.5. Problemas no homogéneos. 99
3.6. Transformada Finita de Fourier. 101
3.6.1. Introducción. 101
3.6.2. Aplicaciones. 102
3.7. Valores propios en EDO's 106
3.7.1. Sistemas de Sturm-Liouville. 106
3.7.2. Funciones propias. 108
3.7.3. Algunos problemas de valores propios clásicos 109
3.8. El problema de Dirichlet 111
3.8.1. Solución del problema de Dirichlet en un disco 111
3.9. Aplicaciones de las transformadas integrales 114
3.9.1. Transformadas de Fourier 114
3.9.2. Transformada de Laplace 117

4. Pruebas **119**

Índice de términos **121**

Introducción

Este texto está pensado para que los alumnos de la asignatura de Matemáticas de Segundo Curso de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia tengan apropiada documentación del contenido de la materia. Es solamente una guía, que no pretende comprender exhaustivamente todo el material que se desarrollará a lo largo del Curso, ya que en clase se proporcionan más ejemplos de los que se recogen aquí, se dan demostraciones de algunos resultados y se discuten aspectos que, por su propia naturaleza, requieren una presentación oral. Nuestra propia experiencia pasada, cuando éramos alumnos de una asignatura así, nos indica que el esfuerzo dedicado a tomar notas en las exposiciones dejaba poco tiempo para la reflexión o la simple comprensión. Creemos que disponer de unas notas de esta naturaleza puede ser una buena ayuda para el alumno, ya que le exime de la tarea de hacer de copista y le proporciona un material de referencia. Por las razones apuntadas, la asistencia a clase sigue siendo, desde luego, aconsejable. Este texto, presente en la red y accesible a todos, una vez descargado, podrá ser completado con notas que el propio alumno incluirá oídas las explicaciones del profesor.

El texto debe su existencia al esfuerzo de varias personas: en primer lugar, por supuesto, los autores. Pero no sólo ellos: han aportado muchas sugerencias el profesor Miguel Friz, quien también impartió la asignatura, y los alumnos Ignacio Monterde –proponiendo algunos problemas, sobre todo en la parte de variable compleja, y Luis Emilio García –quien aportó algunos ejemplos en variable compleja y en análisis de Fourier, además de realizar el glosario de términos. Les damos las gracias a todos ellos, así como a los alumnos a los que este curso ha sido impartido. Sólo en esta especial interacción que proporciona la docencia el contenido y la exposición se han ido puliendo. Sigue siendo un material abierto a muchas mejoras –pues las necesita. Por ello, cualquier sugerencia que los lectores quieran hacer será bienvenida.

Damos las gracias también a los matemáticos que han escrito sobre la materia y en los que naturalmente nos hemos inspirado. Algunos de ellos aparecen en la bibliografía. Ésta, también, se ampliará con el tiempo.

Los autores

Capítulo 1
Variable compleja

1.1. El plano complejo

En lo sucesivo, $\mathbb{C}$ denotará el cuerpo de los números complejos, dotado de las operaciones básicas de suma y producto de sus elementos, y con la distancia dada por su módulo. Precisamente,

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2,$$

estando las operaciones definidas por $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, y $(a, b).(c.d) := (ac - bd, ad + bc)$ ([1]), y siendo el módulo $|(a, b)| := +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Se define $i := (0, 1)$, con lo que todo número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se puede escribir como $z = a + bi$ si se identifica a con $(a, 0)$, $\forall a \in I\!R$ (es decir, se identifica el primer eje en $\mathbb{C}$ con los números reales). Precisamente, si $(a, b) \in \mathbb{C}$,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, -1) = a + bi.$$

Notar que $i^2 = -1$, una propiedad que no posee ningún número real.

[1]El lector se preguntará el porqué de introducir un nuevo símbolo $\mathbb{C}$ para un objeto ya conocido, $\mathbb{R}^2$. La razón es que, aunque como conjuntos y como espacios topológicos coinciden, su estructura algebráica es totalmente distinta. Es cierto que la operación suma es la misma en ambos, así como el producto por un escalar produce el mismo resultado que la multiplicación por un número real; sin embargo, existe en $\mathbb{C}$ una operación que no estaba definida en $\mathbb{R}^2$, el producto de dos elementos para producir un tercer elemento. Con esa operación $\mathbb{C}$ se convierte en un *cuerpo*, y es posible, por ejemplo, la división por un elemento distinto de cero, es decir, la multiplicación por su inverso. Esto es esencial para definir, más adelante, la *derivada*.

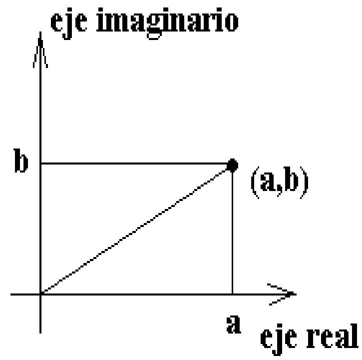

Figura 1.1: Representación geométrica de un número complejo

Sea $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$. Se usarán las siguientes notaciones:

$\mathrm{Re}(z) = a$ (parte real), $\mathrm{Im}(z) = b$ (parte imaginaria), $\overline{z} = a - bi$ (conjugado),

y si $r > 0$,

$$B(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}, \quad \overline{B}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le r\},$$

$$C(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}.$$

También se denotará $B'(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_0| < r\}$.

Observar que se tienen las siguientes relaciones:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \ |z|^2 = z.\overline{z}.$$

Como existe una distancia (exactamente, $d(z, w) := |z - w|, \ \forall z, w \in \mathbb{C}$), se trata de un espacio métrico, y por tanto se puede hablar de convergencia. Precisamente, una sucesión $(z_n = x_n + iy_n)$ de elementos de $\mathbb{C}$ converge a un elemento $z = x + iy$, cuando $|z - z_n| \to 0$, y ello equivale a que (x_n) converja a x e (y_n) converja a y.

Se puede hablar también de conjuntos acotados, abiertos y cerrados, clausuras, interiores, conjuntos conexos, etc. Recordamos aquí que un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *acotado* cuando está contenido en $B(z_0; r)$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$ y cierto $r > 0$, *abierto* cuando todo punto $a \in A$ es *interior*, es decir, cuando dado cualquier punto $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset A$. Un conjunto

$F \subset \mathbb{C}$ es *cerrado* cuando su complementario es abierto. La *clausura* $\overline{A}$ de un conjunto A es el menor conjunto cerrado que contiene a A. El *interior* $int(A)$ de un conjunto A es el mayor conjunto abierto contenido en A. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *conexo* cuando no existen dos subconjuntos abiertos y no vacíos A y B tales que $A \cap S \neq \emptyset$, $B \cap S \neq \emptyset$, $A \cap B \cap S = \emptyset$ y $(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$. Se llamará *dominio* a un conjunto abierto, conexo y no vacío.

Un *intervalo* $[a, b]$ en es un subconjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : \; z = \lambda a + (1-\lambda)b, \; 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Un subconjunto $\emptyset \neq C \subset \mathbb{C}$ se dice que es *convexo* cuando, dados dos puntos a y b arbitarios en C, entonces $[a, b] \subset C$. Todo subconjunto convexo es conexo, aunque el recíproco no es cierto.

1.2. Preliminares

Se hará uso de los siguientes resultados:

Se considera una sucesión (f_n) de funciones definidas en un subconjunto abierto y no vacío $G \subset \mathbb{C}$, con valores en $\mathbb{C}$. Se dice que la sucesión *converge puntualmente* a $f : G \to \mathbb{C}$ cuando

$$f_n(z) \xrightarrow{n} f(z), \; \forall z \in G.$$

Se dice que la sucesión *converge uniformemente* a f cuando

$$s_n \to 0,$$

siendo $s_n := \sup\{|f(z) - f_n(z)| : \; z \in G\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Se tiene el siguiente

Teorema 1 *Si cada una de las funciones f_n es continua, y la convergencia a f es uniforme, entonces f es también continua.*

Si se trata de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones, se habla de convergencia puntual o uniforme de la serie a la función suma s cuando la sucesión de sumas parciales (s_n) converge puntual o uniformemente, respectivamente, a s (una *suma parcial* es la función $s_k = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $k = 1, 2, \ldots$).

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para la convergencia uniforme de una serie de funciones:

Teorema 2 (Criterio M de Weierstrass) *Con las notaciones anteriores, se supone que* $\sup\{|f_n(z)| : \; z \in G\} = M_n$ *y que la suma* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente a la función suma s.*

1.3. Series de potencias

Definición 3 *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Una* serie de potencias *desarrollada en z_0 es una expresión*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Define una función de $z \in \mathbb{C}$ (con valores complejos) donde sea convergente.

Observar que una serie de potencias compleja es la generalización natural de un polinomio complejo

$$P(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

donde $z, a_0, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. El siguiente resultado es crucial:

Teorema 4 *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias. Entonces existe $R \in [0, +\infty]$ (llamado* radio de convergencia*) tal que*

1. *si $|z - z_0| < R$, entonces la serie converge absolutamente;*
2. *si $|z - z_0| > R$, la serie diverge;*
3. *si $0 < r < R$, la serie converge uniformemente en el conjunto $\overline{B}(z_0; r)$.*

Es bien conocido que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}, \quad (^2)$$

con el convenio de que si el límite superior es $+\infty$ entonces $R = 0$ y que si es 0 entonces $R = +\infty$, [fórmula de Cauchy-Hadamard].

A la vista de la tercera afirmación del teorema 4 y del teorema 1, la función que se define como suma de la serie es continua en $B(z_0; R)$. En principio, no es posible decir nada en general sobre la posible convergencia de la serie de potencias en la frontera $C(z_0; R)$. Notar también que si $R = +\infty$, entonces la serie de potencias define una función continua en todo el plano complejo (más precisamente, *entera* (ver las definiciones 5 y 32)), mientras que si $R = 0$, la serie de potencias sólo converge en z_0.

[2] Se define el *límite superior* de una sucesión (s_n) de números reales como el mayor de los límites de las posibles subsucesiones convergentes, si es que hay alguna. En el caso de que la sucesión no sea acotada superiormente, se define el límite superior como $+\infty$. En el caso de que la sucesión original diverja a $-\infty$ se dice que el límite superior es $-\infty$.

1.4. Derivada de una función compleja de variable compleja

1.4.1. Definición y propiedades básicas

Definición 5 *Sea G un conjunto abierto y no vacío en $\mathbb{C}$. Sea $z_0 \in G$. Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función. Se dice que f es* derivable *en z_0 cuando existe*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Este límite, si existe, se denota por $f'(z_0)$. Si una función f es derivable en todo punto de un conjunto G abierto no vacío se dice que es derivable *en G, o bien* diferenciable[3], holomorfa *o* analítica *en G (todos esos términos son equivalentes). Una función f definida y derivable en todo $\mathbb{C}$ se dice que es* entera*.*

Notas. Una función de variable compleja se puede interpretar como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, no hay una estructura algebraica en $\mathbb{R}^2$ que permita realizar divisiones, por lo que la anterior fórmula no tendría sentido (es por ello por lo que no se define la *derivada* en $\mathbb{R}^n$ para $n = 2, 3, \ldots$). Es necesario considerar la estructura algebraica de cuerpo en los números complejos (ver la subsección 1.4.2 y la nota al pie en la página 1).

Se verifican las propiedades algebraicas de derivación usuales (por lo que, en particular, la suma y el producto de funciones derivables es derivable, así como el cociente cuando el denominador no se anula). Se verifica asímismo la Regla de la Cadena: dados conjuntos abiertos no vacíos S y G en $\mathbb{C}$, y funciones como las indicadas

$$G \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} \mathbb{C},$$

denotando $g \circ f$ la función compuesta, si f es derivable en $z_0 \in G$, y g es derivable en $f(z_0) \in S$, entonces $g \circ f$ es derivable en z_0 y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)).f'(z_0).$$

[3]El término *diferenciable*, usado en variable compleja en lugar del más apropiado *derivable* puede dar lugar a confusiones en relación con lo que se dirá respecto a la derivabilidad real o compleja en 1.4.2. Sin embargo, el uso de *diferenciable* en lugar de *derivable* es una tradición en variable compleja.

1.4.2. Relación entre diferenciabilidad real y derivabilidad compleja

Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto no vacío $G \subset \mathbb{C}$. Sea $z_0 = (a_0, b_0) \in G$ un punto en G. Se puede interpretar f como una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, con componentes $f = (u, v)$ (de forma que $f(z) = f(a + ib) = u(a, b) + iv(a, b)$). Para una función así, se definió el concepto de *diferenciable* en el punto (x_0, y_0) (como función real) cuando existe una función lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + T(\Delta x, \Delta y) + h(\Delta x, \Delta y).\|(\Delta x, \Delta y)\|,$$

para todo $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$, donde

$$h(\Delta x, \Delta y) \to 0, \quad \text{cuando } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0).$$

Además, en ese caso, T se puede representar como una matriz 2×2 de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u & D_2 u \\ D_1 v & D_2 v \end{pmatrix},$$

donde las derivadas parciales están calculadas en el punto (x_0, y_0). Se tiene el siguiente

Teorema 6 *Sea $f : G \to \mathbb{C}$, donde G es un abierto en $\mathbb{C}$. Sea $f = (u, v)$ (partes real e imaginaria), sea $z = a + ib \in G$. Entonces las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es derivable (como función compleja) en z.*
2. *f es diferenciable en (a, b) (como función de $G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) y además se verifican las* Ecuaciones de Cauchy-Riemann*, es decir*

$$D_1 u(a, b) = D_2 v(a, b), \quad D_2 u(a, b) = -D_1 v(a, b).$$

En ese caso,

$$f'(z) = D_1 u(a, b) + iD_1 v(a, b) = D_2 v(a, b) - iD_2 u(a, b).$$

Notas. Una consecuencia inmediata es que una función compleja f definida en un conjunto abierto y conexo[4] $G \subset \mathbb{C}$ que tome sólo valores reales debe ser constante.

[4]Un conjunto G es *conexo* cuando no puede ser escrito como unión disjunta de dos subconjuntos no vacíos y relativamente abiertos, es decir, intersección de abiertos de $\mathbb{C}$ con G.

1.4.3. Funciones armónicas

Definición 7 *Una función $u : G \subset I\!R^2 \to I\!R$, donde G es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, se dice que es* armónica *cuando tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y verifica la* ecuación de Laplace *en G, es decir,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dada una función $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable, sus partes real e imaginaria u y v, respectivamente, interpretadas como funciones de $G \subset I\!R^2$ en $I\!R$, son armónicas. En ese caso, se dice que v es la función *armónica conjugada* de u.

Teorema 8 *Dado un subconjunto no vacío, abierto y simplemente conexo*[5] *D de $\mathbb{C}$, y dada una función armónica u definida en D, existe en D una función v armónica conjugada de u.*

Si $z_0 = (x_0, y_0) \in D$, y si el rectángulo con vértices opuestos (ver la figura 1.2) (x_0, y_0) y (x, y) está contenido en D, la expresión de la conjugada armónica de u es

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x_0, t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s, y)ds + c,$$

siendo c una constante.

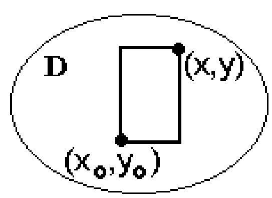

Figura 1.2: Un rectángulo en D

[5]Un conjunto es *simplemente conexo* cuando es *conexo por arcos* (es decir, cuando dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un arco contenido en el conjunto) y cuando toda curva cerrada en dicho conjunto puede deformarse, sin abandonar el conjunto, continuamente a un solo punto.

1.4.4. Funciones definidas por series de potencias

Definición 9 *Una función $f : G \to \mathbb{C}$ definida en un conjunto abierto no vacío G se dice que es* representable por series de potencias en G *cuando, dado $z_0 \in G$ y dado $r > 0$ tal que $B(z_0; r) \subset G$, entonces existe una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

que converge en $B(z_0; r)$ y tal que

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall z \in B(z_0; r).$$

Más adelante se verá (teorema 30) que todas las funciones derivables son desarrollables en series de potencias, por lo que los dos conceptos coinciden. Esto es uno de los resultados más importantes de la teoría de las funciones de variable compleja.

Teorema 10 *Toda función $f : G \to \mathbb{C}$ definida en un conjunto abierto no vacío $G \subset \mathbb{C}$ representable por series de potencias es derivable en G. Además f' es también representable en serie de potencias en G y se tiene:*

si

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall z \in B(z_0; r),$$

entonces

$$f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \ \forall z \in B(z_0; r)$$

(es decir, la derivada se obtiene por derivación término a término de la serie original).

Nota. Implícito en el anterior resultado está el hecho de que el radio de convergencia de la serie derivada coincide con el de la serie original.

Corolario 11 *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ (donde $G \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y no vacío) una función representable en serie de potencias en G (ver la notación usada en la definición 9) de forma que*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall z \in B(z_0; r).$$

Entonces f tiene todas sus derivadas en G, y cada derivada es representable en serie de potencias en G, de forma que, si $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}, \ \forall z \in B(z_0; r)$$

(con el símbolo $f^{(0)}$ se indica simplemente f).

Corolario 12 *Si una función $f : B(z_0; r) \to \mathbb{C}$ es la suma de una serie de potencias, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in B(z_0; r)$, entonces los coeficientes tienen la siguiente expresión:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ n = 0, 1, 2\ldots$$

Observar que basta pues conocer el comportamiento de la funcion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en un entorno de z_0 arbitrariamente pequeño para conocer todos sus coeficientes a_n y, por tanto, el comportamiento de f en cualquier punto interior del disco de convergencia.

Teorema 13 *Si dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergen en $B(0; R)$ para un cierto $R > 0$, y si las funciones f y g que respectivamente definen coinciden en los términos de una sucesión (z_n) en $B'(0; R)$ que converge a cero, entonces ambas series tienen los mismos coeficientes (y por tanto las dos funciones f y g coinciden en todo $B(0; R)$).*

1.5. Funciones exponenciales y trigonométricas

Las funciones de variable compleja más importantes son las que aparecen a continuación. Todas ellas están definidas como sumas de series de potencias.

1.5.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 14

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Notas. Las series de la definición anterior tienen radio de convergencia $+\infty$, es decir, convergen en todo $\mathbb{C}$. Algunas consecuencias de este hecho y de la teoría general son las siguientes:

exp, cos, sin, son funciones continuas, la convergencia de la serie que las define es uniforme en cualquier subconjunto acotado de $\mathbb{C}$. Más todavía, las funciones son derivables y la serie derivada término a término representa la derivada, así que tienen derivadas de cualquier orden, todas ellas series de potencias convergentes en todo el plano complejo. De hecho,

$$(\exp(z))' = \exp(z), \quad (\cos(z))' = -\sin(z), \quad (\sin(z))' = \cos(z).$$

El siguiente teorema resume las propiedades más importantes de la función exp, función que es, sin ninguna duda, la función más importante del análisis matemático:

Teorema 15 *1.* $\forall z \in \mathbb{C}$, *se tiene* $\exp(z) \neq 0$.

2. $(\exp(z))' = \exp(z)$.

3. La restricción de exp *al eje real es una función estrictamente creciente (llamada* exponencial real*), con* $\exp(x) \to \infty$ *cuando* $x \in \mathbb{R} \to +\infty$*, y* $\exp(x) \to 0$ *cuando* $x \in \mathbb{R} \to -\infty$.

4. Existe un número real (denotado π*) tal que* $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$*, y se tiene* $\exp(z) = 1$ *si y solamente si* $z = 2m\pi i$ *para algún entero* m.

5. exp *es una función periódica con período* $2\pi i$.

6. La aplicación $t \to \exp(it)$ *transforma el eje real en la circunferencia unidad (circunferencia de centro 0 y radio 1).*

7. Si $w \in \mathbb{C}$*, con* $w \neq 0$*, existe un número* $z \in \mathbb{C}$ *con* $\exp(z) = w$.

Las siguientes relaciones se comprueban inmediatamente:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z).$$

$$\cos(z) = \cos(-z), \quad \sin(z) = -\sin(-z).$$

$$e^0 = 1, \quad \cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0.$$

$$\frac{\sin(z)}{z} \to 1, \text{ cuando } z \to 0.$$

$$\exp(z+u) = \exp(z).\exp(u), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad |\exp(ix)| = 1, \ \forall x \in I\!R.$$

$$\cos(z+u) = \cos(z)\cos(u) - \sin(z)\sin(u), \ \sin(z+u) = \sin(z)\cos(u) + \cos(z)\sin(u).$$

$$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \ n \text{ un número entero.}$$

$$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (n + \frac{1}{2})\pi, \ n \text{ un número entero.}$$

Definición 16

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

1.5.2. Forma polar de un número complejo. Argumentos

Definición 17 *La* forma polar *de un número complejo z es $z = |z|.e^{i\theta}$, donde $\theta \in [0, 2\pi[$ es único si $z \neq 0$. La representación no es única: cualquier α con $z = |z|.e^{i\alpha}$ se dice que es un* argumento *de z. Los argumentos de z forman el conjunto $\{\theta + 2\pi n : \ n \text{ un número entero}\}$.*

1.5.3. Producto de dos números complejos. Potencias

La forma polar de un número complejo, vista en la definición 17, permite una interpretación geométrica del producto de dos números complejos y, en particular, de la potencia $n-$ésima: Sea $z_k = |z_k|.e^{i\alpha_k}$, donde α_k es un argumento de z_k, $k = 1, 2$. Entonces, por las propiedades de la exponencial compleja (ver el Teorema 15), se tiene $z_1.z_2 = |z_1.z_2|.e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$, por lo que el producto tiene como módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos (donde se ha elegido un cierto argumento para cada uno de los números complejos). Como caso particular, se obtiene que z^k, siendo k un entero positivo, tiene como módulo la potencia $k-$ésima del módulo de z y como argumento k veces un cierto argumento de z.

1.5.4. Raíces n-ésimas

Todo número complejo distinto de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, siendo $n \in I\!N$. Si $z = |z|.e^{i\theta}$, las raíces n-ésimas son

$$\{\sqrt[n]{|z|}.e^{i\frac{\theta}{n}},\ \sqrt[n]{|z|}.e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n})},\ \sqrt[n]{|z|}.e^{i(\frac{\theta}{n}+2\frac{2\pi}{n})},\ldots,\ \sqrt[n]{|z|}.e^{i(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n})}\}$$

Se observa que las raíces $n-$ésimas están uniformemente distribuidas en la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt[n]{|z|}$.

1.5.5. Elección continua del argumento

Sea α un número real. Se define

$$H_\alpha := \{-r.e^{i\alpha} :\ r \geq 0\},$$

(ver la figura 1.3).

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha$, hay un único número real en $]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$, denotado $\arg_\alpha(z)$, que es un argumento de z. La función $z \to \arg_\alpha(z)$ definida en $\mathbb{C} \setminus H_\alpha$ es continua.

1.5.6. Logaritmos

Definición 18 *Dado un número complejo $z \neq 0$, un* logaritmo *es un número complejo w tal que $e^w = z$.*

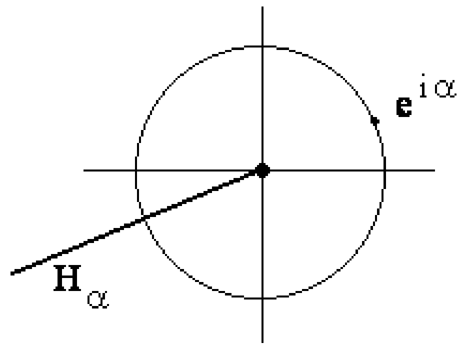

Figura 1.3: El conjunto H_α

Notas. Sea $z \neq 0$ un número complejo. Si un logaritmo se expresa $w = a+bi$, entonces $z = e^w = e^a.e^{bi}$. Por tanto $|z| = e^a$, luego $a = \log|z|$ (de ahora en adelante log denotará siempre el logaritmo neperiano; a veces también se usará ln. No se utilizarán logaritmos decimales ni en otra base distinta de e). Como $z = |z|.e^{bi}$, resulta que b es un argumento de z. Entonces, los logaritmos de $z \neq 0$ son exactamente los números $\log|z| + i\arg(z)$, donde $\arg(z)$ denota cualquier argumento de z. El uso de distintos argumentos de z obliga a considerar distintos logaritmos. Dado un número real α se denota

$$\log_\alpha(z) := \log|z| + i.\arg_\alpha(z),\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha.$$

Se tiene

$$(\log_\alpha(z))' = \frac{1}{z},\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha.$$

Si $|z| < 1$, se tiene

$$\log_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

1.6. Integración compleja

1.6.1. Integrales a lo largo de una trayectoria

Definición 19 *Un* camino *o* trayectoria *en* $\mathbb{C}$ *es una función continua* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$*, donde* $[a,b]$ *es un intervalo de la recta real. La imagen de un* *camino* α *es un subconjunto de* $\mathbb{C}$*, denotado por* α^**, llamado una* curva*. La curva se dice que es* cerrada *cuando* $\alpha(a) = \alpha(b)$*. Un camino* α *es* suave a trozos *cuando hay una partición* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *de* $[a, b]$ *de modo que* α *tenga derivada continua en cada uno de los intervalos* $]x_{i-1}, x_i[$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, y de forma que existan las derivadas laterales en cada uno de los puntos de la partición.*

Notas. En el caso de un camino suave a trozos α, es conocido que la curva es *rectificable*, es decir, tiene longitud, y que su longitud $L(\alpha)$ viene dada por

$$L[\alpha] = \int_a^b \|\alpha\,'(t)\| dt.$$

Definición 20 *Sea* $f : D \to \mathbb{C}$ *una función definida en un dominio* D*. Supongamos que* $\alpha^* := \alpha[a, b] \subset D$*, y que la composición* $f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ *sea integrable en* $[a, b]$*. Supongamos también que* α *sea suave a trozos. Se define*

$$\int_\alpha f(z)dz := \int_a^b f[\alpha(t)]\alpha\,'(t)dt.$$

Notas. Es inmediato que

$$\left| \int_\alpha f \right| \leq L[\alpha]. \sup\{|f(z)| : \ z \in \alpha^*\},$$

siendo $L(\alpha)$ la longitud de la curva.

Proposición 21 *Sea* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un camino suave a trozos tal que* $\alpha(a) = z_1$*,* $\alpha(b) = z_2$*. Sea* $f : G \to \mathbb{C}$ *una función derivable, con derivada continua*[6]*, definida en un conjunto abierto* $G \subset \mathbb{C}$ *que contiene a* α^**. Entonces*

$$\int_\alpha f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1).$$

Proposición 22 *Sea* $r > 0$*. Sea* $C(z_0; r)$ *la circunferencia de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* r*, recorrida en sentido positivo (es decir, contrario a las agujas de un reloj)*[7]*. Entonces*

$$\int_{C(z_0:r)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & si\ n\ es\ un\ entero,\ n \neq -1, \\ 2\pi i, & si\ n = -1. \end{cases}$$

[6]Más adelante se verá que el requisito de la continuidad de la derivada es superfluo, ya que la derivada de toda función de variable compleja derivable es continua, y todavía más, derivable.

[7]En lo sucesivo, las circunferencias se considerarán orientadas de esta forma.

1.6.2. Integración y series de potencias

Como aplicación del resultado anterior y de la convergencia uniforme de una serie de potencias en un disco cerrado dentro del de convergencia, considérese la integración de una función definida como una suma de una serie de potencias a lo largo de una trayectoria como la considerada en la proposición 22. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, donde $|z-z_0|<R$, siendo $R>0$ un cierto número. Se toma $0<r<R$ y se considera la trayectoria $C(z_0;r)$, recorrida en sentido positivo. Como es bien sabido, la serie es uniformemente convergente en la curva $C^*(z_0;r)$ (ver el teorema 4). Se puede pues integrar término a término, resultando (usando la proposición 21)

$$\int_{C(z_0;r)} f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{C(z_0;r)} (z-z_0)^n dz=0.$$

Más generalmente, tomando un entero $n\geq 0$, se tiene

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{p=0}^{\infty} a_p(z-z_0)^{p-n-1},$$

siendo la convergencia todavía uniforme en $C^*(z_0;r)$. Entonces, usando la proposición 22,

$$\int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{p=0}^{\infty} a_p \int_{C(z_0;r)} (z-z_0)^{p-n-1}dz=2\pi i a_n.$$

Se obtiene la siguiente

Proposición 23 *Con las condiciones anteriores,*

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Como consecuencia, se tiene el siguiente

Corolario 24 (Desigualdades de Cauchy) *Con las condiciones anteriores, y para $n=0,1,2,\ldots$, se tiene*

$$|a_n|\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{M(r)}{r^n},$$

donde $M(r):=\sup\{|f(z)|:\ \ |z-z_0|=r\}$.

1.7. Teorema de Cauchy

Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función continua definida en G. Se ha visto en la sección 1.6.2 que si f es la suma de una serie de potencias, la integral definida a lo largo de una circunferencia adecuada es cero. El resultado es cierto para cualquier función que sea la derivada de una función derivable compleja (es decir, que tenga una primitiva). Esto representa una especie de Teorema Fundamental del Cálculo (ver la proposición 21). Precisamente como consecuencia de esta proposición 21 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 25 *Sea F una función definida y derivable en un conjunto abierto $G \subset \mathbb{C}$ tal que la derivada F' sea continua. Entonces*

$$\int_\alpha F'(z)dz = 0.$$

Nota: como se ha dicho en una nota a la proposición 21, más adelante se verá que el requisito en la proposición 25 de que la derivada sea continua es superfluo.

El teorema siguiente asegura que lo mismo es cierto para cualquier función derivable compleja definida en ciertos conjuntos. Un conjunto G es *estrellado respecto a un punto* z_0 cuando, dado cualquier $a \in G$, el segmento rectilíneo $[z_0, a]$ está contenido en G.

Teorema 26 (Teorema de Cauchy) *Sea G un conjunto abierto estrellado en $\mathbb{C}$. Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable. Entonces*

1. *existe una función $F : G \to \mathbb{C}$ derivable, con $F' = f$.*
2. *Si α es una trayectoria cerrada y suave a trozos, con $\alpha^* \subset G$, entonces $\int_\alpha f = 0$.*

El siguiente resultado es una consecuencia del anterior:

Teorema 27 *Sea f derivable en el conjunto $G := \{z : \ |z - z_1| < r_1\} \cap \{z : |z - z_2| > r_2\}$ representado en la figura 1.4. Entonces, dadas dos circunferencias orientadas C_1 y C_2 como en la figura 1.4, se tiene*

$$\int_{C_1} f = \int_{C_2} f.$$

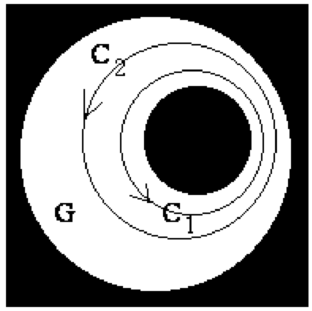

Figura 1.4: El conjunto G

Corolario 28

$$\int_{C(a;r)} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 2\pi i, & si\ |z_0 - a| < r, \\ 0 & si\ |z_0 - a| > r. \end{cases}$$

Nota. El corolario anterior es una consecuencia del teorema 27 y de la proposición 22.

Teorema 29 (Fórmula Integral de Cauchy) *Sea f derivable en $B(z_0; R)$. Sea $0 < r < R$. Entonces, dado $z \in B(z_0; r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Este resultado afirma, entre otras cosas, que los valores de una función derivable en el interior de un disco son conocidos en cuanto se conoce el comportamiento de la función en la frontera del disco. Esto no es cierto para funciones reales.

Como caso particular, tómese $z = z_0$ en el teorema 29. Resulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\xi}{\xi - z_0} d\xi.$$

Parametrizando $C(z_0; r)$ mediante la función $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\alpha(t) := z_0 + re^{it}$ resulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

lo que expresa el hecho de que, en cierta forma muy precisa, el valor de una función derivable en un disco en su centro es la *media* de los valores que toma en la frontera del disco.

1.8. Consecuencias del Teorema de Cauchy

1.8.1. Funciones derivables y series de potencias

Teorema 30 *Sea f derivable en $B(z_0; R)$. Entonces hay una única serie de potencias, convergente en $B(z_0; R)$, tal que*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in B(z_0; R).$$

Este teorema asegura que toda función f derivable en un abierto es, *localmente, una serie de potencias* (es decir, lo que hemos llamado *representable en serie de potencias* (ver la definición 9)). Esto no es verdad para funciones reales. Obviamente, el recíproco es cierto: una serie de potencias es una función derivable en el interior de su disco de convergencia (ver el teorema 10).

Nota. Como $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $B(z_0; R)$, se tiene, usando la proposición 23, que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \geq 0, \quad 0 < r < R.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que una función derivable es localmente una serie de potencias (teorema 30), y de que una serie de potencias tiene todas las derivadas (corolario 11).

Corolario 31 *Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ derivable. Entonces f tiene todas las derivadas de cualquier orden en G.*

Además

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

si f es derivable en $B(z_0; R)$ y $0 < r < R$.

Notas.

1. Sea z_0 un punto en G (abierto), $f : G \to \mathbb{C}$ derivable, con $f(z_0) = 0$. Entonces, en un disco $B(z_0; r) \subset G$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Luego $a_0 = 0$. Se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall \ z \in B(z_0; r),$$

para un cierto $p \geq 1$. Se dice, si $a_p \neq 0$, que z_0 es un *cero de orden* p de la función f. Por ejemplo, si $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, entonces z_0 es un cero de orden 1 (también se dice que es un *cero simple*). Si $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, se dice que z_0 es un cero de orden 2 o un *cero doble*, etc...

2. Como consecuencia del teorema 13, se tiene que dadas dos funciones f y g definidas y derivables en un conjunto abierto y no vacío G, y dada una sucesión $z_1, z_2, ...$ en G que converge a un punto $z_0 \in G$, con $z_n \neq z_0$, $\forall\, n$, si se tiene $f(z_n) = g(z_n)$, $\forall\, n$ y si G es conexo, entonces resulta que $f = g$ en G.

   Una consecuencia inmediata es que si G es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, y $f : G \to \mathbb{C}$ es derivable y no constante en G, dado $a \in G$ y dado $\lambda \in \mathbb{C}$, existe un $r(a) > 0$ con $f(z) \neq \lambda$, $\forall\, z \in B'(a, r(a))$. En particular, si $A \subset G$ es cerrado y acotado, $\{z \in A : f(z) = \lambda\}$ es finito, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

3. Observar las siguientes afirmaciones realizadas acerca de una función $f : G \to \mathbb{C}$, donde G es un abierto estrellado no vacío en $\mathbb{C}$:

   a) f es derivable en todo punto de G.

   b) f es continua y $\int_T f(z)dz = 0$ para todo triángulo T tal que T y su interior estén contenidos en G (ver el teorema 37).

   c) f es la derivada de una función $F : G \to \mathbb{C}$.

   Se tiene $(a) \Rightarrow (b)$, como se demostró en el Teorema de Cauchy (teorema 26). La afirmación $(b) \Rightarrow (c)$ está también contenida en el Teorema de Cauchy. Por otra parte, se ha demostrado en el corolario 31 que si una función es derivable en un conjunto abierto, entonces tiene todas las derivadas sucesivas. Por tanto, $(c) \Rightarrow (a)$, y resulta que todas las afirmaciones son equivalentes en un abierto G como el indicado.

1.8.2. Funciones enteras y polinomiales

Definición 32 *Si f es una función derivable en todo el plano complejo, entonces f se llama una función* entera.

Teorema 33 (Teorema de Liouville) *Sea f una función entera. Supongamos que $f(z)/z \to 0$ cuando $z \to \infty$ (en particular, esto ocurre si f es acotada en $\mathbb{C}$). Entonces f es constante.*

El resultado es una consecuencia de la acotación dada en el corolario 24 para los coeficientes de la serie de potencias $\sum a_n z^n$ que coincide con f.

Una consecuencia importante es el llamado *Teorema Fundamental del Algebra*:

Teorema 34 (Teorema Fundamental del Algebra) *Sea p un polinomio complejo. Entonces p tiene ceros si no es constante.*

Basta con considerar lo que ocurriría si p no tuviera ceros: $f(z) = 1/p(z)$ sería una función entera. Además, $f(z)/z \to 0$ cuando $z \to \infty$. Luego f sería constante, debido al teorema 33, así que p sería también constante.

Es inmediato ahora que que si p tiene grado n, tiene exactamente n ceros (contados cada uno de ellos tantas veces como indica su orden de multiplicidad).

1.8.3. El Teorema del Módulo Máximo

Una función derivable no constante tiene un módulo que no puede presentar máximos locales.

Teorema 35 *Sea f un función derivable y no constante en $B(a;R)$. Entonces $\exists\ z \in B(a;R)$ con $|f(z)| > |f(a)|$.*

Corolario 36 *Sea f derivable en un subconjunto abierto y no vacío $G \subset \mathbb{C}$. Sea $A \subset G$ un subconjunto cerrado y acotado. Entonces $|f|$ alcanza el supremo en la frontera de A.*

1.8.4. El teorema de Morera

Teorema 37 *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función continua, donde D es un conjunto abierto. Si $\int_T f(z)dz = 0$ para cualquier triángulo $T \subset G$, entonces f es derivable en G.*

Una consecuencia importante es el siguiente

Teorema 38 *Sea G un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones derivables de G en $\mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset G$. Entonces f es derivable en G y $f_n' \to f'$ uniformemente en cada K.*

1.9. Singularidades

Definición 39 *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y no vacío, y sea $z_0 \in G$. Sea $f : G' \to \mathbb{C}$ una función definida en el conjunto $G' \equiv G \setminus \{z_0\}$. Si f es derivable en G', pero no hay una función F derivable que coincida en G' con f, se dice que f tiene una* singularidad *en z_0.*

A veces se amplía la definición diciendo que f tiene una singularidad en z_0 cuando f es derivable en G'.

El siguiente resultado extiende el Teorema 30.

Teorema 40 *Sea f derivable en $B'(z_0; R) \equiv B(z_0; R)\backslash\{z_0\}$ (para un $R > 0$). Entonces existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ con*

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in B'(z_0; R) \quad ({}^8).$$

Además

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \ \forall n$$

donde $0 < r < R$.

Una serie de este tipo se llama *Serie de Laurent* de f en $B'(z_0; R)$.

Todavía se tiene $|a_n| \leq M(r)/r^n$, $\forall n$, con el significado de $M(r) := \sup\{|f(z)| : \ |z - z_0| = r\}$ (ver las desigualdades de Cauchy en el corolario 24). Se llama *parte principal* de la serie de Laurent a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$.

El teorema 40 es válido si f es derivable en una corona $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, donde $0 < r_1 < r_2$. Ahora, $r_1 < r < r_2$.

[8] La convergencia de una serie de Laurent del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en un punto $z \neq z_0$ a un valor $f(z)$ debe entenderse de la siguiente forma: dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $N \in I\!\!N$ de modo que, si $n, m \geq N$, entonces

$$\left| \sum_{k=-n}^{m} a_k (z - z_0)^k - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Definición 41 *Si en la anterior serie se tiene que $a_n \neq 0$ para infinitos $n < 0$, se dice que z_0 es una singularidad esencial. Si no, el mínimo $n \in \mathbb{Z}$ con $a_n \neq 0$ se llama* orden de f en z_0, *denotado $ord(f, z_0)$. Si $ord(f, z_0) < 0$, z_0 es un* polo *de orden $-ord(f, z_0)$. Si $ord(f, z_0) \geq 0$, z_0 es una* singularidad evitable *y se puede extender f a una función derivable en $B(z_0; R)$.*

Proposición 42 *Si f, g son funciones con una singularidad de orden finito en z_0, resulta que:*

(1) $ord(fg, z_0) = ord(f, z_0) + ord(g, z_0)$

(2) $ord(1/f, z_0) = -ord(f, z_0)$

(3) Si $ord(f, z_0) < ord(g, z_0) \rightarrow ord(f + g, z_0) = ord(f, z_0)$.

Proposición 43 *Si f tiene una singularidad esencial en z_0 y g tiene un orden finito en z_0, entonces $f + g$ y $f.g$, tienen singularidades esenciales en z_0.*

Es muy interesante que cada tipo de singularidad z_0 obliga a un comportamiento distinto de la función f en un entorno de z_0. Precisamente se tiene (el último resultado en la siguiente proposición se debe a Casorati y Weierstrass):

Proposición 44 *Sea f una función definida y derivable en un conjunto $B'(z_0; R)$ para cierto $R > 0$. Entonces*

1. *f tiene una singularidad evitable en z_0 si y solamente si está acotada en un entorno de z_0.*

2. *f tiene un polo en z_0 si y solamente si $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$. Más precisamente, se puede cuantificar el comportamiento asintótico de f cuando z se acerca a z_0: se tiene $ord(f; z_0) = n$ si y solamente si existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que*
$$\alpha |z - z_0|^n \leq |f(z)| \leq \beta |z - z_0|^n, \ \forall \ 0 < |z - z_0| < R.$$

3. *f tiene en z_0 una singularidad esencial si y solamente si f está arbitrariamente cerca, en cada entorno de z_0, de cualquier número complejo.*

1.10. Teorema del Residuo

Definición 45 *Sea* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)$*, en* $0 < |z - z_0| < R$*. El coeficiente* a_{-1} *se llama* residuo de f en z_0 *, y se denota* $Res(f, z_0)$*.*

Notar que, si $0 < r < R$,

$$\int_{C(z_0;r)} f(z)dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res(f, z_0)$$

Definición 46 *Dada una trayectoria rectificable cerrada* α*, sea* $z \notin \alpha^*$*. Se llama* índice *de* α *respecto a* z *a*

$$Ind(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{1}{(\xi - z)} d\xi$$

Una trayectoria α es *simple* cuando $Ind(\alpha, z) \in \{0, 1\}$, $\forall z \notin \alpha*$. Intuitivamente, $Ind(\alpha, z)$ denota el número de vueltas que da α en torno a z.

Teorema 47 (Teorema del Residuo) *Sea* G *un conjunto abierto estrellado y* α *una trayectoria suave a trozos cerrada, con* $\alpha^* \subset G$*,* $f : G \setminus F \to \mathbb{C}$ *derivable, con* $F = \{z_1, z_2, ..., z_n\} \subset G \setminus \alpha^*$*, entonces*

$$\int_\alpha f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j) Ind(\alpha, z_j).$$

Es una generalización del Teorema de Cauchy (teorema 26).

1.10.1. Cálculo de residuos

Se proporcionan algunas técnicas para calcular residuos en polos:

Proposición 48 *Sea* z_0 *un polo de* f*. Si* $ord(f, z_0) = -1$*, entonces* $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$*.*

Corolario 49 *Si* $ord(f, z_0) = -1$*,* $ord(g, z_0) = 0$*, entonces* $Res(fg, z_0) = g(z_0) Res(f, z_0)$*.*

Corolario 50 *Si* $ord(f, z_0) = 0$ *y* $ord(g, z_0) = 1$*, entonces*

$$Res(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Proposición 51 *Si* $ord(f, z_0) = -k$ *(para un cierto* $k \in N$*), entonces*

$$Res(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

donde $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$.

1.11. Aplicaciones

1.11.1. Aplicaciones geométricas (transformaciones conformes)

Las aplicaciones geométricas más importantes provienen del hecho de que las funciones complejas derivables preservan los ángulos en los puntos donde la derivada no es cero.

Dada una trayectoria suave $\phi :]a, b[\to \mathbb{C}$, y dado un punto $a < c < b$, existe $\phi'(c)$ y, si no es cero, representa un vector tangente a la curva ϕ^* en el punto $z_0 := \phi(c)$. Se tomará en ese caso como orientación de la recta tangente a la curva en ese punto la proporcionada por el vector $\phi'(c)$.

Una transformación F de un subconjunto abierto no vacío $G \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se dice que es *conforme* en un punto $z_0 \in G$ cuando preserva los ángulos y su orientación en z_0. Precisamente, si dadas dos curvas ϕ y ψ suaves en G que se cortan en $\phi(0) = \psi(0) = z_0 \in G$, con derivadas no nulas en 0, formando sus tangentes orientadas un ángulo α, entonces las imágenes de las curvas mediante la transformación F tienen tangentes orientadas en $F(z_0)$ que forman el mismo ángulo.

Teorema 52 *Sea* $f : G \to \mathbb{C}$ *una función derivable. Entonces* f *es una transformación conforme en todos aquellos puntos* $z_0 \in G$ *donde* $f'(z_0) \neq 0$.

Notas:

1. Por el Teorema de la Función Inversa, si $f'(z_0) \neq 0$ existe un entorno abierto $N(z_0)$ de z_0 de modo que $N(f(z_0)) := f[N(z_0)]$ es un entorno abierto de $f(z_0)$ y la función f es inyectiva, con inversa continua $f^{-1} : N(f(z_0)) \to N(z_0)$. Además, la inversa es derivable en $N(f(z_0)$, con derivada $(f^{-1})'[f(z_0)] = [f'(z_0)]^{-1}$, luego esta inversa es también una transformación conforme en el punto $f(z_0)$.

2. Toda transformación conforme en un dominio simplemente conexo está dada por una función derivable en ese dominio.

3. La condición $f'(z_0) \neq 0$ no se puede eliminar en el teorema 52; para verlo considerar la función derivable $f(z) := z^2$ y el punto $z_0 = 0$. Las dos curvas $\phi(t) := te^{i\alpha}$, $\psi(t) := te^{i\beta}$, $t \in [-1, 1]$, α y β dos números reales, se cortan en 0 formando un ángulo $\beta - \alpha$. Sin embargo, sus imágenes se cortan en 0 formando un ángulo $2(\beta - \alpha)$.

A continuación listamos algunos ejemplos de transformaciones conformes (o de aplicaciones que en ciertos puntos son conformes).

1. *Translaciones*. La función $f(z) := z + z_0$, donde z_0 es un punto dado previamente, es una translación. Es, obviamente, una aplicación conforme en cada punto del plano complejo, lo que también se deduce del teorema 52. Observar que f es inyectiva y transforma $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, es decir, es una función entera.

2. *Giros y homotecias*. Fijado $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se define $f(z) := \alpha z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. De nuevo por el teorema 52 es una transformación conforme en todo punto. Transforma $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ y es, por tanto, una función entera. Geométricamente representa un giro seguido de una homotecia, precisamente un giro de ángulo $Arg(\alpha)$ y una homotecia con factor $|\alpha|$, por lo que si $|\alpha| < 1$ se trata de una contracción, mientras que si $|\alpha| > 1$ es una dilatación.

3. *Transformación lineal entera general*. Se trata de la función $f(z) := \alpha z + \beta$, donde α y β son constantes complejas, con $\alpha \neq 0$. Como $f'(z) = \alpha$ es conforme en todo punto. Observar que f es la composición de un giro y una homotecia seguida de una translación. Así, se trata de una función entera, y es inyectiva transformando $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$.

4. *Inversión*. Se trata de la función $f(z) = 1/z$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es conforme, de acuerdo con el teorema 52, en todo punto de su dominio. Transforma $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, de forma inyectiva. Observar que f tiene como función inversa a ella misma.

5. *Transformaciones de Möbius*. Las transformaciones conformes más interesantes están dadas por las llamadas *transformaciones lineales frac-*

cionales generales, o *transformaciones de Möbius*, de las cuales las anteriores son casos particulares:

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \; z \neq -\frac{d}{c}, \; bc - ad \neq 0.$$

Están definidas en $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ y tienen como imagen $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Como

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2}$$

se exige que $ac - bd \neq 0$ (en otro caso f es una función constante). Son funciones inyectivas.

Hay una forma de representar el plano complejo como un subconjunto de una esfera en $\mathbb{R}^3$ (la llamada *esfera de Riemann*). Para ello se considera una aplicación como la descrita en la figura 1.5. Al polo norte de la esfera corresponde el llamado *punto del infinito* denotado por ∞. Así, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado*, denotado por $\overline{\mathbb{C}}$, y corresponde a la superficie de la esfera.

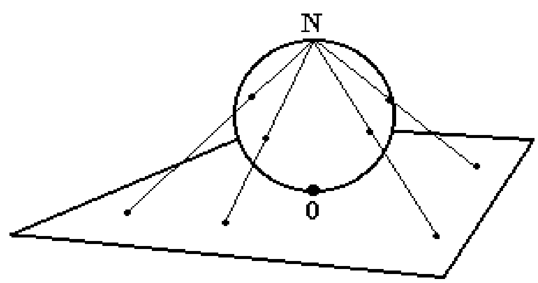

Figura 1.5: La esfera de Riemann

Si se considera que el punto del infinito se transforma en a/c y que el punto $-d/c$ se convierte en el punto del infinito, se obtiene una transformación biyectiva del plano complejo ampliado en sí mismo.

Son composiciones $f = k \circ h \circ g$ de tres tipos básicos de transformaciones, descritas anteriormente: precisamente $g(z) = cz+d$, $h(z) = 1/z$, $k(z) = (a/c) + [(bc-ad)/c]z$. Si se acepta que existe un punto ∞ que se adjunta al plano complejo para obtener el *plano complejo ampliado*[9], se puede considerar que f transforma $-d/c$ en ∞ y que, inversamente, f transforma ∞ en a/c. Así f es ahora una biyección de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$. Por otra parte, si se considera que una recta en $\mathbb{C}$ es una circunferencia de radio $+\infty$, las transformaciones de Möbius convierten circunferencias en circunferencias. Las inversas de las transformaciones de Möbius son también del mismo tipo.

Dados cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3 y z_4 en el plano complejo, se llama *razón doble* de los mismos a la expresión

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Las transformaciones de Möbius tienen la propiedad de conservar la razón doble de cuatro puntos distintos cualesquiera. Ello permite obtener con facilidad la expresión analítica de una transformación de Möbius si se conoce la imagen de tres puntos distintos del plano complejo.

Una transformación de Möbius particular es la siguiente: Sea a un punto de $\mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$. Se considera la aplicación

$$\phi_a(z) := \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \ z \in \mathbb{C}, \ z \neq \frac{1}{\overline{a}}.$$

Está bien definida en un conjunto abierto que contiene a $\overline{B}(0;1)$. Además, es fácil demostrar que ϕ_a transforma la circunferencia unidad $C(0;1)$ en sí misma. Una aplicación sencilla del Principio del Módulo Máximo (ver el corolario 36) prueba que ϕ_a transforma $B(0;1)$ sobre $B(0;1)$. Así, ϕ_a es una función derivable e inyectiva definida en un conjunto abierto que contiene a $\overline{B}(0;1)$ y que transforma el disco cerrado $\overline{B}(0;1)$ en sí mismo, llevando el punto a al punto 0. Es posible demostrar que toda función derivable con estas propiedades es el resultado de hacer una transformación del tipo ϕ_a seguida de un giro.

Ejercicios

1. *Estudiar la transformación de Möbius*

$$f(z) := e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z},$$

[9] Esta operación tiene una interpretación geométrica clara: se toma una esfera S como en la figura 1.5 y se define una aplicación P de $S \setminus \{N\}$ sobre $\mathbb{C}$. Al *polo norte* N se le hace corresponder ∞. Así, S es un modelo del plano complejo ampliado.

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $|z_0| < 1$ *están dados.*

Solución: Con las notaciones usadas en este apartado, $a = e^{i\alpha}$, $b = -e^{i\alpha}z_0$, $c = -\overline{z}_0$, $d = 1$, con lo que $ad-bc = e^{i\alpha}[1-|z|^2] \neq 0$, y así f no es constante. Por otra parte, si $z \in B(0;1)$ (la bola cerrada de centro 0 y radio 1),

$$|f(z)| = \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right| \leq 1. \tag{1.1}$$

Esto es sencillo, pues se tiene

$$\begin{aligned}
&|z-z_0| \leq |1-\overline{z}_0 z| \Leftrightarrow |z-z_0|^2 \leq |1-\overline{z}_0 z|^2 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0) \leq (1-\overline{z}_0 z)(1-z_0\overline{z}) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow |z|^2 - z\overline{z}_0 - z_0\overline{z} + |z_0|^2 \leq 1 - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z + |z_0|^2|z|^2 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow |z|^2 + |z_0|^2 \leq 1 + |z_0|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2[1-|z_0|^2] \leq 1-|z_0|^2 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1,
\end{aligned}$$

lo que es cierto siempre que $|z_0| < 1$ y $|z| \leq 1$. Se deduce que f transforma $B(0,1)$ en $B(0,1)$. Como toda transformación de Möbius es inyectiva. Notar también que $f(z_0) = 0$. Sea ahora $f(z) = w$. Se obtiene inmediatamente que

$$z = \frac{w + e^{i\alpha}z_0}{\overline{z}_0 w + e^{i\alpha}}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
&|w + e^{i\alpha}z_0|^2 \leq |\overline{z}_0 w + e^{i\alpha}|^2 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (w + e^{i\alpha}z_0)(\overline{w} + e^{-i\alpha}\overline{z}_0) \leq (\overline{z}_0 w + e^{i\alpha})(z_0\overline{w} + e^{-i\alpha}) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow |w|^2 + we^{-i\alpha}\overline{z}_0 + e^{i\alpha}z_0\overline{w} + |z_0|^2 \leq |z_0|^2|w|^2 + \overline{z}_0 we^{-i\alpha} + e^{i\alpha}z_0\overline{w} + 1 \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow |w|^2 + |z_0|^2 \leq 1 + |z_0|^2|w|^2.
\end{aligned}$$

Como antes, esto es cierto cuando $|w| \leq 1$. Resulta que la transformación inversa f^{-1} verifica $f^{-1}[B(0,1)] \subset B(0,1)$. Se obtiene pues

$$f[B(0,1)] = B(0,1).$$

Del cálculo realizado en (1.1) se obtiene, además, que $f[C(0,1)] = C(0,1)$.

1.11.2. Aplicaciones a la teoría de flujos

Sea $\mathbf{V} = (u(x,y), -v(x,y))$ el campo de velocidades de un movimiento de fluido plano independiente del tiempo en un dominio D. Se supone que el flujo es irrotacional ($rot\mathbf{V} = \mathbf{0}$) e incompresible ($div\mathbf{V} = 0$).

Si se considera un punto (x,y) del plano complejo y un rectángulo como en la figura 1.6,

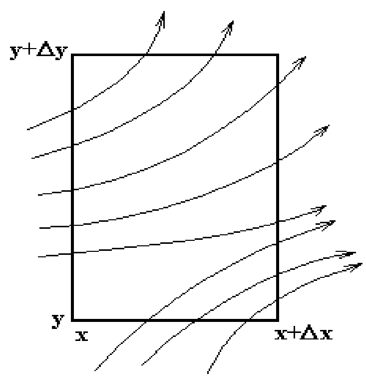

Figura 1.6: El flujo que atraviesa un rectángulo

se exige por una parte que la cantidad de fluido que "entra.en el rectángulo coincida con la que abandona el mismo (es decir, el fluido es *incompresible*). Esta cantidad está medida por el *flujo* que atraviesa cada uno de los lados, dado por la componente normal de la velocidad. Se obtiene inmediatamente

$$\int_y^{y+\Delta y} [u(x+\Delta x, \eta) - u(x,\eta)]d\eta - \int_x^{x+\Delta x} [v(\xi, y+\Delta y) - v(\xi, y)]d\xi = 0.$$

Utilizando el Teorema del Valor Medio y dividiendo por $\Delta x \Delta y$, resulta

$$\frac{1}{\Delta y}\int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial u}{\partial x}(\hat{x}, \eta)d\eta - \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \hat{y})d\xi = 0,$$

donde $\hat{()}$ denota un punto intermedio. Haciendo Δx y Δy tender a cero, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Por otra parte la *circulación* (es decir, la componente tangencial de la velocidad a lo largo de un circuito cerrado) del campo de velocidades es cero (se dice que el fluido es *irrotacional*). Aplicando esto a nuestro rectángulo resulta

$$-\int_{y}^{y+\Delta y}[v(x+\Delta x,\eta)-v(x,\eta)]d\eta+\int_{x}^{x+\Delta x}[u(\xi,y)-v(\xi,y+\Delta y)]d\xi=0.$$

De la misma forma que antes, aplicando el Teorema del Valor Medio, dividiendo por $\Delta x\Delta y$ y haciendo Δx y Δy tender a cero, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

que son precisamente las Ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función $f(z)=u+iv$ (ver el teorema 6). Por tanto, f es derivable como función de variable compleja si y solamente si el flujo $\mathbf{V}$ es irrotacional e incompresible. En una región donde se verifica el Teorema de Cauchy (ver el teorema 26) f tiene una primitiva $F=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$. Resulta $\frac{\partial\phi}{\partial x}=u$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=-v$, con lo que *grad* $\phi=\mathbf{V}$. La función ϕ se llama el *potencial de velocidad* y F se llama el *potencial de velocidad complejo*. Así, la conjugada de la derivada del potencial de velocidad complejo es el vector velocidad, es decir, $\overline{F}\,'=V$. Las líneas $\phi(x,y)$ =constante se llaman *líneas equipotenciales*, mientras que las líneas $\psi(x,y)$ =constante se llaman *líneas de corriente*.

1.11.3. Aplicaciones a la ecuación de Laplace. Funciones armónicas

Se ha indicado que las partes real e imaginaria de una función compleja derivable son funciones armónicas, es decir, son soluciones de la ecuación de Laplace con segundas derivadas continuas(ver la definición 7 y la nota que le sigue). Además, si una función armónica se compone con una función derivable, el resultado sigue siendo una función armónica (ver el teorema 53. Estas observaciones, junto con las propiedades geométricas de las funciones derivables, hacen que la teoría de variable compleja sea especialmente importante en la resolución del problema de Dirichlet y la ecuación de Laplace.

Se tiene el siguiente

Teorema 53 *Sea $f : G \to D$ una función derivable, donde G y D son dominios no vacíos en $\mathbb{C}$. Sea $h : D \to I\!R$ una función armónica. Entonces $h \circ f$ es una función armónica.*

Por tanto, si se trata de resolver la ecuación de Laplace en un cierto dominio D, puede realizarse una transformación de D mediante una función derivable f de modo que el nuevo dominio G sea más sencillo, y resolver el problema en él, para posteriormente obtener la solución buscada en D mediante composición con la función inversa de f.

1.11.4. Aplicaciones al problema de Dirichlet

Dado un dominio simplemente conexo no vacío $D \subset \mathbb{C}$, acotado por una curva C cerrada simple y suave a trozos, se trata de encontrar una función armónica $u : D \to I\!R$ que coincida con una función dada h definida en C (si la función h es continua a trozos en C, se exigirá que u coincida con h tan sólo en los puntos de continuidad).

La resolución de un problema de este tipo se realiza mediante la obtención de una transformación conforme F que convierta el dominio D en $B(0;1)$, y la utilización de la integral de Poisson para ese dominio transformado y para la función $h \circ F$ en su frontera. La fórmula integral de Poisson es, en coordenadas polares,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)h(\alpha)}{1+r^2-2r\cos(\alpha-\theta)}d\alpha.$$

Esta función se obtiene como resultado de aplicar técnicas de separación de variables a una ecuación en derivadas parciales (ver el apartado 3.5.4).

Las técnicas de variable compleja se pueden utilizar para resolver este problema en un semiplano. Si se trata de otro dominio D, se buscará una transformación conforme que convierta D en el semiplano. Se resolverá el problema en este último y se aplicará la transformación inversa. La validez del procedimiento depende del teorema 53.

Para motivar el tipo de fórmula que aparece, considerar los siguientes ejemplos, cada vez más generales:

1. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = 0$ si $x > 0$, $u(x,0) = \pi$ si $x < 0$.* La solución es $u(x,y) = Arg_0(z)$, donde $z = (x,y) \in \mathbb{C}$.

2. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = 0$ si $x > 0$, $u(x,0) = h$ si $x < 0$.* La solución es $u(x,y) = (h/\pi)Arg_0(z)$.

3. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = h$ si $x > 0$, $u(x,0) = 0$ si $x < 0$.* La solución es
$$u(x,y) = h\left(1 - \frac{Arg_0(z)}{\pi}\right).$$

4. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = h$ si $x > x_1$, $u(x,0) = 0$ si $x < x_1$.* La solución es
$$u(x,y) = h\left(1 - \frac{Arg_0(z - z_1)}{\pi}\right),$$
donde $z_1 = (x_1, 0)$.

5. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = 0$ si $x < x_1$, $u(x,0) = h$ si $x_1 < x < x_2$, $u(x,0) = 0$ si $x > x_2$.* La solución es
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \\ &= h\left(1 - \frac{Arg_0(z - z_1)}{\pi}\right) - h\left(1 - \frac{Arg_0(z - z_2)}{\pi}\right) = \\ &= \frac{h}{\pi} Arg_0 \frac{z - z_2}{z - z_1}. \end{aligned}$$
donde $z_k = (x_k, 0)$, $k = 1, 2$.

6. *Una función u armónica en $y > 0$, $u(x,0) = h_0$ si $x < x_0$, $u(x,0) = h_1$ si $x_0 < x < x_1$, $u(x,0) = h_2$ si $x_1 < x < x_2$, ..., $u(x,0) = h_n$ si $x_{n-1} < x < x_n$, $u(x,0) = h_{n+1}$ si $x > x_n$.* La solución es
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \\ &= \frac{1}{\pi}\left[h_0 Arg_0(z - z_0) + h_1 Arg_0 \frac{z - z_1}{z - z_0} + \dots\right. \\ &\quad \left.\dots + h_n Arg_0 \frac{z - z_n}{z - z_{n-1}} + h_{n+1}[\pi - Arg_0(z - z_n)]\right]. \end{aligned}$$
donde $z_k = (x_k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Denotando
$$g(t) := Arg_0(z - (t + 0i)) = \arctan \frac{y}{x - t},$$

las funciones armónicas buscadas son (usando el Teorema del Valor Medio) de la forma

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \\ & \frac{1}{\pi} \{h_1[g(t_1) - g(t_0)] + \ldots + h_n[g(t_n) - g(t_{n-1})]\} = \\ & = \{h(t_1)g'(t_1^*)\Delta t_1 + \ldots + h(t_n)g'(t_n^*)\Delta t_n\}, \end{aligned}$$

donde t_k^* son puntos intermedios en los intervalos considerados. Teniendo en cuenta que

$$g'(t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$$

el caso continuo (h es una función definida en el eje real) viene resuelto por la fórmula

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt, \tag{1.2}$$

integral que converge cuando h es continua a trozos y acotada. Ésta es la *Fórmula Integral de Poisson en un semiplano.*

La posibilidad de encontrar una transformación conforme apropiada se basa en el siguiente

Teorema 54 *Sea D un dominio simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$. Entonces existe una transformación conforme inyectiva F de D sobre $B(0;1)$. Además, si D está limitada por una curva cerrada simple C, la transformación puede definirse en C de modo que $F : D \cup C \to \overline{B}(0;1)$ siga siendo continua e inyectiva.*

1.11.5. La ecuación de Poisson

Se trata de una generalización del problema de Dirichlet. Como antes, se busca una función u en un dominio D que coincida con una función dada h en su frontera C, y que verifique en D la *ecuación de Poisson*, una generalización de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y),$$

donde g es una función dada en D. De nuevo, una transformación conforme adecuada puede simplificar el problema.

1.11.6. Cálculo de integrales reales mediante residuos

La idea es sencilla: supongamos que se trata de calcular la integral de una función de variable real, digamos $\int_a^b f(x)dx$, donde a y b son números reales o incluso $-\infty$ y/o $+\infty$. Se considera una función F de variable compleja de modo que la restricción al eje real coincida con f. Se traza una trayectoria (en general, cerrada) en $\mathbb{C}$, digamos $\phi = \phi_1 \cup \phi_2$, de modo que la parte ϕ_1 de esa trayectoria coincida con el segmento orientado $[a \to b]$, y de modo que sean conocidos los dos valores

$$\int_\phi F(z)dz, \quad \int_{\phi_2} F(z)dz.$$

Entonces, como

$$\int_\phi F(z)dz = \int_{\phi_1} F(z)dz + \int_{\phi_2} F(z)dz = \int_a^b f(x)dx + \int_{\phi_2} F(z)dz,$$

se obtiene el valor de $\int_a^b f(x)dx$. La integral $\int_\phi F(z)dz$ se calcula mediante el teorema del residuo. Los resultados que se usarán son los siguientes:

Proposición 55 *Sea $f : \mathbb{C} \setminus F \to \mathbb{C}$ una función derivable, donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$ disjunto del eje real. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los elementos de F que están en el semiplano superior. Dados $M > 0$, $R > 0$, si*

$$|z^2 f(z)| \leq M, \ \textit{cuando} \ \mathrm{Im}(z) > 0, \ |z| > R,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res(f, a_j).$$

Lema 56 (Lema de Jordan) *Sea $f : \mathbb{C} \setminus F \to \mathbb{C}$ una función derivable, donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{C}$ disjunto del eje real. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los elementos de F que están en el semiplano superior. Se supone que $f(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$, siendo $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} res(g, a_j),$$

donde $g(z) := f(z).e^{iaz}$.

Proposición 57 *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable definida en un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{C}$. Sea $a \in G$ un polo simple de f, y sea $\rho := res(f, a)$. Se considera una trayectoria ϕ_r como la representada en la figura 1.7. Entonces,*

$$\int_{\phi_r} f(z)\ dz \xrightarrow{r \to 0} i\rho(\beta - \alpha).$$

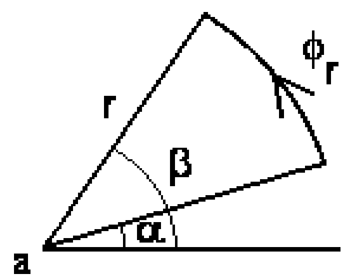

Figura 1.7: La trayectoria del lema

Capítulo 2
Análisis de Fourier

2.1. Algunos resultados sobre integrales

2.1.1. Concepto de integral de Riemann

Definición 58 *Sea $f : [a,b] \to I\!R$ una función definida y acotada en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ en $I\!R$. Se dice que f es* integrable Riemann en $[a,b]$ *cuando dado $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_0$ de $[a,b]$ (es decir, una familia finita de puntos de este intervalo, $P_0 := \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$) de modo que si $\mathcal{P}$ es una particición más fina (es decir, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$) se tiene $S - s < \epsilon$, donde*

$$S := \sum_{k=0}^{n} S_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$S_i := \sup\{f(t) : \ t \in [x_{i-1}, x_i]\}, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

$$s := \sum_{k=0}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$s_i := \text{ínf}\{f(t) : \ t \in [x_{i-1}, x_i]\}, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

En ese caso, se define $\int_a^b f(x)dx$ como el ínfimo de los valores S, que coincide con el supremo de los valores s.

Se extiende la anterior definición a la clase de funciones acotadas definidas en $[a,b]$ y que toman valores reales o complejos, sin más que tratar las partes real e imaginaria de f independientemente, y escribir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx.$$

La clase de las funciones integrables Riemann en $[a,b]$ con valores reales o complejos se denota por $\mathcal{R}[a,b]$.

Notas:

1. La teoría de Riemann integra sólo funciones acotadas en intervalos acotados. En algunos casos se requiere extender esta teoría a funciones no acotadas, o a funciones definidas en intervalos no acotados. Esto lo haremos en el apartado 2.1.4.

El siguiente concepto permite precisar lo que se entiende al decir que ciertos subconjuntos de la recta real son "despreciables"para la teoría de integración:

Definición 59 *Un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ se dice que es* nulo *cuando dado $\epsilon > 0$ arbitrario se puede encontrar una sucesión (I_n) de subintervalos de $\mathbb{R}$, cada uno de ellos de longitud finita $l(I_n)$, de modo que*

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon.$$

Notas:

1. El conjunto vacío es, obviamente, nulo.
2. Todo conjunto finito es nulo.
3. La unión numerable de conjuntos nulos es un conjunto nulo. En particular, todo conjunto numerable es nulo.

Un resultado muy importante debido a H. Lebesgue precisa exactamente las funciones que son integrables Riemann: para formularlo correctamente necesitamos considerar el conjunto de puntos C donde una función f es continua, y su complementario, el conjunto de puntos D donde es discontinua. El resultado de Lebesgue es el siguiente

Teorema 60 (Criterio de Lebesgue de integración Riemann) *Sea*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

una función acotada. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solamente si el conjunto D es nulo.

Notas:

1. Según el criterio de Lebesgue, si una función f tiene un conjunto numerable de puntos de discontinuidad entonces es integrable Riemann. En particular, esto ocurre cuando f tiene un conjunto finito de puntos de discontinuidad. Así, toda función continua en $[a,b]$ es integrable Riemann (observar que f es automáticamente acotada).

2.1.2. Teoremas de convergencia

Teorema 61 *Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{R}[a,b]$ que converge uniformemente (es decir, en $\|\cdot\|_\infty$, donde $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}$) a $f : [a,b] \to I\!R$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$, y si se define*

$$g_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt, \ g(x) := \int_a^x f(t)dt, \ x \in [a,b], \ n \in I\!N,$$

se tiene que g_n converge uniformemente a g en $[a,b]$. En particular,

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt, \ \textit{cuando } n \to \infty.$$

Teorema 62 *Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{R}[a,b]$ que converge puntualmente a $f \in \mathcal{R}[a,b]$, y tal que sea uniformemente acotada (es decir, acotada en $\|\cdot\|_\infty$). Entonces*

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt, \ \textit{cuando } n \to \infty.$$

2.1.3. Integrales paramétricas

Muchas funciones del análisis matemático están definidas por integrales. Los siguientes resultados aseguran las buenas propiedades de estas funciones.

Teorema 63 (Continuidad) *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to I\!R$ una función continua. Sean $p : [c,d] \to [a,b]$ y $q : [c,d] \to [a,b]$ dos funciones continuas. Entonces*

$$F(y) := \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx, \ \forall y \in [c,d]$$

está bien definida y es una función continua.

Teorema 64 (Derivabilidad) *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to I\!R$ una función continua. Supongamos que exista $\partial f/\partial y$ y que sea una función continua en $[a,b] \times [c,d]$ (en los puntos de la frontera la derivada se define lateralmente). Sean $p : [c,d] \to [a,b]$ y $q : [c,d] \to [a,b]$ dos funciones con derivada en $[c,d]$ (en los extremos se entiende que las derivadas son laterales). Entonces*

$$F(y) := \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx, \ \forall y \in [c,d]$$

es derivable en $]c,d[$ y la derivada está dada por

$$F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f[q(y),y]q'(y) - f[p(y),y]p'(y).$$

Teorema 65 (Integrabilidad (Teorema de Fubini)) *Sea $f : [a,b]\times[c,d] \to I\!R$ una función continua. Se definen las funciones*

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)dx, \quad G(x) := \int_c^d f(x,y)dy, \ x \in [a,b], \ y \in [c,d].$$

Entonces $\int_a^b G(x)dx = \int_c^d F(x)dx$, es decir

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

2.1.4. Integrales impropias

La teoría de integración de Riemann se formula para funciones acotadas definidas en intervalos acotados. Es conveniente poder extender esta teoría a situaciones más generales (funciones quizás no acotadas o intervalos quizás no acotados).

Por ejemplo, se trata de asignar un sentido a una expresión como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, en principio no aceptada en la teoía clásica de Riemann. Estas expresiones se definen por paso al límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty,\ b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

en el caso de que el límite exista. Diremos en ese caso que $f \in \mathcal{R}(I\!R)$.

Si $f :]a,b] \to I\!R$ no está acotada, pero sí lo está en $[a+\delta, b]$ para todo $\delta > 0$, se define

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

Otras situaciones se tratan similarmente.

2.2. Series de Fourier

2.2.1. Algunas clases especiales de funciones

Definición 66 *Sea una función $f : [a,b] \to I\!R$. Se dice que f es* continua a trozos *si existe $P := \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, una partición del intervalo $[a,b]$, de forma que f sea continua en cada uno de los intervalos abiertos $]x_{i-1}, x_i[$, y si además existen (y son finitos) los límites laterales en los extremos.*

Definición 67 *Sea una función $f : [a,b] \to I\!R$. Se dice que f es* suave a trozos *si existe $P := \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, una partición del intervalo $[a,b]$, de modo que f sea continua en cada uno de los intervalos abiertos $]x_{i-1}, x_i[$ y en ellos exista la derivada, y si además existen (y son finitas) las derivadas laterales en los extremos de cada uno de los subintervalos.*

Definición 68 *Sea una función $f : [a,b] \to I\!R$. Se dice que f es* muy suave a trozos *si existe $P := \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, una partición del intervalo $[a,b]$, de modo que f sea suave a trozos para esa partición y en cada uno de los intervalos abiertos $]x_{i-1}, x_i[$ exista la segunda derivada, y si además existen (y son finitas) las segundas derivadas laterales en los extremos de cada uno de los subintervalos.*

Definición 69 *Sea f definida en $I\!R$ con valores en $I\!R$. Se dice que es* par *cuando $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in I\!R$. Se dice que es* impar *cuando $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in I\!R$.*

Definición 70 *Sea f definida en $I\!R$ con valores en $I\!R$. Se dice que f es* periódica de período p *cuando $f(x) = f(x+p)$, para todo $x \in I\!R$. A veces diremos simplemente que es $p-$*periódica.

Notas:

1. Toda función definida en $[0, \infty[$ se puede extender a una función par definida en $I\!R$ de forma natural.
2. Toda función definida en $[0, \infty[$ tal que $f(0) = 0$ se puede extender a una función impar definida en $I\!R$ de forma natural.
3. Toda función definida en un intervalo $[a, b[$ se puede extender a todo $I\!R$ de modo que sea $(b - a)-$periódica de forma natural.

Extenderemos los anteriores conceptos a la clase de funciones que toman valores complejos, sin más que aplicarlos a las partes real e imaginaria de la función. Obsérvese que no se trata de funciones de variable compleja, sino de variable real con valores complejos. Las integrales se calculan, como se ha dicho con anterioridad, integrando separadamente las partes real e imaginaria.

2.2.2. Sistemas ortonormales de funciones trigonométricas

Definición 71 *Si E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K de los números reales o de los complejos, un* producto interior*, también llamado* producto escalar*, en E, es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que a un par de vectores de E asocia un escalar, es decir, un elemento de K, y que tiene las siguientes propiedades, siendo x, y, z elementos de E, α, β elementos de K:*
1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4) Si $\langle x, x \rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

Definición 72 *Dado un espacio vectorial E y un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en él, se define una* norma *asociada al producto escalar $\|x\|_2 := \langle x, x \rangle^{1/2}$, donde la raíz cuadrada se toma positiva.*

Teorema 73 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si x e y son dos elementos de un espacio vectorial E en el que hay definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \tag{2.1}$$

Además, se tiene $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_2 \|y\|_2$ si y solamente si uno de los vectores es múltiplo del otro.

Definición 74 *Dos vectores x e y de un espacio vectorial E se dice que son* ortogonales *para un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en E cuando $\langle x, y \rangle = 0$. Un conjunto de vectores $S \subset E$ se dice que es* ortogonal *cuando los elementos de S son ortogonales dos a dos, y se dice que es* ortonormal *cuando, además de ser ortogonal, todos sus elementos tienen norma 1.*

Supongamos que en un espacio vectorial E con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y la norma asociada $\| \cdot \|_2$ se proporciona una sucesión (x_n) ortonormal. Se considera el subespacio vectorial F_n generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y se toma un vector $x \in E$ arbitrario. Se trata de encontrar el vector de F_n más próximo a x en $\| \cdot \|_2$.

Se tiene la siguiente

Proposición 75 *Dado un elemento cualquiera $y := \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \in F_n$, se tiene*

$$\|x - y\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} | \ b_k - \langle x, x_k \rangle|^2. \tag{2.2}$$

Como consecuencia, el elemento de F_n más próximo a x en la norma $\| \cdot \|_2$ es $s_n := \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k$, y se tiene

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2. \tag{2.3}$$

El coeficiente $\langle x, x_k \rangle$ se llama *$k-$ésimo coeficiente de Fourier de x en el sistema* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Una consecuencia inmediata de la ecuación (2.3) es que los coeficientes de Fourier de un vector arbitrario respecto a un sistema ortonormal verifican

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ n \in I\!N, \tag{2.4}$$

luego

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{2.5}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ es convergente en $\| \cdot \|_2$, a un elemento s que pertenece al espacio generado por la sucesión (x_n) y representa el elemento de este espacio más próximo a x. Este elemento s se llama la *Serie de Fourier* de x en el sistema (x_n).

Cuando se particulariza lo anterior a los espacios de funciones integrables se tiene

Definición 76 *Sea q una función integrable Riemann en $[a,b]$ con valores reales positivos. Se define un* producto escalar *en el espacio de las funciones integrables Riemann en $[a,b]$ como*

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}q(x)dx. \tag{2.6}$$

Así, se dice que dos funciones f y g integrables en $[a,b]$ y con valores reales o complejos son ortogonales respecto a la función q *en $[a,b]$ cuando lo son para el producto escalar dado en (2.6). La norma $\|\cdot\|_2$ introducida en la definición 72 toma ahora el aspecto*

$$\|f\|_2 := \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 q(x)dx\right)^{1/2}, \ \forall f \in \mathcal{R}[a,b].$$

Notas:

1. Estrictamente hablando, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ no es un producto escalar, ya que $\langle f, f\rangle = 0$ no implica que f sea idénticamente nula (lo es si f es continua). Para evitar este inconveniente se suelen identificar funciones que coinciden en todos los puntos salvo en un conjunto nulo (ver la definición 59).

2. Como antes, no se trata de una norma, pues $\|f\|_2 = 0$ no permite concluir que f sea idénticamente nula. Si se adopta la convención de identificar funciones que coinciden salvo en un conjunto nulo, $|\|\cdot\||_2$ es una norma.

3. Se dice que una función está *normalizada* cuando $\|f\|_2 = 1$. Si esta cantidad no es nula, siempre se puede obtener una función normalizada sin más que dividirla por su norma.

Definición 77 *Se llama* sistema trigonométrico en $[-\pi,\pi]$ *a la sucesión de funciones*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin n\pi}{\sqrt{\pi}}, \dots, \tag{2.7}$$

Forma un sistema ortonormal de funciones respecto a la función constante $q \equiv 1$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Definición 78 *Se llama* sistema exponencial *a la sucesión de funciones con valores complejos*

$$\phi_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}},\ n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots.$$

Forma un sistema ortonormal en $[-\pi, \pi]$ *respecto a la función* $q \equiv 1$.

Notas:

1. Todo sistema ortogonal de funciones no nulas es linealmente independiente.

2. El llamado *método de ortogonalización de Gram-Schmidt* permite pasar de una sucesión arbitraria de funciones a una sucesión ortogonal con la misma envoltura lineal. Precisamente, si $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión linealmente independiente de vectores en un espacio con un producto escalar, se define

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 \\ w_2 &:= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 \\ w_3 &:= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2, \\ &\ldots \end{aligned}$$

resultando una sucesión ortogonal (w_n) con la misma envoltura lineal.

2.2.3. Series de Fourier

El objeto de la teoría de las series de Fourier es expresar una función "arbitraria" f con valores reales como la suma de una serie formada por funciones trigonométricas (que será llamada su *serie de Fourier*). Una tal serie es, necesariamente, $2\pi-$periódica. La función f puede no serlo. Esto no es un problema si f está definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ de $I\!R$. Basta realizar un apropiado cambio de variable para suponer que el intervalo es $[-\pi, \pi]$. Inmediatamente se extiende la función $2\pi-$periódicamente a toda la recta $I\!R$. Este procedimiento puede producir problemas en los extremos del intervalo. Veremos como superarlos, así como estableceremos resultados para indicar lo que se quiere decir con la expresión de que f sea "representable" por una serie trigonométrica. Posteriormente trataremos el caso de funciones con valores complejos. De momento, las funciones utilizadas se supone que toman valores reales.

Así, dada $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, si se pretende encontrar la combinación lineal infinita (es decir, la serie) de funciones del sistema trigonométrico *más próxima* (en el sentido de la norma $\|\cdot\|_2$) a f (ver la Definición 72 y las consideraciones realizadas después de la Proposición 75), resulta que hay que tomar la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2.8}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \ \ k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \ \ k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por un abuso de notación, estos coeficientes reciben también el nombre de *coeficientes de Fourier* (para el sistema trigonométrico) de la función f. Para indicar que la serie (2.8) está asociada a la función f escribiremos

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Notas:

1. Debido a que se toma la extensión $2\pi-$periódica de f a toda la recta, basta conocer el comportamiento de f en cualquier intervalo de longitud 2π.

2. Como f es integrable Riemann, las integrales que definen los coeficientes de Fourier existen (se multiplica una función integrable por una función continua y acotada).

3. No se asegura que la serie construida en (2.8) sea convergente en ningún sentido. Por tanto, la asociación denotada mediante el símbolo $\sim$ no es más que la indicación de que los coeficientes se calculan mediante las fórmulas (2.9).

4. El problema de la convergencia de la serie de Fourier es delicado. En primer lugar, se trata de fijar el tipo de convergencia requerido (puntual, en la norma $\|\cdot\|_2$, uniforme (es decir, en la norma $\|\cdot\|_\infty$,...)). La serie puede no converger en ningún sentido, o hacerlo en unos y no en otros, y, en el caso de que sea convergente en alguno de ellos, hacerlo hacia un valor distinto del "esperado" $f(x)$. Estos aspectos se tratan en las seciones siguientes.

2.2.4. Convergencia en media

Una consecuencia inmediata de la ecuación (2.5) es la siguiente

Proposición 79 *Los coeficientes de Fourier de una función $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ verifican la llamada* desigualdad de Bessel*:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{2.10}$$

Notas:

1. En particular, los coeficientes de Fourier convergen a cero cuando $n \to \infty$ (ver el Lema 85).

Teorema 80 *Sea $f : [-\pi,\pi] \to I\!R$ una función cuya serie de Fourier definida en* (2.8) *sea $\|\cdot\|_2-$convergente a la función f (es decir, si*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

(las sumas parciales de la serie de Fourier*) entonces*

$$\|f - s_n\|_2 \to 0, \;\; \textit{cuando } n \to \infty)$$

En ese caso, se verifica la identidad de Parseval*:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{2.11}$$

Definición 81 *Un sistema ortonormal de funciones se dice que es* completo *cuando la serie de Fourier de cualquier función integrable es* $\|\cdot\|_2-$*convergente a la función.*

Teorema 82 *Los sistemas trigonométrico y exponencial son completos.*

Notas:

1. Por tanto, la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ es $\|\cdot\|_2-$convergente a f.

2. La completitud del sistema trigonométrico es consecuencia de un importante teorema de Weierstrass (ver el Teorema 98), que asegura que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es el límite uniforme (es decir, en $|||\cdot|||_\infty$) de una sucesión de polinomios.

2.2.5. Series de funciones particulares

Si la función $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ es *par*, entonces $b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$, por lo que la serie de Fourier tiene una expresión sólo con cosenos, precisamente

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{2.12}$$

donde se puede escribir

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

Si la función $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ es *impar*, entonces $a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que la serie de Fourier tiene una expresión sólo con senos, precisamente

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{2.14}$$

donde se puede escribir

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx,\ \ k = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

2.2.6. Series de exponenciales complejas

Basta recordar las fórmulas de Euler que relacionan las exponenciales complejas con los senos y cosenos para obtener

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{2.16}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \;\; k \text{ un número entero.} \tag{2.17}$$

2.2.7. Cambio de intervalo

Sea $f : [a,b] \to I\!R$ una función. Denotamos con el mismo símbolo a su extensión $(b-a)-$periódica a todo $I\!R$. Basta realizar un cambio de variable (una translación seguida de una homotecia) para considerarla definida en $[-\pi,\pi]$ (o, si se quiere, $2\pi-$periódica). Se puede aplicar todo lo anterior. Deshaciendo el cambio de variable se obtiene

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a} + b_k \sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}\right], \tag{2.18}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}dx, \;\; k = 0,1,2,\ldots, \\ b_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi(2x-b-a)}{b-a}dx, \;\; k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2.8. Convergencia puntual de una serie de Fourier

Supongamos ahora $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$.

Se considerarán dos problemas:

1. Determinar los puntos de $[-\pi,\pi]$ para los que la serie de Fourier de f converge.

2. En el caso de que la serie de Fourier converja en un punto, determinar si lo hace hacia $f(x)$.

A partir de este momento trataremos con una clase de funciones que cubre las necesidades más corrientes en la teoría de Fourier. Son las llamadas *absolutamente integrables*.

Definición 83 *Se dice que una función f definida en un intervalo I (que puede ser toda la recta real) es* absolutamente integrable *si existe una partición $\mathcal{P} := \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ de I tal que*

1. *$f \in \mathcal{R}$ en todo subintervalo de la I que no contenga ningún punto de $\mathcal{P}$.*

2. *Existe $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx$ como integral de Riemann o como integral impropia de Riemann absolutamente convergente (ver el apartado 2.1.4).*

En esas circunstancias, se escribe $f \in \mathcal{R}^*(I)$ y se define

$$\int_I f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx.$$

La siguiente proposición da una expresión manejable para las sumas parciales

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

de la serie de Fourier.

Proposición 84 *Sea $f \in \mathcal{R}^*[-\pi, \pi]$. Suponemos que f denota también la extensión 2π-periódica a $I\!R$. Entonces*

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t)dt,$$

donde

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, & t \neq 2m\pi,\ m \in \pm I\!N, \\ n + \frac{1}{2}, & t = 2m\pi,\ m \in \pm I\!N \end{cases}$$

recibe el nombre de núcleo de Dirichlet.

El siguiente Lema da una descripción asintótica del comportamiento de ciertas integrales que aparecen con frecuencia en la teoría de Fourier:

Lema 85 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Si $f \in \mathcal{R}^*(I)$, siendo I un intervalo cualquiera de la recta real, se tiene*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt = 0,$$

siendo β una constante arbitraria.

Nota: El significado geométrico del Lema 85 es claro: una función integrable en I, sometida a un proceso de oscilación (de tipo sinusoidal) cada vez más frecuente, tiene una integral que tiende a cero. Este lema permite, ahora, dar una expresión para las sumas parciales de una serie de Fourier. Precisamente se tiene

Proposición 86 *Dada una función $f \in \mathcal{R}^*[-\pi, \pi]$ y fijado $0 < \delta < \pi$ arbitrario, resulta*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt.$$

Nota: Una consecuencia de la proposición 86 es que la convergencia de la serie de Fourier de una función f en un punto x depende solamente del comportamiento de la función en un entorno tan pequeño como se quiera de x (lo que constituye el Teorema de Localización de Riemann). Sin embargo, observar que los coeficientes de la serie dependen del comportamiento de f en todo el intervalo, como es natural.

Definición 87 *Las integrales del tipo*

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt,$$

reciben el nombre de integrales de Dirichlet.

Nota:

1. Estas integrales tiene la forma de las que aparecen en la expresión del límite de las sumas parciales de la serie de Fourier, como se vió en la Proposición 86.

2. Interesa poder calcular, pues,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\delta} g(t)\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt.$$

Esto se considerará en los dos siguientes resultados.

Proposición 88 (Jordan) *Si, dado $0<\delta<\pi$, g es de variación acotada*[1] *en $[0,\delta]$, se tiene*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(t)\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt = g(0+).$$

Proposición 89 (Dini) *Si, dado $0<\delta<\pi$, existe $g(0+)$ y la integral impropia de Riemann*

$$\int_0^{\delta}\frac{g(t)-g(0+)}{t}dt,$$

converge absolutamente, entonces

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(t)\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt = g(0+).$$

Notas:

1. Funciones g que verifican la condición de Jordan en un intervalo $[0,\delta]$ son, por ejemplo, las funciones monótonas (crecientes o decrecientes) en ese intervalo.

2. Si existe $M>0$ y $p>0$ tales que $|g(t)-g(0+)|<Mt^p$ en $t\in[0,\delta]$, la función g satisface la condición de Dini. Como caso particular, esto ocurre si g tiene derivada en 0 por la derecha, debiéndose entender por ello la existencia y finitud del siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0+)}{t}.$$

[1] Una función f definida en un intervalo $[a,b]$ se dice que es de *variación acotada* cuando existe una constante $M>0$ con la propiedad de que, dada cualquier partición $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, entonces $\sum_{k=0}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<M$. Resulta que una función es de variación acotada si y solamente si es diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

La aplicación a la convergencia puntual de una serie de Fourier de una función f 2π-periódica es clara: a la vista de la expresión de una suma parcial dada en la Proposición 86, es necesario considerar la función

$$g(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2},\ t \in [0,\delta],$$

donde $0 < \delta < \pi$, a la que se aplica alguna de las Proposiciones 88 o 89. Precisamente, se obtienen dos condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier en un punto:

Teorema 90 (Condición de Jordan) *Dada $f \in \mathcal{R}^*[-\pi,\pi]$ una función $2\pi-$periódica, supongamos que existe un punto $x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tales que f sea de variación acotada en $[x-\delta, x+\delta]$. Entonces resulta que la serie de Fourier de f converge puntualmente en x al valor*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}.$$

Teorema 91 (Condición de Dini) *Dada $f \in \mathcal{R}^*[-\pi,\pi]$ una función $2\pi-$periódica, se define*

$$g(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2},\ t \in [0,\delta].$$

Entonces, si existe

$$g(0+) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2},$$

y

$$\int_0^\delta \frac{g(t)-g(0+)}{t}dt$$

como integral impropia de Riemann absolutamente convergente, para algún $0 < \delta < \pi$, resulta que la serie de Fourier de f converge en x al valor

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}.$$

Notas:

1. Es sorprendente que la continuidad de una función f en $[-\pi, \pi]$ (una condición mucho más fuerte que la integrabilidad) no sea suficiente para asegurar la convergencia puntual de su serie de Fourier.

2. Para paliar este problema, el apartado 2.2.11 tratará de un tipo de convergencia de la serie de Fourier que es, en cierta forma, más estable.

3. Las situaciones más usuales en las que existe convergencia puntual de la serie de Fourier están descritas en los Teoremas 90 y 91. Hay una situación que se presenta a menudo, y que es un caso particular de la condición de Dini: precisamente, que la función f sea suave a trozos. Otra, también frecuente, y que es un caso particular de la de Jordan, es que la función f sea monótona (creciente o decreciente).

4. Observar que, tanto en el caso del Teorema 90 como en el del Teorema 91 la convergencia de la serie de Fourier en cada punto es hacia la semisuma de los límites laterales. Por tanto, si además la función es continua, la convergencia es al valor de la función en ese punto.

2.2.9. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Si la serie de Fourier de una función converge a ella uniformemente, necesariamente f es una función continua, pues es bien conocido que *el límite uniforme de funciones continuas (en este caso, las sumas parciales de la serie de Fourier) es una función continua*. Por tanto, no se puede esperar convergencia uniforme excepto en el caso de que f sea continua. Por supuesto, esta condición no es suficiente. Se tiene

Teorema 92 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua $2\pi-$periódica, tal que tenga una derivada continua a trozos en $[-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f es absoluta y uniformemente convergente a f.*

Teorema 93 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $2\pi-$periódica suave a trozos en $[-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f es absoluta y uniformemente convergente a f en todo intervalo cerrado y acotado que no tenga puntos de discontinuidad de f.*

2.2.10. Diferenciación e integración de series de Fourier

La diferenciación término a término de una serie de Fourier no siempre es posible. Por ejemplo, la función $f(x) := x$ definida en $[-\pi, \pi]$ y $2\pi-$periódica en $I\!R$ tiene como serie de Fourier asociada

$$2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right],$$

que tiene una derivada término a término

$$2[\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots]$$

serie divergente para todo x. No sólo eso, sino que esta serie no puede ser la serie de Fourier asociada a ninguna función en virtud de la igualdad (2.10).

Teorema 94 (Diferenciación) *Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función continua $2\pi-$periódica con derivada suave a trozos en $[-\pi, \pi]$. Entonces f' tiene una serie de Fourier que puede ser obtenida derivando término a término la serie de Fourier de f. La serie así obtenida converge puntualmente a f' en los puntos donde f' sea continua, y a $[f'(x+) + f'(x-)]/2$ donde f' sea discontinua.*

Teorema 95 (Integración) *Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función $2\pi-$periódica continua a trozos en $[-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f se puede integrar término a término en cualquier intervalo finito, obteniéndose una serie que converge puntualmente a una primitiva de f.*

2.2.11. Sumabilidad de Cesàro

Fejér demostró que si se consideran las *medias* de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función f, convergen con las mínimas hipótesis sobre la función (pues basta la integrabilidad). Precisamente, sea $f \in \mathcal{R}^*[-\pi, \pi]$ una función 2π-periódica. Sea

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],\ n = 1, 2, \dots$$

la suma parcial $n-$ésima de la serie de Fourier de f. Sea

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

las medias de las sumas parciales. Entonces se tiene

Proposición 96 *Si $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ es una función 2π-periódica, se tiene*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}nt)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)} dt.$$

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 97 (Fejér) *Si $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ es una función 2π-periódica, se define la función*

$$s(x) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

cuando este límite exista. Entonces, si $x \in I\!R$ es un punto en el que s está bien definida, la sucesión de medias aritméticas $(\sigma_n(x))$ de la serie de Fourier de f en x converge a $s(x)$. Además, si f es continua en $I\!R$, la convergencia de (σ_n) a f es uniforme.

Notas: Las consecuencias del teorema de Fejér son muy interesantes:

1. Si la serie de Fourier de una función continua converge en un punto x, debe hacerlo hacia $f(x)$.

2. Otra consecuencia es el siguiente teorema de aproximación:

   Teorema 98 (Weierstrass) *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio p en $[a, b]$ tal que*

   $$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Es interesante que una serie de Fourier de una función tal que $f^2 \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ se pueda integrar término a término aunque no sea convergente. Se tiene la siguiente

Proposición 99 *Supongamos que $f^2 \in \mathcal{R}^*[-\pi, \pi]$. Entonces se tiene*

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\} dt, \; \forall x \in [-\pi, \pi].$$

2.2.12. Series dobles de Fourier

Dada una función de varias variables, periódica en cada una de ellas, continuamente diferenciable en R^n, tiene asociada una serie de Fourier múltiple. El tratamiento de una situación de este tipo se realiza fijando sucesivamente las variables. Basta tratar, para entender el procedimiento, el caso particular de funciones de dos variables. Así, se considera una función continuamente diferenciable $f : R^2 \to R$ tal que

$$f(x+2\pi, y) = f(x, y+2\pi) = f(x,y), \ \forall (x,y) \in R^2.$$

Si se fija una de las variables, digamos y, se obtiene una función $2\pi-$periódica $f_y : R \to R$, que es continuamente diferenciable. Como es sabido (ver el teorema 90 y las notas subsiguientes) es la suma de su serie de Fourier, precisamente

$$f(x,y) = f_y(x) = \frac{c_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(y)\cos(mx) + s_m(y)\sin(mx)]; \tag{2.20}$$

Es claro que los coeficientes dependen de y, pues fijado y distinto estos serán, previsiblemente, también distintos. Las expresiones de estos coeficientes son conocidas (ver las ecuaciones (2.9)):

$$\begin{aligned} c_0(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)dx, \\ c_m(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos(mx)dx, \\ s_m(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin(mx)dx, \end{aligned}$$

siendo funciones de y continuamente diferenciables y $2\pi-$periódicas. Por tanto, cada una de ellas es desarrollable en serie de Fourier, precisamente

$$\begin{aligned} c_0(y) &= \frac{c_{00}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{0k}\cos(ky) + s_{0y}\sin(ky)], \\ c_m(y) &= \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk}\cos(ky) + s_{mk}\sin(ky)], \\ s_m(y) &= \frac{s_{m0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [sc_{mk}\cos(ky) + ss_{mk}\sin(ky)], \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde los coeficientes vienen dados por las correspondientes fórmulas. Por ejemplo,

$$c_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_m(y)\cos(ky)dy =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos(mx)\cos(ky)dxdy, \tag{2.22}$$

y así los otros. Basta ahora sustituir las expresiones (2.21) en (2.20) para obtener la expresión de la serie doble. Los coeficientes están expresados por las fórmulas (2.22).

2.2.13. Aplicaciones de las Series de Fourier

Respuesta de frecuencia (resolución de ecuaciones diferenciales lineales)

Considérese una ecuación diferencial lineal de orden m con coeficientes constantes reales en la función incógnita x de la variable t,

$$a_0\frac{d^m x}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}\frac{dx}{dt} + a_m x = f(t). \tag{2.23}$$

Se sabe que la solución general de este problema es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

donde x_h es la solución general de la ecuación homogénea (en realidad, una familia de soluciones) y x_p es una solución particular. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea está expresada usando exponenciales $e^{\lambda t}$, donde λ es una raíz del polinomio característico, es decir,

$$p(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m. \tag{2.24}$$

Supondremos que el sistema descrito por la ecuación (2.23) es *estable*, es decir, que la parte imaginaria de cada una de las raíces de (2.24) tiene parte real negativa. Observar entonces que las soluciones de la ecuación homogénea son *transitorias*, es decir, cuando $t \to \infty$ tienden a cero.

Usaremos las series de Fourier para obtener una solución particular x_p de la ecuación (2.23) en el caso que la función f sea periódica de período τ

y sea suave a trozos. En ese caso (ver 91 y 90) la función puede expresarse como suma de su serie de Fourier (que, dadas las características del problema, preferimos escribir en su forma compleja), precisamente

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwt}, \quad w = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Para obtener la solución particular x_p usaremos el método de superposición (ver el apartado 3.1.3), en el que se calcula primero una solución particular x_n de la ecuación (2.23) cuando $f(t) = c_n e^{inwt}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y luego se considera la serie formada por esas soluciones particulares. Precisamente, para la ecuación

$$a_0 \frac{d^m x}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}\frac{dx}{dt} + a_m x = c_n e^{inwt}.$$

se ensaya una solución $k.e^{inwt}$, donde k es una constante. Identificando coeficientes se obtiene, inmediatamente,

$$x_n(t) = \frac{c_n e^{inwt}}{a_0(inw)^m + \ldots + a_m}. \tag{2.25}$$

Observar que el denominador no se anula, ya que (inw) no es raíz del polinomiuo característico, debido a la hipótesis de que el sistema es estable.

Se define ahora la función

$$Y(s) := \frac{1}{a_0 s^m + \ldots + a_m}, \tag{2.26}$$

llamada *función de transferencia* del sistema considerado. Cuando w es real, la función $Y(iw)$ se llama *función de respuesta de frecuencia* del sistema. Entonces la ecuación (2.25) se convierte en

$$x_n(t) = c_n Y(inw) e^{inwt}.$$

Por el principio de superposición (ver el apartado 3.1.3) se construye una solución particular de la ecuación (2.23) como

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Y(inw) e^{inwt}.$$

Es posible demostrar que esta serie converge uniformemente, y que la suma de la serie (por tanto, una función continua) verifica realmente la ecuación diferencial (2.23) excepto en puntos en los que f tiene algún salto. Observar también que cuando $t \to \infty$ cualquiera de las soluciones de la ecuación homogénea tiende a cero, con lo que cualquiera de las soluciones de la ecuación (2.23) se parece cada vez más a la función x_p calculada, que es llamada así *estado estacionario*[2].

2.2.14. Las series de Fourier como transformadas

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que sea $2\pi-$periódica e integrable, se le asocia su serie de Fourier (ver la fórmula (2.16)). Así, queda determinada una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de forma única, la sucesión de sus coeficientes de Fourier, dados por las fórmulas (2.17). Esta "transformación", denotada S, es lineal, en el sentido de que $S(\alpha f+\beta g) = \alpha S(f)+\beta S(g)$, donde α y β son, en general, números complejos y f y g son funciones integrables y $2\pi-$periódicas. S se denomina a veces *Transformada Finita de Fourier*, y las aplicaciones de la misma a las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales se verán en la sección 3.6.

Tan interesante como esto es el hecho de que la función f pueda ser "recuperada"si se conoce la sucesión de sus coeficientes de Fourier. La forma de hacerlo consiste, precisamente, en sumar la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, para $x \in \mathbb{R}$, y en esto consiste calcular la transformación inversa S^{-1}.

Como se ha indicado en los Teoremas 90 y 91, no es posible recuperar siempre la función, pues la serie de Fourier puede que no converja o, si lo hace, puede que no sume la función. Bajo las condiciones establecidas en esos teoremas, se recupera precisamente la función que coincide con $f(x)$ en sus puntos de continuidad, y que vale $(1/2)(f(x+) + f(x-))$ en los saltos de la misma.

Hay que añadir que, bajo las condiciones dadas en el Teorema 94, si la función f tiene como coeficientes de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces la función derivada f' tiene como coeficientes de Fourier precisamente $C_k := ikc_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Así, la derivación se convierte, mediante el operador S, en un simple producto por constantes.

Estos puntos de vista se verán reforzados por las secciones siguientes, en las que se trata el caso de funciones que no son, necesariamente, periódicas.

[2]Este tratamiento está sacado, con algunas variantes, de [Ka].

2.3. Integrales de Fourier

Sea una función $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$. No tiene sentido preguntarse por su desarrollo en serie de Fourier, ya que f no tiene por qué ser 2π-periódica. Sin embargo, existe un resultado que es de alguna forma similar, pues representa la versión continua del teorema sobre la convergencia de la serie de Fourier. Es interesante que las condiciones sobre la función son las mismas que garantizan la convergencia de la serie de Fourier.

Teorema 100 (Teorema de la Integral de Fourier) *Sea $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$. Sea $x \in I\!R$, $\delta > 0$. Se supone que f verifica alguna de las dos siguientes condiciones*

1. **Condición de Jordan***: f es de variación acotada en $]0, \delta[$.*
2. **Condición de Dini***: Existe $f(x+)$, $f(x-)$ y además*

$$\frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \in \mathcal{R}[0, \delta], \quad \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \in \mathcal{R}[0, \delta].$$

Entonces resulta

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos v(u - x) du \right] dv. \tag{2.27}$$

Existe una forma más simétrica de escribir la fórmula (2.27) usando exponenciales. Es el siguiente resultado.

Teorema 101 (Forma exponencial de la Integral de Fourier) *Con las condiciones del Teorema 100 se tiene*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right] e^{iwx} dw. \tag{2.28}$$

El Teorema 101 se debe interpretar de la siguiente forma: dada una función $f \in \mathcal{R}(I\!R)$ se obtiene la función

$$F(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt. \tag{2.29}$$

Ahora, se puede "recuperar"la función f (si cumple las condiciones dadas en el teorema 100) mediante otra transformación del mismo tipo. Precisamente

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwx}dw.$$

Este proceso es especialmente importante. La primera de las dos operaciones es la *Transformación de Fourier* (ver la definición 102). La segunda es la *Transformación Inversa de Fourier* (ver la definición 103). Observar que tienen aspectos muy parecidos. Sólo se diferencian en el signo del exponente en la función exponencial.

2.4. Transformaciones integrales

El planteamiento de la seción anterior conduce a una tipo de operación (llamada una *transformación* $\mathcal{T}$) sobre funciones que tiene unas aplicaciones y consecuencias importantes: Un problema (una ecuación diferencial, una ecuación en derivadas parciales,...) se "transforma"mediante $\mathcal{T}$ en un problema que, como se verá, es, en principio, más fácil de resolver. Obtenida la solución, mediante la transformación inversa $\mathcal{T}^{-1}$ se obtiene la del problema primitivo. Este punto de vista se aplicará extensivamente en la sección 3.9.1. Conviene también observar lo que se dijo en el apartado 2.2.14 a propósito del tipo de transformación que define el cálculo de los coeficientes de Fourier de una función periódica y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones.

2.4.1. Forma general de una transformación integral

Se analizó en el apartado 2.1.3 el comportamiento de las funciones definidas como una integral paramétrica, digamos

$$F(y):=\int_I f(x,y)dx.$$

Hay muchas funciones de este tipo que presentan una estructura particular: se proporciona una función de dos variable *fija* $k(x,y)$ (llamada *núcleo de la transformación*) y entonces, dada una función $f(x)$ se obtiene una función $g(y)$ como

$$g(y):=\int_I k(x,y)f(x)dx. \tag{2.30}$$

Se define de esta forma un mecanismo que permite pasar de una función f a una función g, una *transformación* de un espacio de funciones en otro, un *operador* $\mathcal{K}$, que además es lineal, es decir $\mathcal{K}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{K}(f)+\beta\mathcal{K}(g)$.

Como ejemplo de un mecanismo de este tipo, considerar la función k definida en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ como

$$k(x,y)=\begin{cases}1, & \text{si } y\geq x,\\ 0, & \text{si } y<x.\end{cases}$$

Es inmediato que, dada f continua en $[0,1]$, la función asociada mediante la fórmula (2.30) es precisamente su primitiva. Así, en este ejemplo, $\mathcal{K}$ pasa del espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ al espacio de las funciones derivables en $[0,1]$. Esta transformación posee una inversa, precisamente la derivación.

Se obtienen diversas transformaciones mediante distintos núcleos. Las más usuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
g(y) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}f(x)dx && \text{(Transformada exponencial de Fourier)}\\
g(y) &:= \int_0^{+\infty} \cos xy f(x)dx && \text{(Transformada coseno de Fourier)}\\
g(y) &:= \int_0^{+\infty} \sin xy f(x)dx && \text{(Transformada seno de Fourier)}\\
g(y) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)dx && \text{(Transformada de Laplace)}\\
g(y) &:= \int_0^{+\infty} x^{y-1}f(x)dx && \text{(Transformada de Mellin)}
\end{aligned}$$

Notas: Como ejemplo, la transformada de Mellin de la función exponencial es simplemente la función Gamma de Euler. Las transformadas introducidas aquí son variantes de la Transformada de Fourier. Las transformaciones seno y coseno seran estudiadas en la sección 3.9.1.

2.4.2. La Transformada de Fourier

Definición 102 *Dada una función* $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ *se define su* transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ *como la función*

$$\mathcal{F}[f](w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt, \quad w \in I\!R.$$

Definición 103 *Dada una función* $g \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ *se define su* transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}[g]$ *como la función*

$$\mathcal{F}^{-1}[g](w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{iwt}dt, \quad w \in I\!R.$$

Notas:

1. Observar que las anteriores definiciones tienen sentido, ya que si $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ y se toma $w \in I\!R$, entonces $|f(t).e^{-iwt}| = |f(t)|, \ \forall t \in I\!R^n$, luego la función $t \to f(t).e^{-iwt}$ es también de $\mathcal{R}^*(I\!R)$. Análogamente para la transformada inversa.

2. Observar que la transformada de Fourier de una función es una nueva función *con valores complejos*.

3. Que la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier son en cierto sentido operaciones inversas es lo que se indicó con precisión en el teorema 101.

Proposición 104 (Propiedades de $\mathcal{F}$) *1. $\mathcal{F}$ es una aplicación lineal, continua e inyectiva de $\mathcal{R}^*(I\!R)$ en $C_0[I\!R]$, donde $\mathcal{R}^*(I\!R)$ está dotado de la norma $\|\cdot\|_1$ y $C_0[I\!R]$ denota el espacio de las funciones continuas y acotadas en $I\!R$ que tienen límite cero en $+\infty$ y en $-\infty$, dotado de la norma $\|g\|_\infty := \sup\{|g(w)| : \ w \in I\!R\}$.*

2. Si $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ y $t_0 \in I\!R$, se define $g(t) := f(t-t_0)$ para $t \in I\!R$. Entonces

$$\mathcal{F}[g](w) = e^{iwt_0}\mathcal{F}[f](w), \ \forall w \in I\!R.$$

3. Si $f \in \mathcal{R}^*(I\!R)$ y $a \in I\!R$, se define $g(t) := f(at)$ para $t \in I\!R$. Entonces

$$\mathcal{F}[g](w) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{w}{a}\right), \ \forall w \in I\!R.$$

4. *Si* $f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$ *y* $a \in \mathbb{R}$*, se define* $g(t) := e^{iat}f(t)$ *para* $t \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\mathcal{F}[g](w) = \mathcal{F}[f](w-a), \ \forall w \in \mathbb{R}.$$

5. *Si* $f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$ *es absolutamente continua* [3] *en todo intervalo finito de* $\mathbb{R}$ *y si su derivada es de* $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$*, entonces se tiene*

$$\mathcal{F}[f'](w) = (iw)\mathcal{F}[f](w).$$

   Más generalmente: si f *es una función que tiene derivada* $(k-1)-$*ésima que es absolutamente continua en todo intervalo finito de* $\mathbb{R}$*, y de forma que* $f, \ f', \ f'', \ldots, \ f^{(k)}$ *son funciones de* $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$*, entonces se tiene*

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](w) = (iw)^k\mathcal{F}[f](w), \ \forall w \in \mathbb{R}.$$

6. *Si* $f(x)$ *y* $x.f(x)$ *son funciones de* $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$*, entonces la transformada de Fourier* $\mathcal{F}[f]$ *de* f *es derivable, y se tiene*

$$\mathcal{F}'[f](w) = \mathcal{F}[-itf(t)](w), \ \forall w \in \mathbb{R}.$$

   Más generalmente, si las funciones $f, \ tf, \ t^2f, \ldots, \ t^pf$ *son de* $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$*, entonces* $\mathcal{F}[f]$ *es* p *veces derivable, y se tiene*

$$\mathcal{F}^{(p)}[f](w) = \mathcal{F}[(-it)^pf(t)](w).$$

Notas:

1. La afirmación 2 en la proposición 104 dice, de forma un tanto imprecisa, que cuanto más grados de derivabilidad tenga una función, más rápidamente su transformada tiende a cero en el infinito. Así, en las condiciones de 2,

$$|\mathcal{F}[f](w)| = \frac{\left|\mathcal{F}[f^{(k)}](w)\right|}{|w|^k},$$

   luego $|\mathcal{F}[f](w)|$ tiende a cero cuando $|w| \to \infty$ más deprisa que $1/|w|^k$ si f es derivable hasta el orden k (siendo las derivadas integrables).

[3] Una función f se dice que es *absolutamente continua* cuando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{[a_i, b_i], \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ es una familia finita de intervalos disjuntos con suma de longitudes menor que δ, entonces $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$.

2. Recíprocamente, de 3 se deduce que cuanto más rápidamente f tienda a cero en el infinito, entonces más veces será $\mathcal{F}[f]$ derivable.

Estas afirmaciones hacen conveniente definir una clase de funciones que es estable por la transformación de Fourier, es decir, que al aplicar $\mathcal{F}$ se obtienen funciones de la misma clase:

Definición 105 *$\mathcal{S}_\infty$ denota las funciones reales f definidas en $\mathbb{R}$, que tienen derivadas de todos los órdenes, y para las que para cada $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe una constante $C_{p,q} > 0$ (que depende de f) de modo que*

$$\left|t^p f^{(q)}(t)\right| \leq C_{p,q}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Las funciones de esta clase se dice que son infinitamente derivables y de decrecimiento rápido*.*

Proposición 106 *La tranformación de Fourier $\mathcal{F}$ es una biyección de $\mathcal{S}_\infty$ sobre $\mathcal{S}_\infty$.*

2.4.3. Transformación de Fourier y convoluciones

Hay un tipo especial de transformación integral en la que el núcleo $k(x, y)$ depende sólo de la diferencia $x - y$.

Definición 107 *Dadas dos funciones f y g en $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$, absolutamente integrables, sea D el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ para los que existe*

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

La función h así definida en D se llama la convolución *de f y g, y se denota por $f * g$.*

Notas: se puede dar una interpretación física de esta operación. Supongamos un dispositivo eléctrico con dos bornes de entrada y dos de salida. Se introduce un tren de impulsos de altura 1, espaciados en el tiempo en intervalos de longitud 2π. El dispositivo produce una respuesta que viene representada por la función g.

Se sabe que el dispositivo es lineal, es decir, a una función entrada doble, por ejemplo, corresponde una función salida doble. A la suma de dos funciones entrada corresponde la suma de las funciones salida.

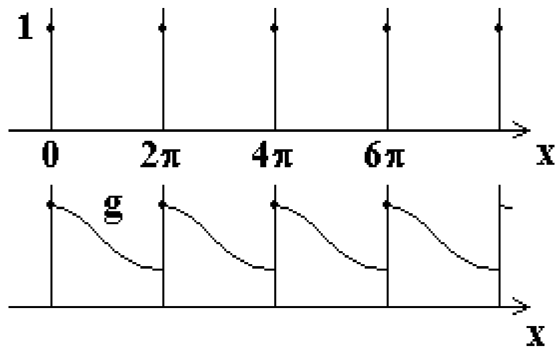

Figura 2.1: Función impulso y respuesta

Se introduce ahora una función impulso desplazada t en el tiempo. Resulta como función salida precisamente $g(x-t)$. Se supone ahora que se introduce una función arbitraria f en la entrada.

Se puede considerar f como una superposición de funciones impulso de altura $f(t)$, separadas a una distancia 2π. Una de esas funciones impulso sería la representada en la figura 2.2. Por tanto, el resultado de ella es $f(t).g(x-t)$ y el de f la "suma"de todos esos resultados, es decir, la integral

$$\int_0^{2\pi} f(t).g(x-t)dt = f * g(x).$$

Éste, salvo una constante, es el significado de la convolución (esta vez en un intervalo finito).

No siempre existe la convolución de dos funciones, aunque ambas sean integrables. Un ejemplo inmediato está dado por las dos funciones

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad g(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Su convolución no está definida en $x = 1$.

Teorema 108 (Propiedades de $f * g$) *1) Dadas dos funciones f y g en $\mathcal{R}^*(I\!R)$, si alguna de las dos está acotada, entonces existe $f * g$ en todo punto y es una función acotada. Si, adicionalmente, la función acotada es continua, entonces $f * g$ es una función continua en $\mathcal{R}^*(I\!R)$.*

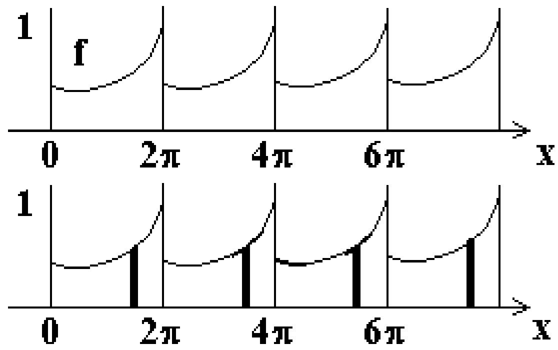

Figura 2.2: Una función general

2) La convolución, cuando existe, es una operación conmutativa.

3) Si f y g son de cuadrado integrable, entonces existe $f * g$ en todo $\mathbb{R}$ y es una función acotada.

4) Con las condiciones dadas en 1), es decir, al menos una de las dos funciones acotada y continua, entonces

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f].\mathcal{F}[g].$$

Una tabla de transformadas de Fourier

N	$f(x)$ (=0 fuera del intervalo dado)	$\mathcal{F}[f](w)$
1	$c,\ x \in [a, b]$	$\frac{ic}{\sqrt{2\pi}w}(e^{iwa} - e^{iwb})$

2.4.4. Algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier

La aplicación de la transformación de Fourier a la solución de las ecuaciones diferenciales se basa en que convierte la derivación en la multiplicación por la variable independiente y por i. De esa forma, gracias a la linealidad, una ecuación diferencial lineal se convierte en una ecuación algebraica. Precisamente, si se quiere resolver la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, problema que ha sido tratado en la subsección 2.2.13 mediante el uso de las series de Fourier, se puede ahora aplicar el método de las Transformada de Fourier:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y\,'(x) + a_n y(x) = \phi(x),$$

basta aplicar $\mathcal{F}$ a ambos lados para obtener

$$\begin{aligned}(iw)^n \mathcal{F}[y](w) &+ a_1 (iw)^{n-1} \mathcal{F}[y](w) + \ldots \\ &\ldots + a_{n-1}(iw)\mathcal{F}[y](w) + a_n \mathcal{F}[y](w) = \\ &= \mathcal{F}[y](w)\{(iw)^n + a_1(iw)^{n-1} + \ldots + a_n\} = \mathcal{F}[\phi](w),\end{aligned}$$

de donde se puede obtener la solución $\mathcal{F}[y]$ en cualquier punto y luego recuperar la solución buscada $y(x)$ mediante inversión. Precisamente,

$$\mathcal{F}[y](w) = \mathcal{F}[\phi](w) Y(iw),$$

donde

$$Y(z) := \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Si los ceros del polinomio característico $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ son b_k (con orden de multiplicidad p_k), $k = 1, 2, \ldots, m$, entonces

$$Y(z) = \frac{1}{(z-b_1)^{p_1} \ldots (z-b_m)^{p_m}} = \frac{c_1}{(z-b_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{c_m}{(z-b_1)^{p_m}}.$$

Si b es un número complejo con parte real negativa se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{k!}{(iw-b)^{k+1}}\right](t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} t^k e^{bt}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Así, si denotamos $g_k := \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(iw-b_k)^{p_k}}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y](w) &= \mathcal{F}[\phi](w) Y(iw) = \\ &= \mathcal{F}[\phi](w)\mathcal{F}[c_1 g_1 + \ldots + c_m g_m](w) = \mathcal{F}[\phi * (c_1 g_1 + \ldots + c_m g_m)](w),\end{aligned}$$

en virtud de 4) en el Teorema 108. Así, resulta

$$y = \phi * (c_1 g_1 + \ldots + c_m g_m).$$

Sin embargo este procedimiento no es muy interesante pues, en primer lugar, la resolución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no ofrece mucha dificultad mediante los procedimientos usuales y en segundo lugar, para aplicar las técnicas de la transformada de Fourier se requiere que la función $y(x)$ se suponga definida e integrable en toda la recta, lo que en general no es cierto.

Más interés ofrece la resolución de ecuaciones en derivadas parciales por este método. Un tratamiento sistemático de las mismas se hará en el Capítulo 3. Sin embargo, en este momento se puede tratar de forma simple un problema a modo de ejemplo: considérese la ecuación del calor (ver el apartado 3.2.2), en la que $u(x,t)$ representa la temperatura de un punto x de una varilla (que se supone infinita) en el instante t. Está representada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.31}$$

y se supone que la condición inicial (la temperatura de la varilla en el instante $t = 0$) está dada por la función $u_0(x)$. Se supone sobre la solución las condiciones adecuadas para poder aplicar la transformada de Fourier a ambos lados considerando en primer lugar que t es fijo y, por tanto, que la ecuación (2.31) es de una función de x. Se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_{xx}(x,t)](v) &= -v^2\mathcal{F}[u(x,t)](v) = \\ &= \mathcal{F}[u_t(x,t)](v) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u(x,t)](v). \end{aligned}$$

Denotando $g(v,t) := \mathcal{F}[u(x,t)](v)$, se tiene

$$g_t(v,t) = -v^2 g(v,t),$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en la variable t si se considera ahora v fijo. La condición inicial que debe verificar es $g_o(v) = \mathcal{F}[u_0(x)](v)]$. La solución es $g(v,t) = g_0(v).e^{-v^2 t}$. Basta ahora encontrar la transformación inversa de esta función para obtener la solución del problema planteado. En el apartado 3.9.1 se proporcionarán otras aplicaciones de la Transformada de Fourier a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

2.4.5. Transformada de Laplace

Definición

Las aplicaciones de la transformada de Fourier están limitadas por el hecho de que sólo actúa sobre funciones de $\mathcal{R}(I\!R)$. En muchas circunstancias es necesario realizar transformaciones de funciones que quizás no sean integrables. Para incluir posibilidades de este tipo se considera la situación siguiente:

Sea $f : I\!R \to I\!R$ con la propiedad

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(x)| < C.e^{a_0.x}, & x \geq 0, \\ f(x) = 0, & x < 0, \end{array} \right. \tag{2.32}$$

donde a_0 y C son ciertas constantes reales. Sea $z := a + bi$ un número complejo. Se tiene

$$|f(x).e^{-ax}| < C.e^{a_0.x}.e^{-ax} = C.e^{(a_0-a)x}. \tag{2.33}$$

Si se supone $a_0 < a$, la última función de la ecuación (2.33) es absolutamente integrable, y así lo es $f(x).e^{-ax}$. Introducimos la siguiente

Definición 109 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las condiciones (2.32). Se define la* Transformada de Laplace de f *como la función de variable compleja definida en* $\operatorname{Re} z > a_0$ *por*

$$\mathcal{L}[f](z) := \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)e^{-ax}](b) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-zx}dx,$$

donde $z = a + bi$.

Por tanto, si se dan las condiciones del Teorema de la Integral de Fourier 101, se tendrá

$$f(x)e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f(x)e^{-ax}](b)e^{ibx}db,$$

y así,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](z)e^{zx}db.$$

Resulta que $\mathcal{L}[f]$ es una función de variable compleja definida y derivable en $\operatorname{Re} z > a_0$. La transformación inversa actúa sobre funciones derivables g de variable compleja definidas en $\operatorname{Re} z > a_0$ y es

$$\mathcal{L}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(z).e^{zx} dz,$$

siendo $\operatorname{Re} z = a > a_0$, donde la anterior integral debe entenderse como una integral de una función de variable compleja a lo largo de una trayectoria, precisamente cualquier recta $b \to a + bi$, $b \in \mathbb{R}$, siendo $a > a_0$ una cierta constante. Así, si f cumple las condiciones (2.32) así como las condiciones del Teorema de la Integral de Fourier 101, se tendrá

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}[f](z) e^{zx} dz. \tag{2.34}$$

Propiedades

Las propiedades más importantes tienen que ver con la forma como la transformada de Laplace actúa sobre derivadas de funciones. Precisamente, supongamos que f y $f\,'$ satisfagan las condiciones (2.32). Entonces, integrando por partes,

$$\mathcal{L}[f\,'](z) = -f(0) + z\mathcal{L}[f](z)$$

En el caso en que las funciones f, $f\,'$, $f\,''$, $\ldots$, $f^{(n)}$ satisfagan las condiciones (2.32), se tiene, además,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f\,''](z) &= -f\,'(0) - zf(0) + z^2\mathcal{L}[f](z), \\ &\cdots \\ \mathcal{L}[f^{(n)}](z) &= -f^{(n-1)}(0) - zf^{(n-2)}(0) - \ldots - z^{n-1}f(0) + z^n\mathcal{L}[f](z). \end{aligned}$$

Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales

Se considera una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{2.35}$$

y se busca una solución que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = y_0,\ y\,'(0) = y_1,\ y\,''(0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros, y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}$ es lineal y se satisfacen las propiedades listadas en el apartado anterior, se tiene

$$\begin{gathered}a_n[z^n\mathcal{L}[y](z) - y^{(n-1)}(0) - zy^{(n-2)}(0) - \ldots - z^{n-1}y(0)]+ \\ +a_{n-1}[z^{n-1}\mathcal{L}[y](z) - y^{(n-2)}(0) - zy^{(n-3)}(0) - \ldots - z^{n-2}y(0)] + \\ + \ldots + a_1[z\mathcal{L}[y](z) - y(0)] + a_0\mathcal{L}[y](z) = \\ = P(z)\mathcal{L}[y](z) + Q(z) = \mathcal{L}[f](z),\end{gathered}$$

donde $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ y Q es un cierto polinomio en la variable z. Resulta

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{\mathcal{L}[f](z) - Q(z)}{P(z)}. \tag{2.36}$$

Se supone que la función f satisface las condiciones (2.32), por lo que la función $\mathcal{L}[f](z)$ está definida en un semiplano $\operatorname{Re} z > a_0$. Basta ahora tomar a_0 suficientemente grande para que los ceros del polinomio P estén en el semiplano $\operatorname{Re} z \leq a_0$, con lo que el denominador de (2.36) no se anula. La función solución y se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a $\mathcal{L}[y]$:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathcal{L}[f](z) - Q(z)}{P(z)} e^{zx} dz, \tag{2.37}$$

siendo $a = \operatorname{Re} z > a_0$.

Se supone ahora, como caso particular, que $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{n-1}(0)$. Entonces, el polinomio Q en la expresión (2.36) es idénticamente nulo, y resulta

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathcal{L}[f](z)}{P(z)} e^{zx} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zx}}{P(z)} \left[\int_0^{+\infty} f(s)e^{-sz}ds\right] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{z(x-s)}}{P(z)} dz\right] f(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} G(x-s)f(s)ds,\end{aligned}$$

donde se define

$$G(x) := \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zx}}{P(z)}\, dz, \tag{2.38}$$

función que recibe el nombre de *Función de Green* asociada al problema (2.35).

Capítulo 3
Ecuaciones en Derivadas Parciales

3.1. Conceptos básicos

3.1.1. Definiciones

Una ecuación en derivadas parciales es una relación entre una función $u(x, y, \ldots)$ de varias variables y sus derivadas parciales (que se denotarán u_x, u_{xx}, u_y, $u_{xy}, \ldots$), de la forma

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0 \quad \text{[EDP]}.$$

En general, f es una función definida en un cierto dominio D_f del espacio $I\!R^m$.

Denotaremos abreviadamente por *EDP* al término *ecuación en derivadas parciales*. Se llama *solución* de una EDP a una función $u(x, y, \ldots)$ definida en cierto dominio D de $I\!R^n$ de modo que, sustituida en la EDP, convierta esta ecuación en una identidad sea cual sea el punto $(x, y, \ldots) \in D$. Se llama *orden* de una ecuación al mayor orden de derivación que aparece en la EDP.

Una EDP se dice que es *lineal* cuando f lo es en la función u y en todas su derivadas parciales. En otro caso se dice que es *no lineal*. Una EDP se dice que es *cuasilineal* cuando es lineal en las derivadas parciales de mayor orden. Por ejemplo, el aspecto general de una EDP lineal de segundo orden en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \tag{3.1}$$

donde A_{ij}, B_i, F y G son funciones de las variables $x_i, \ldots, x_n$, pero no de la función u o de sus derivadas parciales. Si $G = 0$ se dice que es *homogénea*, y en otro caso *no homogénea*.

Notas:

1. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n tiene como solución una familia de funciones que depende de n constantes arbitrarias. En una EDP, la solución es una familia de funciones que depende de *funciones arbitrarias*, por lo que el problema de encontrar una solución particular puede ser tan complicado o más que el de encontrar la solución general.

2. Otra diferencia es que en las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden n basta conocer n soluciones linealmente independientes para formar la solución general, mientras que el las EDP lineales quizás el espacio de soluciones sea de dimensión infinita.

3.1.2. Formulación de un problema mediante una EDP

Un problema de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales consiste en encontrar una función u que sea solución de una EDP y de unas condiciones iniciales (CI) o condiciones de frontera (CF) dadas. Se dice que el problema está *bien formulado* cuando

1. existe al menos una solución,

2. existe a lo más una solución,

3. la solución depende de forma continua de los datos.

3.1.3. El principio de superposición para EDP lineales

Sea el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} &\underline{\text{Problema P}} \\ L(u) &= G \\ M_1(u) &= g_1 \\ M_2(u) &= g_2 \\ &\ldots \\ M_n(u) &= g_n \end{aligned}$$

donde las ecuaciones $M_1(u) = g_1, \ldots, \; M_n(u) = g_n$ representan condiciones iniciales (CI) o de frontera (CF), y L es un operador diferencial en derivadas parciales (por ejemplo, para la ecuación dada en (3.1), el operador diferencial lineal es $L := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F = G$). Se definen $(n+1)$ problemas asociados dados por

Problema 0	Problema 1	...	Problema n
$L(u_0) = G$	$L(u_1) = 0$	...	$L(u_n) = 0$
$M_1(u_0) = 0$	$M_1(u_1) = g_1$	...	$M_1(u_n) = 0$
...	...	...	...
$M_n(u_0) = 0$	$M_n(u_1) = 0$	...	$M_n(u_n) = g_n$

Entonces $u := u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ es solución del problema P. La forma de tratar cada uno de los problemas (1) al (n) es la siguiente: Tratamiento del problema (i): Sean $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$, soluciones de $L(u_i) = 0$, $M_1(u_i) = 0$, $M_2(u_i) = 0$,..., $M_{i-1}(u_i) = 0$, $M_{i+1}(u_i) = 0$,..., $M_n(u_i) = 0$. Se supone además que $g_i = c_1 M_i(\phi_1) + c_2 M_i(\phi_2) + \ldots + c_n M_i(\phi_n) + \ldots$. Entonces

$$u_i := c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n + \ldots$$

es solución del problema (i).

3.2. Modelos matemáticos de ciertos problemas físicos

3.2.1. La ecuación de ondas

El problema de la cuerda vibrante

Introducción. Uno de los problemas más importantes de las matemáticas aplicadas es la modelización y solución del movimiento vibratorio de una cuerda tensa. Su sencillez y su ubicuidad (la misma ecuación describe este fenómeno físico, la vibración longitudinal de un rodillo delgado o la transversal de una viga) lo hacen uno de los ejemplos típicos y más interesantes de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales.

En esta sección se determinará la ecuación del movimiento a partir de consideraciones físicas realizadas sobre una simplificación del problema. Como todo modelo matemático, presenta una visión esquemática, pero operativa, de un problema real y, lo más interesante, produce una solución que luego puede ser contrastada con la realidad, proporcionando una alta concordancia con los resultados de los experimentos.

Requerimientos previos y notaciones. Los conceptos matemáticos usados son muy pocos: la definición de derivada de una función así como de derivada parcial de una función de varias variables, junto con su significado geométrico. Se deberá recordar que, para ángulos pequeños, el valor del seno es muy próximo al de la tangente. Los conceptos físicos requeridos son el de velocidad, aceleración y densidad lineal. Se debe recordar la formulación de la segunda ley de Newton del movimiento (la fuerza ejercida sobre un cuerpo es igual a su masa por la aceleración que adquiere).

Las notaciones usadas son las usuales: dada una función u de varias variables, se denotará por u_x la derivada parcial respecto a la variable x, u_{xx} la derivada parcial de segundo orden respecto a la variable x, y análogamente para otras variables. El significado de otras notaciones usadas será indicado a lo largo del texto.

Construcción del modelo. El objeto físico es una cuerda de longitud l fija en sus extremos, sometida a cierta tensión, que se desplaza más allá de su posición de equilibrio y luego se suelta. Se pretende conocer la posición de cualquier punto de la cuerda en cada instante a partir del momento en que se suelta.

Comenzamos por realizar una serie de simplificaciones del problema:

1. Se supone que el desplazamiento inicial se realiza en un plano que contiene al segmento rectilineo entre los dos puntos. Es previsible entonces que la cuerda se mueva en ese plano. El problema queda, pues, reducido a uno bidimensional. Será suficiente decir a qué distancia de la recta de reposo se encuentra cada uno de los puntos de la cuerda (puntos descritos por una coordenada $x \in [0, l]$) en el instante $t \geq 0$, distancia dada por el valor $u(x, t)$ de una función

$$u : [0, l] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

   La incógnita del problema es, entonces, no un número, sino *una función* u como la anterior.

2. Consideraciones físicas naturales exigen que la solución sea, al menos, una función continua: no se está analizando la posibilidad de una ruptura de la cuerda y no es aceptable que a lo largo del tiempo se produzcan saltos en la posición de la misma.

3. La cuerda es flexible (se puede deformar) y elástica (tiende a volver a la posición de equilibrio), así como que la tensión de la cuerda se produce siempre en la dirección tangente a la curva que describe la forma de la cuerda en cada punto y en cada momento.

4. La cuerda es homogénea, de forma que las deformaciones se producen por igual en toda su extensión, y así la tensión es constante a lo largo de la misma.

5. Se desprecia el peso de la cuerda. Al menos, se supone que no es significativo respecto a la tensión.

6. No se aceptan deformaciones importantes respecto a la posición de equilibrio. Físicamente, se está pensando más en la cuerda tensada de una guitarra o de un piano, antes que en la cuerda utilizada por unos niños saltando.

7. Relacionado con lo anterior, se permite sólo que la pendiente respecto a la horizontal en cada punto sea pequeña. No es tolerable que la cuerda presente, en su posición inicial o en sucesivos momentos, picos.

Ecuación del movimiento. El movimiento de la cuerda es solución de la siguiente ecuación, llamada *ecuación de ondas unidimensional*:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{donde } c^2 = \frac{T}{\rho},$$

siendo T la tensión de la cuerda y ρ su densidad lineal. Si actúa una fuerza externa f obtenemos:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{f}{\rho}, \quad \text{donde } c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Obtención de la ecuación del movimiento. Se considera un fragmento de la cuerda como en la Figura 3.1. Aquí, la tensión es T. Interesa

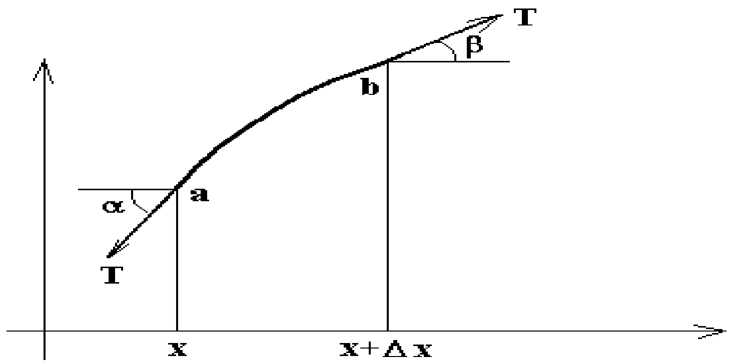

Figura 3.1: Un fragmento de la cuerda

solamente la componente vertical de la tensión, pues es la única que influye sobre el desplazamiento vertical. La fuerza vertical que se ejerce sobre el fragmento de cuerda es, pues,

$$T \sin\beta - T \sin\alpha.$$

Denotamos por ρ la densidad lineal de la cuerda, por ΔS la longitud del arco. La segunda ley de Newton asegura que la fuerza vertical ejercida sobre el fragmento de cuerda es igual a la masa del mismo por su aceleración, que es u_{tt}. Se tiene, pues,

$$T \sin\beta - T \sin\alpha = \rho.\Delta s.u_{tt}. \tag{3.2}$$

Las simplificaciones hechas permiten trabajar con la siguiente aproximación: la longitud Δs del fragmento se substituye por Δx (gracias al pequeño valor de la pendiente), y el seno de un ángulo como α o β por su tangente (gracias, ota vez, a que los ángulos son pequeños), con lo que se obtiene

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} u_{tt}.$$

Se sabe que $\tan\alpha = u_x|_x$ (con esta notación se quiere indicar el resultado de calcular la derivada respecto a x de la función u, evaluada en el punto de abcisa x) y, análogamente, $\tan\beta = u_x|_{x+\Delta x}$ (todo ello en un cierto valor de $t \geq 0$). Resulta

$$\frac{1}{\Delta x}[u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x] = \frac{\rho}{T} u_{tt}.$$

Se hace ahora $\Delta x \to 0$ (por cierto, a medida que Δx sea más pequeño las aproximaciones realizadas son más exactas). Obsérvese que el primer miembro tiende a la derivada de segundo orden de la función u respecto de la variable x, calculada en el punto (x, t). Se obtiene

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{3.3}$$

donde $c^2 = T/\rho$. Se obtiene la llamada *ecuación unidimensional de la cuerda* o *ecuación unidimensional de onda*.

Si existe una fuerza adicional f que se ejerce sobre la unidad de longitud de la cuerda (fuerza que podría ser, por ejemplo, la de gravitación, o una presión ejercida sobre la cuerda, o la de resistencia al movimiento si este se realiza en un medio viscoso), la ecuación (3.2) se convierte en

$$f\Delta s + T \sin\beta - T \sin\alpha = \rho.\Delta s.u_{tt}$$

y el mismo procedimiento anterior produce la *ecuación unidimensional de onda con movimiento forzado*:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{f}{\rho}, \tag{3.4}$$

Algunas consideraciones adicionales. De momento, sólo nos hemos preocupado por el establecimiento de la ecuación del movimiento. La solución matemática del problema físico real requiere, por supuesto, precisar ciertas *condiciones iniciales* (como, por ejemplo, la posición inicial de la cuerda y su velocidad inicial) y *condiciones de contorno* (como, por ejemplo, el hecho de que los extremos estén fijos, o que, siendo variables, la pendiente de la curva en ellos sea horizontal).

Conviene, sin embargo, deslindar el establecimiento de las ecuaciones del movimiento (3.3) y (3.4) de estas posibles consideraciones adicionales. Se podría, por ejemplo, prescindir de la exigencia de que los extremos estén fijos (nada de esto aparece en la forma de obtener la ecuación) o de que la cuerda tenga una longitud finita.

Las condiciones iniciales se establecen diciendo a) cuál es el desplazamiento en el instante $t = 0$, lo que se indica proporcionando una función

$$g : [0, l] \to I\!R,$$

y exigiendo que $u(x,0) = g(x)$, $x \in [0,l]$. La función g será continua, y para que las consideraciones realizadas anteriormente sean aplicables, debería tener un tipo de restricciones adecuadas que el lector puede deducir de lo dicho anteriormente, como que no se aparte mucho de la posición de equilibrio, o que las pendientes no sean importantes, etc. y b) cuál es la velocidad inicial de la cuerda, proporcionando la función

$$h : [0,1] \to I\!R,$$

y exigiendo que $\partial u/\partial x(x,0) = h(x)$. Restricciones adecuadas sobre la función h serán necesarias.

Las condiciones de contorno pueden concretarse exigiendo que la solución u que se obtenga verifique $u(0,t) = u(l,t) = 0$ para cualquier $t \geq 0$, es decir, que mantenga fijos los extremos de la cuerda a lo largo del tiempo, o, por ejemplo, que $\partial u/\partial x(0,t) = \partial u/\partial x(l,t) = 0$, $t \geq 0$.

Cuestionario de autoevaluación.

1. Dibujar una gráfica que represente la posición inicial g de una cuerda extendida entre los puntos de abcisa 0 y 1 donde g está dada por alguna de las siguientes funciones (k es una constante):

   a) $g(x) := kx(1-x)$.

   b) $g(x) := k \sin 2\pi x$.

   c) $g(x) := k(x - x^3)$.

   d) $g(x) := k(x^2 - x^4)$.

   e) $g(x) := k \sin^2 \pi x$.

   f) $g(x) := k(x^3 - x^5)$.

2. Suponer que la cuerda se mueve en un medio viscoso. Se acepta que la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad. Establecer la ecuación del movimiento.

3. Suponer ahora que la fuerza de recuperación de la cuerda (su tendencia a volver a la posición de equilibrio) es proporcional al desplazamiento desde la posición de equilibrio. Establecer la correspondiente ecuación del movimiento (Nota: la ecuación resultante se llama *ecuación del telégrafo*).

4. Considerar la vibración transversal de una viga uniforme. El momento M en un punto puede escribirse como

$$M = -EIu_{xx},$$

donde EI se llama la *rigidez de flexión*, E es el módulo de elasticidad, I el momento de inercia de la sección transversal. Deducir la ecuación del movimiento.

Soluciones al cuestionario.

1.

2. $$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx},$$

   donde a es una constante.

3. $$u_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx},$$

   donde a y b son constantes.

4. $$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0,$$

   donde $c^2 = EI/\rho A$, siendo ρ la densidad y A es el área de la sección transversal de la viga.

La ecuación de la membrana vibrante

Se hacen suposiciones análogas a las de la cuerda vibrante. La ecuación que gobierna el desplazamiento $u(x, y, t)$ es

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \text{ donde } c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

siendo T la tensión por unidad de longitud y ρ la densidad de la unidad de superficie. Si actúa una fuerza externa f obtenemos:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{f}{\rho}, \quad \text{donde } c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Transmisión de ondas en un medio elástico

La correspondiente versión tridimensional de las anteriores ecuaciones es la siguiente: La vibración se produce en un volumen. $u(x, y, z, t)$ representa el desplazamiento en la dirección x, $v(x, y, z, t)$ en la dirección y y $w(x, y, z, t)$ en la dirección z. Denotando $\mathbf{u} = (u, v, w)$, se tiene

$$(\lambda + \mu).grad\ div\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho.\mathbf{u_{tt}},$$

siendo ρ la densidad, λ y μ ciertas constantes asociadas al material.

Como casos particulares considérese

1. $div\mathbf{u} = 0$. Entonces
$$\mathbf{u}_{tt} = c^2\nabla^2\mathbf{u},$$
donde $c = \sqrt{\mu/\rho}$ es la velocidad de propagación de la onda.

2. $rot\mathbf{u} = 0$. Entonces
$$\mathbf{u}_{tt} = c^2\nabla^2\mathbf{u},$$
siendo de nuevo $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ la velocidad de propagación de la onda.

3.2.2. La ecuación del calor

Se considera un dominio D^* acotado por una superficie B^*. La función $u(x, y, z, t)$ denota la temperatura en un punto (x, y, z) en el instante t. La ley de Fourier afirma que la transmisión de calor es proporcional al gradiente de la temperatura. Estonces

$$\mathbf{v} = -K.\nabla u,$$

donde K es una cierta constante llamada la *conductividad térmica del cuerpo.* Dado un dominio $D \subset D^*$ acotado por una superficie B, la cantidad de calor que abandona D por unidad de tiempo es

$$\int\int_B \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle ds,$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie B. Aplicando el Teorema de la Divergencia y utilizando la Ley de Fourier se obtiene

$$\int\int_B \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle ds = -K \int\int\int_D \nabla^2 u\ dxdydz.$$

Por otra parte, la cantidad de calor en D en un cierto instante es

$$\iiint_D \sigma\ \rho\ u\ dxdydz,$$

donde σ es el calor específico del cuerpo y ρ su densidad. La variación de calor en D con respecto al tiempo es, pues,

$$-\frac{d}{dt}\left[\iiint_D \sigma\ \rho\ u\ dxdydz\right].$$

Identificando las anteriores ecuaciones y teniendo en cuenta que $D \subset D^*$ es un volumen arbitrario, se obtiene

$$u_t = k\nabla^2 u,$$

donde $k := K/(\sigma.\rho)$, llamada la *ecuación del calor*.

3.2.3. La ecuación de Laplace

Se supone ahora dos masas m y M situadas en $\mathbf{x}_0 := (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{x} := (x, y, z)$, respectivamente, sometidas a la atracción mutua. La fuerza $\mathbf{F}$ que se ejerce en $\mathbf{x}$ por unidad de masa es

$$\mathbf{F} = \frac{-m[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0]}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}$$

(se toman las unidades de modo que la constante de gravitación sea 1). Es inmediato que existe una función escalar

$$\phi(x, y, z) = \frac{m}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

(llamada el *potencial del campo gravitatorio*) que verifica

$$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}.$$

Resulta que $\phi(x, y, z)$ representa el trabajo realizado para traer una partícula de masa unidad desde el infinito hasta la posición (x, y, z) contra el campo gravitatorio.

Cuando se trata del campo gravitatorio producido por un cuerpo D de masa m, no necesariamente reducido a un punto, se obtienen relaciones similares. Precisamente, el potencial es ahora

$$\iiint_D \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} dx_0 dy_0 dz_0,$$

donde ρ denota la densidad. El potencial ϕ satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

3.3. EDP lineales de segundo orden. Formas canónicas

3.3.1. Clasificación

Una EDP lineal de segundo orden en n variables es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \tag{3.5}$$

donde $A_{ij} = A_{ji},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ y B_i, F, G son funciones de las variables $x_1, \ldots, x_n$ definidas en cierto dominio.

El caso de dos variables x, y se reduce a

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \tag{3.6}$$

Se supone que los coeficientes no se anulan simultáneamente, y que son funciones con derivadas parciales de segundo orden continuas.

Definición 110 *Una ecuación como (3.6) se dice que es, en un punto* (x_0, y_0)*,*

1. hiperbólica*, si* $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0).C(x_0, y_0) > 0$*,*
2. parabólica*, si* $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0).C(x_0, y_0) = 0$*,*
3. elíptica*, si* $B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0).C(x_0, y_0) < 0$*.*

3.3.2. Cambio de variable

Se trata de realizar un cambio de variables con jacobiano distinto de cero de modo que una ecuación general como (3.6) se convierta en una ecuación en una forma más simple, llamada *forma canónica*.

Sean ξ y η las nuevas variables. Sustituyendo en la ecuación (3.6) se obtiene una ecuación del mismo tipo

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*. \tag{3.7}$$

donde

$$\begin{aligned} A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\ D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\ E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F^* &= F \\ G^* &= G \end{aligned}$$

Se observa que la forma general de la ecuación no varía, así como su carácter tampoco, al ser

$$(B^*)^2 - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC),$$

siendo J el jacobiano de la transformación.

Por comodidad, una ecuación como (3.6) se escribirá

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H. \tag{3.8}$$

y la nueva ecuación obtenida cambiando de variables

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^*. \tag{3.9}$$

El objetivo es conseguir que A^* y C^* sean cero, si fuera posible. Observar que esto conduce a dos ecuaciones del mismo tipo, que se expresan genéricamente como

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0. \tag{3.10}$$

Sea ζ una solución de (3.10). Consideramos la ecuación $\zeta(x, y) = k$, siendo k una constante arbitraria. Esto define, si se dan las condiciones del teorema de la función implícita, y como función de x en un entorno de x_0. Esta curva verifica

$$y\,' = \frac{-\zeta_x}{\zeta_y}.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.10) se obtiene

$$A(y\,')^2 - B(y\,') + C = 0. \tag{3.11}$$

Tiene dos soluciones, que representan dos ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas *ecuaciones características*:

$$y\,' = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{3.12}$$

$$y\,' = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \tag{3.13}$$

Cada una de estas ecuaciones proporciona una familia de curvas solución, precisamente

$$\{f_1(x,y) = c_1 :\ c_1 \in I\!R\},$$
$$\{f_2(x,y) = c_2 :\ c_2 \in I\!R\}.$$

Las nuevas variables están dadas por

$$\xi(x,y) = f_1(x,y), \tag{3.14}$$

$$\eta(x,y) = f_2(x,y). \tag{3.15}$$

3.3.3. Formas canónicas

Aplicando el anterior procedimiento a cada uno de los tipos de EDP lineales de segundo orden en dos variables se obtiene

Caso hiperbólico

Se trata del caso $B^2 - 4AC > 0$. Se obtienen dos familias reales y distintas de curvas características. La ecuación canónica, después de realizar el cambio de variables indicado en (3.14), aparece como

$$u_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \ \ \text{[primera forma canónica]}. \tag{3.16}$$

Si se hace ahora el cambio de variable

$$\alpha := \xi + \eta, \quad \beta := \xi - \eta,$$

se obtiene

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \text{ [segunda forma canónica].} \tag{3.17}$$

Caso parabólico

Se trata del caso $B^2 - 4AC = 0$. Se obtiene una sola familia real $\{f(x,y) = c : \ c \in I\!R^n\}$ de curvas características. Se realiza el cambio de variables $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$, siendo g una función arbitraria de modo que el jacobiano de la transformación no se anule. La ecuación canónica, después de realizar el cambio de variables, aparece como

$$u_{\xi\xi} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{3.18}$$

que también puede escribirse como $u_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Caso elíptico

En este caso $B^2 - 4AC < 0$. Las ecuaciones características no son reales. Aparecen dos soluciones complejas conjugadas. Se obtienen dos familias complejas de curvas y se toma, como antes, ξ y η, ahora funciones complejas. Para manejar funciones reales se realiza otro cambio de variables:

$$\alpha := \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta := \frac{1}{2i}(\xi - \eta).$$

La forma canónica es ahora

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{3.19}$$

3.4. El problema de Cauchy

Dada una ecuación de segundo orden

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{3.20}$$

donde A, B, C son funciones de (x, y), se proporciona una curva L_0 en el plano OXY y dos condiciones que debe verificar la solución u a lo largo de esa curva. Para formularlas adecuadamente, se considera que la curva L_0 está dada paramétricamente mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x := x_0(\lambda), \\ y := y_0(\lambda). \end{cases}$$

Se proporcionan ahora dos funciones f y g del parámetro λ. El *Problema de Cauchy* consiste en obtener una función u de las variables x e y, definida en un entorno de la curva L_0, que sea solución de la ecuación (3.20), y que satisfaga

$$\begin{cases} u[x_0(\lambda), y_0(\lambda)] = f(\lambda), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}[x_0(\lambda), y_0(\lambda)] = g(\lambda), \end{cases} \quad \text{para todo } \lambda, \tag{3.21}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ denota la derivada direccional de u en la dirección de un vector unitario $\mathbf{n}$ a la curva L_0 en un punto, vector que se supone a la izquierda de la curva cuando ésta se recorre con valores crecientes del parámetro.

Es conocido que al utilizar como parámetro la longitud s de la curva, el vector normal unitario está dado por

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right).$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle = -\frac{dy}{ds}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dx}{ds}.\frac{\partial u}{\partial y}$$

Derivando respecto a λ la primera de las ecuaciones en (3.21) resulta el sistema en las incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy_0}{d\lambda} = f\,'(\lambda), \\ -\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dy_0}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dx_0}{ds} = g(\lambda) \end{cases}$$

(donde las derivadas parciales están evaluadas en los puntos $(x_0(\lambda), y_0(\lambda))$). Este sistema tiene solución, pues su determinante es distinto de cero. Se obtienen así las derivadas parciales de u en los puntos de la curva L_0. Para obtener las derivadas parciales de segundo orden se calculan sus derivadas respecto a λ y se utiliza la (EDP), resultando el sistema en las incógnitas

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dy_0}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy_0}{d\lambda} \\ A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, u_x, u_y) \end{array} \right.$$

sistema que tiene solución siempre que L_0 no sea una curva característica. El proceso se puede continuar de modo que se obtengas las derivadas parciales sucesivas de u y, por tanto, la expresión de la solución u como suma de su desarrollo de Taylor. Esto es lo que constituye el *Teorema de Cauchy-Kowalewsky.*

3.4.1. Aplicación a la ecuación unidimensional de ondas

El caso homogéneo sin condiciones de frontera

Considérese el siguiente problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{array} \right. \tag{3.22}$$

que representa el movimiento de una cuerda con desplazamiento inicial f y velocidad inicial g. Es un típico problema de Cauchy, siendo la EDP una ecuación hiperbólica. El método de las características (es decir, la reducción a la forma canónica, ver la subsección 3.3.2) proporciona las nuevas variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi := x + ct, \\ \eta := x - ct. \end{array} \right.$$

La ecuación canónica es $u_{\xi\eta} = 0$, con solución general $\{u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta) : \ \phi, \psi \text{ funciones arbitrarias}\}$. En las variables originales, $\{u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) : \ \phi, \psi \text{ funciones arbitrarias}\}$. Particularizando al caso de las condiciones dadas, la solución de D'Alembert del problema de la cuerda vibrante es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau. \tag{3.23}$$

El caso homogéneo con condiciones de frontera

Se supone ahora que la cuerda es finita extendida en $[0, l]$. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

El tratamiento es el mismo, haciendo una extensión impar y $2l$-periódica de las funciones f y g al resto de la recta. La solución de D'Alembert (3.23) satisface también las condiciones de frontera.

El caso no homogéneo

Se trata ahora de un movimiento forzado. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h^*(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g^*(x) \end{cases} \tag{3.25}$$

Se hace el cambio de variable $y = ct$ y se obtiene

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = h(x,y) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_y(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.26}$$

Si R denota el interior del triángulo de la Figura 3.2,

$$\iint_R (u_{xx} - u_{yy}) dxdy = \iint_R h(xy) dxdy.$$

Usando el Teorema de Green, resulta

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct] + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\iint_R h(xy)dxdy. \tag{3.27}$$

3.5. El Método de Separación de Variables

3.5.1. Preliminares

El Método de Separación de Variables es uno de los primeros utilizados en la solución de ecuaciones en derivadas parciales, y es esencialmente debido

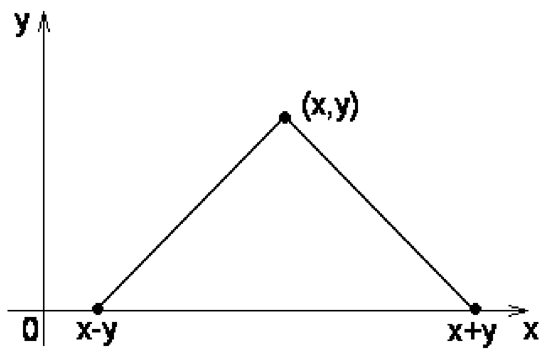

Figura 3.2: Triángulo de integración

a J. Bernouilli. Básicamente consiste en escribir la solución de modo que sea producto de una función de x y de una de y, esperando que efectivamente la solución se comporte de esa forma. Muchas ecuaciones de la física matemática tienen soluciones con esa propiedad, como veremos en los ejemplos.

3.5.2. Planteamiento.

Consideramos una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, lineal y homogénea, con coeficientes variables, escrita en forma canónica:

$$a(x,y)u_{xx} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_{yx} + f(x,y)u = 0. \tag{3.28}$$

Suponemos que la solución $u(x,y)$ puede escribirse de la forma

$$u(x,y) = X(x).Y(y), \tag{3.29}$$

donde X es una función sólo de la variable x, mientras que Y lo es, tan sólo, de la variable y.

Substituyendo en la ecuación (3.28) se obtiene

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0. \tag{3.30}$$

Supongamos que sea posible encontrar una función p de las dos variables x e y de modo que, al dividir la ecuación (3.30), se obtenga

$$\begin{aligned} &a_1(x)X''Y + b_1(y)XY''+ \\ &\quad +a_2(x)X'Y + b_2(x)XY' + [a_3(x) + b_3(y)]XY = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Basta ahora dividir la anterior ecuación por XY para obtener

$$\left[a_1\frac{X''}{X}+a_2\frac{X'}{X}+a_3\right]=-\left[b_1\frac{Y''}{Y}+b_2\frac{Y'}{Y}+b_3\right] \tag{3.32}$$

El miembro de la izquierda es una función de la variable x, mientras que el de la derecha lo es de la variable y. Los valores de x e y en principio son arbitrarios. La anterior igualdad, válida para cualquier valor de x e y, sólo puede darse si ambos lados de la misma son constantes. Obtenemos un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, precisamente

$$\begin{aligned}a_1\frac{X''}{X}+a_2\frac{X'}{X}+a_3&=\lambda,\\ b_1\frac{Y''}{Y}+b_2\frac{Y'}{Y}+b_3&=-\lambda.\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$a_1X''+a_2X'+(a_3-\lambda)X=0, \tag{3.33}$$

$$b_1Y''+b_2Y'+(b_3+\lambda)Y=0. \tag{3.34}$$

Se trata, pues, de resolver dos EDO de segundo orden, lineales, con coeficientes variables.

3.5.3. Algunas consideraciones sobre las condiciones de contorno

Normalmente, en el tratamiento de las EDP's consideradas, aparecen condiciones formuladas de las maneras siguientes:

$$[u]_{x=x_0}=\alpha,\quad \text{Condición de Dirichlet}, \tag{3.35}$$

$$[u_x]_{x=x_0}=\beta,\quad \text{Condición de Neumann}, \tag{3.36}$$

$$[u_x+hu]_{x=x_0}=\gamma,\quad \text{Condición mixta}. \tag{3.37}$$

A la vista del apartado anterior, trataremos la posibilidad (no siempre con éxito) de separar no sólo la función u, sino también las condiciones de contorno. Para lograrlo, en ciertos casos, será conveniente usar un sistema de coordenadas adecuado al problema (por ejemplo, si las condiciones de contorno se dan sobre la frontera de un paralelogramo, será conveniente usar un sistema cartesiano, mientras que si las condiciones se dan sobre la frontera de un círculo, convendrá usar coordenadas polares). Además, las condiciones de contorno en, digamos, x_0, deben contener las derivadas de u respecto a x, tan sólo, con coeficientes que dependan sólo de x.

3.5.4. Problemas homogéneos

Un ejemplo ya tratado: La ecuación de ondas unidimensional

La formulación matemática es la siguiente (ver la sección 3.4.1):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \tag{3.38}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.39}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{3.40}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{3.41}$$

$$u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{3.42}$$

Este problema fue tratado en su momento (ver la ecuación 3.23) obteniéndose la solución de D'Alembert. Esta vez usaremos el Método de Separación de Variables: suponemos que la solución u puede escribirse como $U(x,t) = X(x).T(t)$. Substituyendo en la EDP se obtiene, siguiendo las consideraciones hechas en la sección anterior,

$$X'' - \lambda X = 0, \tag{3.43}$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0. \tag{3.44}$$

Se obtiene, además, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Es inmediato, usando en $X'' - \lambda X = 0$ las condiciones dadas, que $\lambda < 0$ para que exista solución no trivial, con lo que la solución adopta la forma

$$X(x) = A \cos \sqrt{-\lambda} x + B \sin \sqrt{-\lambda}\ x.$$

De nuevo usando las condiciones iniciales,

$$\sqrt{-\lambda} l = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Se obtiene una sucesión de *valores propios*

$$\lambda_n := -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

y las correspondientes *funciones propias*

$$\sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Para esos valores propios se resuelve la ecuación correspondiente a T, con lo que se obtiene

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + D_n \cos \frac{n\pi c}{l} t, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

siendo C_n y D_n constantes arbitrarias, y las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi x}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Usando el principio de superposición, se forma una serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi x}{l} x. \tag{3.45}$$

Para que satisfaga las condiciones iniciales se debe verificar

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$
$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Así, si f y g tienen extensiones impares y $2l$-periódicas que son desarrollables en serie de Fourier, resulta

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

que, sustituidos en la ecuación (3.45) hace que ésta sea la solución del problema de la ecuación de ondas unidimensional con las condiciones dadas.

La ecuación del calor

Se trata de la difusión del calor en una varilla homogénea de longitud l, cuyos extremos se mantienen a temperatura constante, y en la que existe una distribución inicial de temperatura. Precisamente

$$u_t = ku_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{3.46}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{3.47}$$

$$u(l,t) = 0 \tag{3.48}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{3.49}$$

Se buscan soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$. Separando las ecuaciones y las condiciones iniciales resulta

$$X'' + \alpha^2 X = 0,\ X(0) = 0,\ X(l) = 0.$$

así como

$$T' + \alpha^2 kT = 0.$$

Para la primera ecuación se obtiene la sucesión de valores propios

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots$$

y de funciones propias

$$X_n = B_n \sin\frac{\pi n x}{l},\ n = 1, 2, \ldots$$

siendo B_n constantes arbitrarias. Resolviendo la ecuación en T para esos valores propios resulta

$$T_n = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt},\ n = 1, 2, \ldots$$

De nuevo usando el método de superposición,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{3.50}$$

Como $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$, resulta

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

que, llevado a (3.50), proporciona la solución.

La ecuación de Laplace

Como ejemplo, se considera la distribución de temperatura en una placa rectangular en el plano OXY, con los lados verticales aislados, el lado sobre el eje OX a una temperatura dada $f(x)$ y el lado paralelo a temperatura constante 0 (se supone que se ha alcanzado una situación estable con el tiempo). Así, si $u(x,y)$ denota la temperatura en el punto (x,y), se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = f(x), \\ u(x,b) = 0, \\ u_x(0,y) = 0,\ 0 < y < b, \\ u_x(a,y) = 0,\ 0 < y < b. \end{aligned}$$

Se usa el Método de Separación de Variables, escribiendo

$$u(x,y) = X(x).Y(y).$$

Se obtiene, después de sustituir en la EDP, las dos EDO

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X = 0, \\ Y'' + \lambda Y = 0, \end{aligned}$$

donde λ es una constante. Además, la separación de las condiciones de contorno produce, para evitar la solución trivial (que, si f no es idénticamente nula, no es solución), $Y(b) = 0$, $X'(0) = X'(a)$. Necesariamente $\lambda \leq 0$, luego escribiremos $\lambda = -\alpha^2$ con $\alpha \geq 0$.

La primera ecuación proporciona la solución general

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x.$$

Usando las condiciones de contorno, $\alpha = (n\pi)/a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $B = 0$, luego

$$X(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Haciendo lo mismo con la segunda EDO, resulta, usando la condición de contorno,

$$Y(y) = E\sinh\alpha(y - b).$$

Por el Principio de Superposición,

$$u(x,y) = \frac{b-y}{b}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b)\right].$$

Usando la condición para $y = 0$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{-n\pi b}{a}\right],$$

que es la serie de Fourier de la extensión par y $2a-$periódica de f. Por tanto, los coeficientes vienen dados por

$$a_0 = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx.$$

3.5.5. Problemas no homogéneos.

En este capítulo hemos considerado problemas homogéneos. Ahora, en esta sección, trataremos el caso de un problema no homogéneo, aunque un estudio más detallado se realizará posteriormente. Analizaremos una clase importante de estos problemas, aquella en la que el término no homogéneo depende sólo de la variable espacial:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + F(x), \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= A, \quad t > 0, \\ u(l,t) &= B, \quad t > 0. \end{aligned}$$

La técnica consiste en escribir la solución de modo que el problema pase a ser uno de tipo homogéneo. Más precisamente:

Se supone que la solución puede escribirse como

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x).$$

Basta ahora substituir en la EDP para obtener

$$v_{tt} = c^2(v_{xx} + U'') + F(x).$$

Se supone ahora que U es solución de la EDO

$$c^2 U''(x) + F(x) = 0.$$

Entonces, resulta que v satisface

$$v_{tt} = c^2 v_{xx},$$

es decir, una EDP homogénea. Las condiciones iniciales ahora se transforman en

$$\begin{aligned} v(x,0) + U(x) &= f(x), \\ v_t(x,0) &= g(x), \\ v(0,t) + U(0) &= A, \\ v(l,t) + U(l) &= B. \end{aligned}$$

Si suponemos, pues, que U es solución de la siguiente EDO con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} c^2 U''(x) + F(x) &= 0, \\ U(0) &= A, \\ U(l) &= B. \end{aligned}$$

(solución que consideramos a partir de este momento conocida, y, por cierto, que tiene una expresión sencilla obtenida integrando dos veces la función $-(1/c^2)F$ y utilizando las condiciones de contorno dadas para obetner los valores de las dos constantes que aparecen) entonces, finalmente, v debe ser una solución del siguiente problema homogéneo, que se resuelve usando las técnicas desarrolladas en este mismo capítulo:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx}, \\ v(x,0) &= f(x) - U(x), \\ v_t(x,0) &= g(x), \\ v(0,t) &= 0, \\ v(l,t) &= 0. \end{aligned}$$

3.6. Transformada Finita de Fourier.

3.6.1. Introducción.

La transformada finita de Fourier es una modificación de las transformadas seno y coseno de Fourier, definidas en la sección 2.4; en aquel momento se introdujeron ambas transformadas, casos particulares de la de Fourier. Precisamente, dada una función integrable Lebesgue, la transformada seno tenía como expresión

$$\mathcal{FS}[f](y) := \int_0^{+\infty} \sin(xy) f(x) dx,$$

mientras que la transformada coseno era

$$\mathcal{FC}[f](y) := \int_0^{+\infty} \cos(xy) f(x) dx.$$

Cuando se considera la función f definida en un intervalo finito, que, por conveniencia se puede elegir $[0, \pi]$, y se considera que f es continua a trozos en él, se obtiene (salvo un factor), las correspondientes transformadas finitas. Exactamente

$$\mathcal{FFS}[f](y) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(xy) f(x) dx,$$

y

$$\mathcal{FFC}[f](y) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(xy) f(x) dx.$$

Observar que la evaluación de la transformada finita seno en los puntos $y = n,\ n = 1, 2, \ldots$ proporciona, precisamente, los coeficientes b_n de la serie de Fourier de una función f continua a trozos que sea impar y 2π-periódica . Análogamente, la evaluación de la transformada finita coseno en los puntos $y = 0, 1, 2, \ldots$ proporciona los coeficientes a_n de la serie de Fourier de una función f continua a trozos que sea par y 2π-periódica.

Supongamos f integrable en $[0, \pi]$. Consideremos su extensión impar y 2π-peródica, denotada de la misma manera. Supongamos que f verifique que, para un punto x, exista un entorno $[x - \delta, x + \delta]$ donde se cumplan las condiciones de Jordan o de Dini (ver las proposiciones 88 y 89) . Entonces se puede escribir

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{FFS}[f](n) \sin(nx).$$

Análogamente, si denotamos de nuevo por f su extensión par y 2π-periódica, y si f verifica, como antes, para un punto x las condiciones de Jordan o de Dini en un entorno, se puede escribir

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{\mathcal{FFC}[f](0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{FFC}[f](n)\cos(nx).$$

Los siguientes resultados son inmediatos (y se demuestran, simplemente, utilizando integración por partes):

Teorema 111 *Sea f una función definida en un intervalo $[0,\pi]$, con derivada continua a trozos en ese intervalo. Entonces, se tiene*

$$\mathcal{FFS}[f'](y) = \frac{2}{\pi}\left[f(\pi)\sin(\pi y)\right] - y\mathcal{FFC}[f](y),$$

y

$$\mathcal{FFC}[f'](y) = \frac{2}{\pi}\left[f(\pi)\cos(\pi y) - f(0)\right] + y\mathcal{FFS}[f](y).$$

La aplicación de estos resultados a la función derivada segunda proporciona

Corolario 112 *Sea f una función definida en un intervalo $[0,\pi]$, con derivada de segundo orden continua a trozos en ese intervalo. Entonces, se tiene*

$$\mathcal{FFS}[f''](y) = \frac{2}{\pi}\left[f'(\pi)\sin(\pi y) + yf(0) - yf(\pi)\cos(\pi y)\right] - y^2\mathcal{FFS}[f](y).$$

Obviamente, un resultado análogo se puede formular para la transformada finita coseno:

Corolario 113 *Sea f una función definida en un intervalo $[0,\pi]$, con derivada de segundo orden continua a trozos en ese intervalo. Entonces, se tiene*

$$\mathcal{FFC}[f''](y) = \frac{2}{\pi}\left[f'(\pi)\cos(\pi y) - f'(0) + yf(\pi)\sin(\pi y)\right] - y^2\mathcal{FFC}[f](y).$$

3.6.2. Aplicaciones.

Una aplicación a la ecuación de ondas unidimensional.

Daremos ahora una aplicación a un problema de EDP: Se considera el movimiento de una cuerda de longitud π debido a una fuerza que actúa sobre ella. Se supone que la cuerda está fija en ambos extremos. La EDP que modeliza el comportamiento de la cuerda es

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,\\ u(x,0) = 0,\\ u_t(x,0) = 0,\\ u(0,t) = 0,\\ u(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Fijamos t y consideramos los términos de la ecuación como funciones de x. Si aplicamos la transformada finita seno a ambos lados de la EDP y tenemos en cuenta que es un operador lineal, lo que es inmediato a partir de la definición, obtenemos, evaluando los resultados en $y = n$,

$$\mathcal{FFS}[u_{tt}](n) - c^2 \mathcal{FFS}[u_{xx}](n) = \mathcal{FFS}[f](n). \tag{3.51}$$

Sea $U_n(t) := \mathcal{FFS}[u](n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\sin(nx)dx$ (recordar que se está considerando t fijo). Es sencillo obtener las transformadas del primer miembro:

$$\begin{aligned} \mathcal{FFS}[u_{tt}](n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{tt}(x,t)\sin(nx)dx = \\ = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\sin(nx)dx\right] = U_n''(t), \end{aligned}$$

lo que es aceptable si u es una función que tiene derivada de segundo orden continua respecto a t, de modo que se pueda derivar dentro de la integral considerada como una integral paramétrica. Por otra parte, y aplicando el Corolario 112,

$$\mathcal{FFS}(u_{xx})(n) = \frac{2}{\pi}[n.u(0,t) - n.u(\pi,t)\cos(n\pi)] - n^2.U_n(t),$$

lo que, a la vista de las condiciones de contorno para u, se convierte en

$$\mathcal{FFS}(u_{xx})(n) = -n^2.U_n(t).$$

Por otra parte, denotamos como F la transformada finita seno de f (siempre considerada como una función de x, ya que hemos fijado t), es decir

$$F(y,t) := \mathcal{FFS}[f](y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x,t)\sin(xy)dx.$$

De esta forma, la ecuación (3.51) resulta

$$U_n''(t) + c^2 n^2 U_n(t) = F(n,t).$$

Esta es una EDO en la incógnita U_n, cuya resolución puede hacerse por el método de variación de parámetros a partir de la solución de la correspondiente ecuación homogénea. Se obtiene

$$U_n(t) = A\cos(nct) + B\sin(nct) + \frac{1}{nc}\int_0^t F(n,\tau)\sin(nc(t-\tau))d\tau,$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Es posible determinar el valor de estas constantes, ya que los valores de U_n en 0 y el de su derivada en 0 son conocidos: precisamente

$$U_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\sin(nx)dx = 0,$$
$$U_n'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(x,0)\sin(nx)dx = 0,$$

en virtud de las condiciones iniciales que satisface u. Por tanto, se obtiene

$$U_n(t) = \frac{1}{nc}\int_0^t F(n,\tau)\sin(nc(t-\tau))d\tau.$$

Recordando que las evaluaciones de la transformada finita seno de una función impar y 2π-periódica no son otra cosa que sus coeficientes de Fourier en la serie en senos, obtenemos (de hecho, para la extensión impar y 2π-periódica de la función u como función de x)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty U_n(t)\sin(nx) = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{nc}\int_0^t F(n,\tau)\sin(nc(t-\tau))d\tau\right]\sin(nx),$$

ya que es claro que la serie de Fourier de la función u como función de x converge a $u(x,t)$ en cada punto, al tener esta función derivada en cada punto (respecto a x).

Una aplicación a la ecuación del calor unidimensional.

El problema consiste en calcular la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una varilla de longitud π, cuando se sabe que se genera calor dentro de ella a un ritmo de $g(x,t)$ por unidad de tiempo, así como que los extremos están aislados y que la distribución inicial de temperatura está dada por una función $f(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Se considera un valor fijo de t. Sea $U_n(t)$ la transformada finita coseno de la función $u(x,t)$ como función de x, es decir,

$$U_n(t) := \mathcal{FFC}[u](n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\cos(nx)dx.$$

Aplicamos las transformada finita coseno a ambos lados de la EDP, y la evaluamos en n. Se obtiene

$$\mathcal{FFC}[u_t](n) = \mathcal{FFC}[u_{xx}](n) + \mathcal{FFC}[g](n). \tag{3.52}$$

No es difícil calcular cada una de las transformadas que aparecen en esta ecuación:

$$\mathcal{FFC}[u_t](n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(x,t)\cos(nx)dx = U_n'(t),$$

en el caso, claro está, que sea posible derivar la integral paramétrica que define U_n, lo cual está asegurado ya que se supone que u tiene derivadas parciales continuas. Usando el Corolario 113 obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathcal{FFC}[u_{xx}](n) = \\ &\quad = \tfrac{2}{\pi}\left\{u_x(\pi,t)\cos(n\pi) - u_x(0,t) + n.u(\pi,t)\sin(n\pi)\right\} - n^2\mathcal{FFC}[u](n). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones impuestas a u, resulta

$$\mathcal{FFC}[u_{xx}](n) = -n^2 U_n(t).$$

Por otra parte, denotamos la transformada finita coseno de g como G. Precisamente

$$G(n,t) := \mathcal{FFC}[g](n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x,t)\cos(nx)dx.$$

La ecuación (3.52) se convierte en

$$U_n'(t) + n^2 U_n(t) = G(n,t). \tag{3.53}$$

Esta es una EDO lineal de primer orden. Las soluciones son

$$U_n(t) = \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} G(n,\tau)d\tau + Ae^{-n^2 t},$$

donde A es una constante arbitraria. Es posible determinar esta constante, ya que es inmediato que

$$U_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = A,$$

(por cierto, éste es el coeficiente de Fourier a_n de la extensión par y 2π-periódica de f), luego resulta

$$U_n(t) = \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} G(n,\tau)d\tau + \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx\right) e^{-n^2 t}.$$

Por tanto, la solución buscada (o, más bien, su extensión par y 2π-periódica) es

$$u(x,t) = \frac{U_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\cos(nx),$$

donde la función U_n está dada arriba.

3.7. Problemas de valores propios para ecuaciones diferenciales ordinarias

3.7.1. Sistemas de Sturm-Liouville.

Las ecuaciones en derivadas parciales estudiadas en las secciones anteriores poe el Método de Separación de Variables dieron lugar a ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$c_1(x)\frac{d^2u}{dx^2} + c_2(x)\frac{du}{dx} + [c_3(x)+\lambda]u = 0. \tag{3.54}$$

Consideramos las funciones

$$p(x) := e^{\int \frac{c_2}{c_1} dx}, \; q(x) := \frac{c_3}{c_1} p, \; s(x) := \frac{1}{c_1} p. \tag{3.55}$$

Utilizando estas funciones, la ecuación (3.54) se puede escribir

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + [q + \lambda s]u = 0, \tag{3.56}$$

conocida como *Ecuación de Sturm-Liouville*. Para simplificar la escritura, introducimos el operador diferencial L definido como

$$L := \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q.$$

La ecuación (3.56) puede, entonces, ser escrita en la forma

$$L[u] + \lambda s(x)u = 0. \tag{3.57}$$

Se supone que λ es un parámetro independiente de x, y p, q y s son funciones de una variable, de modo que q y s son continuas y p continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$.

La ecuación de Sturm-Liouville se llama *regular* en el intervalo $[a, b]$ cuando las funciones p y s son positivas en el intervalo $[a, b]$. Cuando el intervalo no es acotado o cuando p o s se anula en un extremo o en ambos de un intervalo finito, la ecuación se llama *singular*.

La ecuación de Sturm-Liouville, junto con las condiciones en los extremos dadas de forma separada

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

siendo a_1, a_2, b_1 y b_2 números reales, se llama el *Sistema de Sturm-Liouville*, o bien el *Problema de Sturm-Liouville*. Los valores de λ para los cuales el sistema de Sturm-Liouville tiene soluciones no triviales se llaman *valores propios*, mientras que las correspondientes soluciones se llaman *funciones propias*. El conjunto de valores propios asociados a un sistema regular de Sturm-Liouville se llama el *espectro* del sistema.

En el caso en que $p(a) = p(b)$ aparece un tipo de sistema de Sturm-Liouville en el que es posible establecer condiciones periódicas en los extremos de la forma

$$\begin{aligned} u(a) &= u(b), \\ u'(a) &= u'(b). \end{aligned}$$

La ecuación de Sturm-Liouville, junto con las condiciones periódicas en los extremos, se llama el *Sistema periódico de Sturm-Liouville.*

3.7.2. Funciones propias.

Si dado un valor propio λ de un sistema regular de Sturm-Liouville, existen n funciones propias asociadas a ese valor que son linealmente independientes, ese valor propio se dice que tiene *multiplicidad* n.

El siguiente Teorema establece la característica más importante de las funciones propias de los sistemas de Sturm-Liouville:

Teorema 114 *Supongamos que las funciones p, q y s en un sistema de Sturm-Liouville son continuas en $[a,b]$. Supongamos que las funciones propias u_j y u_k correspondientes a valores propios distintos λ_j y λ_k, respectivamente, son continuamente diferenciables. Entonces u_j y u_k son ortogonales respecto a la función* peso *s en $[a,b]$*[1] .

Una consecuencia inmediata es el siguiente

Corolario 115 *Las funciones propias de un sistema periódico de Sturm-Liouville en $[a,b]$ son ortogonales respecto a la función peso s en $[a,b]$.*

El siguiente teorema hace referencia a los sistema regulares:

Teorema 116 *Todos los valores propios de un sistema regular de Sturm-Liouville donde $s > 0$ son reales.*

Sin ninguna duda, el resultado más importante en relación con los sistemas regulares es el siguiente:

[1] Con esta afirmación se indica que

$$\int_a^b s u_j u_k dx = 0.$$

Teorema 117 *Un sistema regular de Sturm-Liouville tiene una sucesión de valores propios reales*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Las correspondientes funciones propias, denotadas como* u_n, *determinadas unívocamente excepto por un factor constante, tienen cada una de ellas exactamente* n *ceros en el intervalo* $]a, b[$, *y estas funciones forman un sistema ortogonal completo.*

Cualquier función f *con derivada a trozos en* $[a, b]$ *que satisfaga las condiciones en los extremos se puede desarrollar en serie absoluta y uniformemente convergente en términos de las funciones* u_n, *es decir,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n,$$

donde

$$c_n := \frac{\int_a^b s f u_n dx}{\int_a^b s u_n^2 dx}, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

3.7.3. Algunos problemas de valores propios clásicos

La ecuación de Bessel

Se trata del problema de Sturm-Liouville dado por la llamada *ecuación de Bessel*:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \eta^2) y = 0, \quad \eta \geq 0. \tag{3.58}$$

La solución general se expresa de la forma

$$\begin{cases} y(x) = c_1 J_\eta(x) + c_2 J_{-\eta}(x), & \text{si } \eta \text{ no es entero} \\ y(x) = c_1 J_\eta(x) + c_2 Y_\eta(x), & \text{si } \eta \text{ es entero} \\ y(x) = c_1 J_\eta(x) + c_2 Y_\eta(x), & \text{para cualquier } \eta, \end{cases} \tag{3.59}$$

donde se tiene

$$J_\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)^k x^{2k+\eta}}{2^{2k+\eta} k! \Gamma(\eta + k + 1)}, \tag{3.60}$$

llamada *Función de Bessel de primera especie de orden* η.

$$Y_\eta(x) = \frac{(\cos \eta\pi) J_\eta(x) - J_{-\eta}(x)}{\sin \eta\pi}, \tag{3.61}$$

llamada *Función de Bessel de segunda especie de orden* η.

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt, \; s > 0, \; \text{la } \textit{Función Gamma de Euler.} \tag{3.62}$$

La ecuación de Legendre

Se trata del problema de Sturm-Liouville dado por la llamada *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \eta(\eta+1)y = 0, \; \eta \in I\!R. \tag{3.63}$$

La solución general está dada por

$$y(x) = a_0 p_\eta(x) + a_1 q_\eta(x),$$

donde

$$p_\eta(x) := 1 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta(\eta-2)...(\eta-2k+2).(\eta+1)(\eta+3)...(\eta+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}.$$

$$q_\eta(x) := x + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\eta-1)(\eta-3)...(\eta-2k+1).(\eta+2)(\eta+4)...(\eta+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Cuando η es un entero, se puede escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

$$\text{siendo } N = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

es la *Función de Legendre de primera clase* o *Polinomio de Legendre de orden* n,

y

$$Q_n(x) = \begin{cases} p_n(1) q_n(x), & \text{si } n \text{ es par} \\ -q_n(1) p_n(x), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

es la *Función de Legendre de segunda clase de orden* n.

3.8. El problema de Dirichlet

Se trata de encontrar una función armónica $u(x,y)$ en una región D que tiene como frontera B, y tal que toma valores preasignados sobre la frontera. Normalmente, D es un conjunto abierto y conexo y la frontera B es una curva cerrada suave a trozos. Es conveniente recordar que una consecuencia del principio del Módulo Máximo para las funciones de variable compleja es que *una función armónica en un dominio acotado y continua en el dominio y su frontera, alcanza sus extremos en la frontera*. Este problema fue tratado con técnicas de variable compleja en la subsección 1.11.4. Aquí se usarán técnicas de separación de variables en ecuaciones en derivadas parciales.

Se puede probar que el problema tiene solución única que depende continuamente de los valores en la frontera. Si la función f sobre la frontera es continua, el problema tiene solución única. La existencia de la solución es consecuencia del siguiente apartado.

3.8.1. Solución del problema de Dirichlet en un disco

Problema interior

Se supone que se trata de un disco centrado en el origen y de radio a. Se utiliza el método de Separación de Variables escribiendo la ecuación en coordenadas polares.

La Ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

luego el problema se plantea como

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, \\ u(a,\theta) &= f(\theta), \end{aligned}$$

donde f es una función $2\pi-$periódica dada.

La solución aparece como producto de una función de r y una función de θ, es decir

$$u(r,\theta) = R(r).\Theta(\theta),$$

donde $0 \leq r \leq a$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y se exige que la solución sea 2π-periódica respecto a la variable θ. Resulta

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

pues cada miembro de la ecuación depende de una variable distinta. Se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0,$$
$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0,$$

y las condiciones $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ (por periodicidad).

Si $\lambda < 0$ se obtiene $\Theta(\theta) = A.exp(\sqrt{-\lambda}\ \theta) + B.exp(-\sqrt{-\lambda}\ \theta)$, y las condiciones de periodicidad producen la solución nula.

Si $\lambda = 0$ se obtiene $u(r,\theta) = (A + B\ln r)(C\theta + D)$. Haciendo $r \to 0$ se obtiene inmediatamente $B = 0$, luego $u(r,\theta) = C\theta + D$, y las condiciones de periodicidad obligan a que $C = 0$, luego u =constante.

Si $\lambda > 0$ se obtiene inmediatamente $\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$. Las condiciones de periodicidad obligan a que $\sqrt{\lambda} = n \in I\!N$.

Las soluciones de la ecuación de Cauchy son de la forma

$$R(r) = Cr^{\sqrt{\lambda}} + Dr^{-\sqrt{\lambda}},$$

C y D constantes arbitrarias. Haciendo $r \to 0$ resulta que $D = 0$.

Utilizando ahora el principio de superposición se obtiene, denotando $\rho := \frac{r}{a}$,

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{3.64}$$

Aplicando la condición de frontera para $r = a$ (es decir, para $\rho = 1$) se obtiene

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

y este es el desarrollo en serie de Fourier de la función 2π-periódica f. Por tanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau d\tau,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau d\tau,\ n = 1, 2, \ldots$$

Llevando estas expresiones a la ecuación (3.64) se obtiene

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \cos n(\theta-\tau)\right] d\tau.$$

Utilizando las expresiones complejas para el coseno resulta

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau. \tag{3.65}$$

Problema exterior

Se supone ahora que se desea encontrar una función armónica en el exterior de la bola cerrada de centro $\mathbf{0}$ y radio a, que coincida con una función f dada en la frontera.

El tratamiento sigue los pasos del anterior. La única diferencia radica en el momento en que se consideran las soluciones de la ecuación de Cauchy. Ahora, haciendo $r \to \infty$ se obtiene $C = 0$, con lo que la ecuación (3.64) se convierte en

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{3.66}$$

De nuevo, la condición $u(a,\theta) = f(\theta)$ conduce a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,$$

con lo que finalmente se obtiene

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\frac{1-\rho^{-2}}{1-2\rho^{-1}\cos(\theta-\tau)+\rho^{-2}}d\tau. \tag{3.67}$$

3.9. Aplicaciones de las transformadas integrales

3.9.1. Transformadas de Fourier

El uso de la Transformada de Fourier en la resolución de EDP's se basa en las propiedades que tiene en relación con la derivación, de forma que la transformada de una derivada se expresa algebraicamente en términos de la transformada de la función original (ver la Proposición 104). Es cierto que se deben cumplir las condiciones de existencia de la Transformada de Fourier, así como las adecuadas para que se pueda aplicar la fórmula de inversión. Por tanto, el uso de esta técnica queda limitada a situaciones particulares.

Para ilustrar estas aplicaciones se considerarán algunos ejemplos:

Ejemplo (Transformada de Fourier): Resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x,y) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x), \\ u \text{ acotada si } y &\to +\infty, \\ u \to 0,\ u_x \to 0, \quad \text{cuando } |x| &\to +\infty. \end{aligned}$$

.

Se considera $y > 0$ fijo. Se supone que la solución verifica la condición de existencia de la Transformada de Fourier (como función de x). Sea $U(\alpha, y) := \mathcal{F}[u](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)e^{-i\alpha x}dx$ la Transformada de Fourier de la función u considerada sólo como funcion de x (función que depende de α y de y). Si se supone que se verifican las condiciones para poder calcular la transformada de la derivada de segundo orden respecto de x, se tendrá

$$-\alpha^2 U(\alpha, y) + \frac{d^2}{dy^2}U(\alpha, y) = 0.$$

Las soluciones son de la forma

$$U(\alpha, y) = A(\alpha)e^{\alpha y} + B(\alpha)e^{-\alpha y}.$$

Cuando $y \to +\infty$ se sabe que $u(x,y) \to 0$, luego $U(\alpha, y) \to 0$, por lo que se tiene

$$U(\alpha, y) = B(\alpha)e^{-|\alpha| y}.$$

Haciendo $y = 0$, se obtiene

$$U(\alpha, 0) = B(\alpha) = \mathcal{F}[f](\alpha).$$

Por tanto,

$$U(\alpha, y) = \mathcal{F}[f](\alpha)e^{-|\alpha|y}.$$

Si se supone ahora que se verifican las condiciones para invertir la Transformada de Fourier, se obtiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, y)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\alpha)e^{-|\alpha|y}e^{i\alpha x}d\alpha,$$

es decir,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\xi\alpha}d\xi\right]e^{-|\alpha|y}e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Si se supone ahora que se verifican las condiciones adecuadas para poder intercambiar el orden de integración, se tiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\alpha}e^{-|\alpha|y}e^{i\alpha x}d\alpha\right]f(\xi)d\xi.$$

Descomponiendo la integral respecto a la variable α en suma de la integral en $]-\infty, 0]$ y de la integral en $[0, +\infty[$, se llega inmediatamente a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\alpha}e^{-|\alpha|y}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{2y}{(x-\xi)^2 + y^2},$$

por lo que la solución queda expresada como

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}d\xi,$$

que coincide con la solución obtenida mediante técnicas de variable compleja en el apartado 1.11.4 (ver la fórmula (1.2) allí).

Ejemplo: Transformada de Fourier y Convolución: Resolver la ecuación del calor unidimensional en una varilla infinita con una distribución inicial de temperatura dada. El problema se plantea como

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = 0,\ x \in I\!R,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in I\!R \\ u(x,t) \text{ acotada.} \end{aligned}$$

Se considera t fijo y se aplica la transformada de Fourier a la EDP considerando que la variable es x. Si se denota la transformada de $u(\cdot,t)$ como U, es decir

$$U(\alpha,t) := \mathcal{F}[u(\cdot,t)](\alpha),$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt}U(\alpha,t) + \alpha^2 U(\alpha,t) = 0,$$

que tiene como solución $U(\alpha,t) = F(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$. Por otra parte, la condición inicial proporciona

$$U(\alpha,0) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx = \mathcal{F}[f](\alpha),$$

la transformada de Fourier de f. Por tanto $U(\alpha,t) = \mathcal{F}[f](\alpha)e^{-\alpha^2 t}$, y resulta

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\alpha)e^{-\alpha^2 t}e^{i\alpha x}d\alpha. \tag{3.68}$$

El teorema sobre transformación de Fourier de convoluciones asegura que, bajo determinadas circunstancias, $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$, o, escrito de otro modo, $f * g = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]]$. Teniendo en cuenta que

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2t}}\ e^{-x^2/4t}, \tag{3.69}$$

se obtiene

$$u(x,t) = f * g,$$

que es una forma especialmente cómoda de expresar la solución del problema. Una forma de obtener la expresión (3.69) es observar que la integral que allí aparece equivale a la integral de la función de variable compleja $f(z) := e^{-z^2 t}$ (donde $t > 0$ es un parámetro) en la recta $\phi(\alpha) := \alpha - ix/(2t),\ \alpha \in \mathbb{R}$, recorrida en sentido creciente de α. Se utiliza el Teorema del Residuo

(Teorema 47) para concluir que esta integral coincide con la de la misma función, ahora sobre el eje real recorrido también en sentido positivo. Basta observar ahora que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(esta integral —llamada *Integral de Probabilidad*— se calcula mediante técnicas de variable compleja).

3.9.2. Transformada de Laplace

Como aplicación de la transformada de Laplace, introducida en la definición 109, y cuyas propiedades se estudiaron en el apartado 2.4.5, considérese el siguiente problema:

Ejemplo: Se considera una varilla extendida a lo largo del eje real positivo, que inicialmente está a temperatura 0 y que se calienta en el extremo $x = 0$ manteniendo este extremo a temperatura constante u_0. La varilla pierde calor debido a la radiación (de forma proporcional a la temperatura). Se quiere saber la temperatura $u(x,t)$ en cada instante $t > 0$ y en cada punto $x > 0$.

La ecuación que debe satisfacer u es la del calor, con unas condiciones iniciales y de frontera que se traducen en

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} - Ku, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u_0, \\ u(x,t) \to 0, \text{ cuando } x \to \infty, \end{aligned}$$

donde K es cierta constante, que podría entenderse como un *factor de radiación*. Observar que la solución u debe cumplir $0 \leq u(x,t) \leq u_0$, para todo $x \geq 0$ y $t \geq 0$. Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar la transformada de Laplace a la función u considerada como función de t, con $\gamma_0 = 0$ (ver las notaciones en el apartado 2.4.5). Denotando $L(z,x) := \mathcal{L}[u(x,t)](z)$, $\mathrm{Re}(z) > 0$, se tiene, por las propiedades de esta transformada,

$$-u(x,0) + zL(z,x) = \frac{d^2}{dx^2}L(z,x) - KL(z,x).$$

Como $u(x,0) = 0$, se tiene

$$\frac{d^2}{dx^2}L(z,x) - (K+z)L(z,x) = 0.$$

Esto representa una ecuación diferencial ordinaria de una función de la variable x. La solución es

$$L(z,x) = A(z)e^{r_1 x} + B(z)e^{r_2 x},$$

donde r_1 y r_2 son las dos raíces cuadradas de $z+K$, donde z es un punto del semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Supongamos que $\operatorname{Re} r_1 > 0$ y que $\operatorname{Re} r_2 < 0$. Dado que $u(x,t) \to 0,$ cuando $x \to \infty$, se obtiene $A(z) = 0$ para todo z con $\operatorname{Re} z > 0$. Si ahora tomamos $x = 0$ se tiene

$$L(z,0) = \int_0^{+\infty} u(0,t)e^{-zt}dt = u_0 \int_0^{+\infty} e^{-zt}dt = \frac{u_0}{z}.$$

Por tanto $B(z) = \frac{u_0}{z}$, y resulta

$$L(z,x) = \frac{u_0}{z}e^{r_2 x}.$$

Para recuperar u basta ahora invertir la Transformada de Laplace (ver el apartado 2.4.5). Se obtiene

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{r_2 x}e^{zt}}{z}dz,$$

es decir, la integral de la función de variable compleja a lo largo de la recta $a+ib,\ b\in\mathbb{R}$, donde a es cualquier constante positiva.

Capítulo 4
Pruebas

Presentaremos pruebas de algunos resultados

Teorema 8

Demostración. Sea $f(z) := u(z) + iv(z)$ una función derivable definida en un abierto simplemente conexo G. Supongamos conocida u. Proporcionaremos la expresión de la conjugada armónica v. Para ello, se elige un punto (x_0, y_0) en G y se toma (x, y) en G de forma que el rectángulo de vértices opuestos (x_0, y_0), (x, y), se encuentre contenido en G. Sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Entonces, para cierta función f que depende sólo de y,

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial x}(s, y)ds + f(y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y)ds + f(y).$$

Para determinar f derivamos la expresión anterior respecto de y, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, y)ds + f'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

Como u es armónica,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, y)ds + f'(y).$$

Por tanto

$$f'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y)\right] = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y).$$

Se obtiene, pues,

$$f(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)dt + k,$$

donde k es una constante. Resulta finalmente

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)dt + k.$$

∎

Bibliografía

[Ja] G. J. O. Jameson: *Primer Curso de Funciones Complejas.* C.E.C.S.A., 1973.

[JMR] D. Jornet, V. Montesinos y A. Roca: *Análisis Matemático*. Ed. U. P. V. 2003.

[Ka] W. Kaplan: *Matemáticas Avanzadas para Estudiantes de Ingeniería.* Addison-Wesley Iberoamericana. 1986.

[Kr] E. Kreyszig: *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* Vol. I y II. Ed. Limusa, 1989.

[My] T. Myint-U: *Partial differential equations of Mathematical Physics*. Elsevier Pub. Co., 1973

Índice de términos

Bernouilli, 93

$\mathbb{C}$, **1**
camino, **13**
  suave a trozos, **14**
cero de orden p, 19
circulación, 30
coeficientes de Fourier, **46**, 47, 49, 57, 106
condición
  de Dini, 61, 101
  de Jordan, 61, 101
conjunto
  abierto, **2**, 111
  acotado, **2**
  cerrado, **3**
  clausura de un, **3**
  conexo, **3**, 111
  convexo, **3**
  estrellado, **16**, 19
  frontera, 17, 20, 31, 111
  interior de un, **3**
  nulo, 38
  numerable, 38
  simplemente conexo, 25, 31
convolución de dos funciones, 66, 115
criterio
  de Lebesgue de integración Riemann, 39
  M- de Weierstrass, 3
curva, **14**, 24
  cerrada, **14**
  longitud de una, 14
  rectificable, **14**

desigualdad
  de Bessel, 47
  de Cauchy-Schwarz, 43
desigualdades de Cauchy, 15, 20, 21
distancia en el plano complejo, **2**
dominio, **3**, 25, 31

ecuación
  de Sturm-Liouville, 107
    regular, **107**
    singular, **107**
  de Bessel, 109
    funciones de Bessel, 109
  de Laplace, 30, 85, 98, 111
  de Legendre, 110
  de onda
    bidimensional, 83
    solución de D'Alembert, 91, 95
    tridimensional, 84
    unidimensional, **81**, 96, 102
    unidimensional con movimiento forzado, **81**, 92
  de ondas, **77**
  de Poisson, 33

de Sturm-Liouville
regular, 108
del calor, 70, 84, 96, 104
unidimensional, 116
del telégrafo, 82
diferencial lineal, 58, 68, 72
polinomio característico, 58
solución particular, 58
en derivadas parciales, 70
ecuaciones de Cauchy-Riemann, **6**, 30
ecuaciones diferenciales ordinarias, 76, 94, 104, 112, 118
valores propios, 106
ecuaciones en derivadas parciales, **75**
cambio de variable, 87, 92
condición de Dirichlet, 94
condición de Neumann, 94
condiciones de frontera, **77**, 81
condiciones iniciales, **77**, 81
cuasilineal, **75**
curvas solución, **88**
de segundo orden, 86, 89, 93
formas canónicas, 86, 91
ecuaciones características, **88**
elíptica, 86
funciones propias, 92, 95, 97
hiperbólica, 86, 91
homogéneas, **76**, 91
lineales, **75**, 93
método de separación de variables, 92, 111
multiplicidad de un valor propio, 108
operador diferencial, 77
orden, **75**
parabólica, 86
principio de superposición, **76**, 96, 97, 99, 112
problema bien formulado, **76**
solución, **75**
valores propios, 95, 97
esfera de Riemann, 26

fórmula
de Cauchy-Hadamard, 4
integral de Cauchy, 17
integral de Poisson, 31, 33
fluido
incompresible, **29**, 30
irrotacional, **29**, 30
flujo, 29
función
-es ortogonales, **44**, 108
absolutamente continua, **65**
absolutamente integrable, 50, 53, 66
analítica, **5**
armónica, **7**, 30, 31, 111
armónica conjugada, **7**
continua a trozos, **41**
de decrecimiento rápido, **66**
de variación acotada, 52, 53
derivable, **5**, 18
derivable en un punto, **5**
diferenciable, **6**
entera, **5**, 19, 25
exponencial, **10**
Gamma de Euler, 110
holomorfa, **5**
impar, **41**, 48
integrable Riemann, **37**
norma de una, **44**
inyectiva, 24
muy suave a trozos, **41**
normalizada, **44**
par, **41**, 48

periódica, **41**
polinomial, 19
representable en serie de potencias, **8**, 18
suave a trozos, **41**, 54, 109
trigonométrica, **10**
Función de Green, **73**

giro, 25

homotecia, 25, 49

identidad de Parseval, 47
Im(z), **2**
índice de una trayectoria respecto a un punto, 23
integrable Lebesgue, 101
integral
a lo largo de un camino, 14
cálculo mediante residuos, 34
de Dirichlet, 51
de línea, **14**
de Poisson, 31
de Riemann, **37**
impropia, 40
paramétrica, 39, 62, 105
intervalo, **3**
inversión, 25

jacobiano, 87, 89

líneas
de corriente, **30**
equipotenciales, **30**
Lebesgue, 38
lema
de Jordan, 34
de Riemann-Lebesgue, 51
ley de Fourier, 84

método
de ortogonalización de Gram-Schmidt, 45
de superposición, 59

núcleo
de Dirichlet, 51
de una transformación, 62, 63
número complejo
argumento, **11**
conjugado, **2**
forma polar, **11**
logaritmo, **13**
módulo, **1**
raíces n-ésimas, **12**
representación geométrica, 1

operador, 63, 103
diferencial, 107

parametrización de una curva, 90
partición, **37**, 41
plano complejo ampliado, 27
polinomio
de Legendre, 110
polo, 24, 35
orden de un, 22, **22**
potencial
complejo, **30**
de velocidad, **30**
gravitatorio, **85**
problema
de Cauchy, 89
condiciones, 90
curva característica, 91
teorema de Cauchy-Kowalewsky, 91
de Dirichlet, 30, 111, 114
de la cuerda vibrante, **77**

producto escalar de dos funciones, 44

Re(z), **2**
Regla de la cadena, **5**
residuo, **23**, 24, 34, 35

serie
- de Fourier, 45, 48, 104, 112
  - convergencia, 47
  - convergencia absoluta, 54
  - convergencia puntual, 53
  - convergencia uniforme, 54, 60
  - diferenciación, 55
  - doble, 57
  - integración, 55, 56
  - sumas parciales, 47, 50
- de funciones, 109
  - convergencia, **3**
- de Laurent, **21**
  - parte principal, 21
- de potencias, **4**, 15, 18
  - convergencia uniforme, 15
  - disco de convergencia, 4, 18

singularidad, **21**
- de orden finito, 22, **22**
- esencial, 22, **22**
- evitable, 22, **22**

sistema
- completo, **48**, 109
- de Sturm-Liouville, 106
  - espectro, **107**
  - periódico, 108
- estable, **58**
  - estado estacionario, **60**
  - función de respuesta en frecuencia, **59**
  - función de transferencia, **59**
- exponencial, **45**, 48
- lineal, 66
  - función impulso, 66
- ortogonal, **43**
- ortonormal, **43**
- trigonométrico, **44**, 46, 48

sucesión
- de funciones, 20, 39
  - convergencia puntual, **3**, 39
  - convergencia uniforme, **3**, 39
  - convergencia uniforme en compactos, 20
  - uniformemente acotada, 39
- de números complejos
  - convergencia, **2**

supremo, 20

teorema
- de aproximación de Weierstrass, 48, 56
- de Casorati-Weierstrass, 22
- de Cauchy, 16, 19, 23, 30
- de Cauchy-Kowalewsky, 91
- de Dini, 52
- de Fejér, 56
- de Fubini, 40
- de Green, 92
- de Jordan, 52
- de la Divergencia, 84
- de la función implícita, 88
- de la Función Inversa, 24
- de la Integral de Fourier, 61, 71
- de Liouville, 20
- de Localización de Riemann, 51
- de Morera, 19, 20
- de unicidad para funciones derivables, 19
- de unicidad para series de potencias, 9

del Módulo Máximo, 20, 27, 111
del Residuo, 23, 34, 117
del Valor Medio, 29, 33
Fundamental del Álgebra, 20
Fundamental del Cálculo, 16
trabajo, 85
transformación, 31
conforme, **24**, 33
de Möbius, 25, 28
razón doble, 27
lineal, 25
transformada
coseno de Fourier, **63**, 101
de Fourier, 62, **64**, 65, 68, 114, 116
fórmula de inversión, 114
de Laplace, 63, **71**, 72, 117
de Laplace inversa, **72**, 118
de Mellin, **63**
de una función impar, 101
de una función par, 101
exponencial de Fourier, **63**
finita de Fourier, **60**, 101
inversa de Fourier, 62, **64**
seno de Fourier, **63**, 101
translación, 25, 49
trayectoria, **14**, 23, 35
simple, **23**
triángulo, 19, 20

vectores
ortogonales, **43**

Weierstrass, 3, 22