

TEMA 1. INTRODUCCIÓN

TEMA 2. CONDUCCION

1. Fundamentos

2. Conducción Estacionaria Unidimensional I

3. Conducción Estacionaria Unidimensional II. Aletas

4. Conducción Transitoria

TEMA 3. CONVECCION

1. Introducción

2. Convección forzada

3. Convección natural, condensación y ebullición

TEMA 4. INTERCAMBIADORES DE CALOR

TEMA 5. RADIACION

1. Fundamentos. Leyes y Factor de visión

2. Intercambio en medio no participante

TEMA 6. SUPERPOSICION MODOS TRANSMISION CALOR (Problemas)

TEMA 7. METODOS NUMERICOS (Prácticas)

Nomenclatura de la asignatura:

- **Q: energía, calor, (J)**
- **q: potencia calorífica (W)**
- **q': potencia calorífica por metro lineal (W/m)**
- **q'': potencia calorífica por metro cuadrado (W/m²)**
- **q''': generación de calor por metro cúbico (W/m³)**

(Nomenclatura igual a la utilizada en el libro de Incropera)

INTRODUCCIÓN

- ☐ Conceptos previos**
 - ☐ Energía**
 - ☐ Calor**
 - ☐ Principios de la termodinámica**
 - ☐ Temperatura**
 - ☐ Calor específico**
- ☐ Modos de transmisión de calor**
- ☐ Resumen histórico**

INTRODUCCIÓN. GENERALIDADES.

Modos de transmisión de calor:

Conducción

Sin movimiento macroscópico

Con movimiento macroscópico (Convección)

Radiación

Objetivos básicos de la transmisión de calor.

- Determinar la distribución de temperaturas en un sistema.
- Determinar la cantidad de calor intercambiado.
- Determinar la evolución de la temperatura y el flujo de calor con el tiempo en un sistema o cuerpo

Aplicaciones:

Producción de calor y frío-Acondicionamiento de aire

Centrales térmicas-Intercambiadores-Construcción (aislamiento)-

Ind. Químicas - Metalúrgicas

CONCEPTOS PREVIOS

ENERGÍA

•MECÁNICA

•ELECTROMAGNÉTICA

•ASOCIADA A LA MATERIA

•Composición

•Química (Molécula)

•Nuclear (Atómica)

•Estado (U) Energía interna

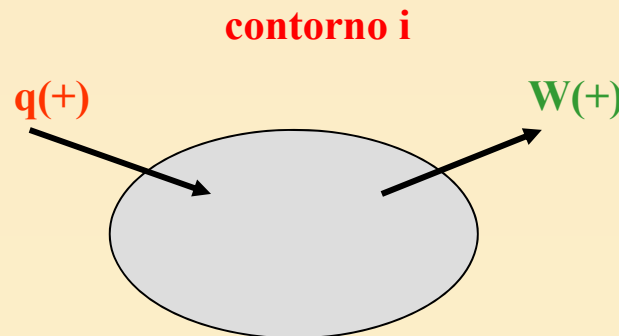
Intercambios energéticos: **Calor** y **Trabajo**

El calor es el intercambio de energía debido a la diferencia de temperaturas.

PRIMER PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA: CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Por unidad de tiempo

$$\sum_i \partial Q - \sum_i \partial W = dE$$



$$\sum_i \dot{q} - \sum_i \dot{W} = \frac{dE}{dt}$$

CONCEPTOS PREVIOS

TEMPERATURA

Temperatura (T): es la propiedad del sistema que determina si éste está en equilibrio térmico con otro. Dos sistemas A y B están en **equilibrio térmico** cuando sus temperaturas son idénticas: $T_A = T_B$

La temperatura de un sistema se mide colocando el sistema en contacto térmico con un sistema especial llamado termómetro.

La temperatura está asociada al movimiento de vibración aleatorio de las moléculas y átomos que componen la materia: los átomos más calientes vibran más rápidos

Dos escalas oficiales de temperatura:

Kelvin (absoluta, empieza en cero, que implica ausencia de movimiento).

Celsius (relativa, caracteriza los puntos de cambio de fase del agua a P_{atm})

El tamaño del grado en ambas es el mismo.

$$20\text{ }^{\circ}\text{C} = 20 + 273,15 = 293,15\text{ K}$$

CONCEPTOS PREVIOS

CALOR ESPECÍFICO

$$c \left[\frac{J}{kg \ K} \right]$$

Calor específico: aumento de la energía interna por unidad de masa, que se produce en un sistema al aumentar su temperatura

Si el proceso se realiza a presión constante C_p

Si el proceso se realiza a volumen constante C_v

SUSTANCIA	CALOR ESPECÍFICO C_p (J/kg K)
Gases:	
Hidrógeno	14000
Dióxido de carbono	850
Aire	1000
Líquidos:	
Aceite	1800
Etilen Glicol	2300
Freón (R-12)	900
Sólidos:	
Cuarzo	780
	1100
Hielo	2000
Lana de vidrio	770
Madera seca (pino)	2740
Mármol	900
Vidrio	950
Yeso	820

CONCEPTOS PREVIOS

FACTORES DE CONVERSIÓN

Área	1 ft ²	0.092903 m ²
Densidad	1 lb _m /ft ³	16.0185 kg/m ³
	1 slug/ft ³	515.38 kg/m ³
Energía	1 Btu	1055.056 J
	1 cal	4.1868 J
Longitud	1 ft	0.3048 m.
	1 in.	0.0254 m.
Masa	1 lb _m	0.4536 kg
	1 slug	14.594 kg
Potencia	1 hp	745.7 W
	1 ft lb _f /s	1.356 W
	1 Btu/h	0.2931 W
	1 kcal/h	1.1628 W
Temperatura	T(°R)=1.8 T(K)	
	T(°F)=1.8 T(°C)+32	
	T(°C)=(T(°F)-32)/1.8	
	T(°R)=T(°F)+459.67	
	T(K)=T(°C)+273.15	
Conductividad térmica	1 Btu/h ft °F	1.7307 W/m K
	1 kcal/h m °C	1.1628 W/m K
Difusividad térmica	1 ft ² /s	0.0929 m ² /s
Resistencia térmica	1h °F/Btu	1.8956 K/W
Calor específico	1 Btu/lbm °F	4186.8 J/kg K
	1 kcal/kg °C	4186.8 J/kg K
Coeficiente trans. Calor	1 Btu/h ft ² °F	5.6783 W/m ² K
	1 kcal/h m ² °C	1.1628 W/m ² K
Viscosidad	1 lbm/ft s	1.4882 kg/m s
Viscosidad cinemática	1 ft ² /s	0.0929 m ² /s
Volumen	1 ft ³	0.02832 m ³
	1 gal (US)	0.003785 m ³
Caudal	1 ft ³ /s	0.02832 m ³ /s
	1 gal/min	6.309*10 ⁻⁵ m ³ /s

INTRODUCCIÓN. MODOS TRANSMISIÓN DE CALOR.

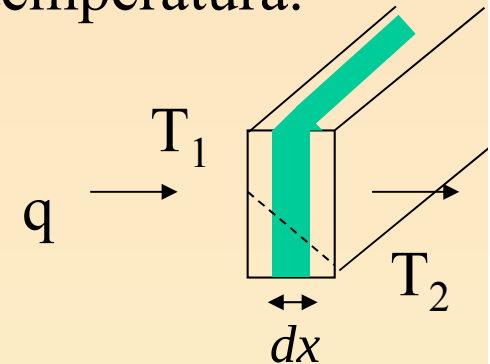
CONDUCCIÓN:

Transferencia de calor, por unidad de tiempo, en un medio debida a los impactos elásticos de las moléculas en los gases y líquidos, a las vibraciones moleculares en sólidos y por difusión de la nube de electrones libres en los metales.

Es necesario un **SOPORTE MATERIAL**

Ley de Fourier (1822) : En una sustancia homogénea, el flujo de calor local es proporcional al gradiente de temperatura.

$$q''_{cond} = \frac{q_{cond}}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$



q : Calor intercambiado a través del área en la unidad de tiempo (W)

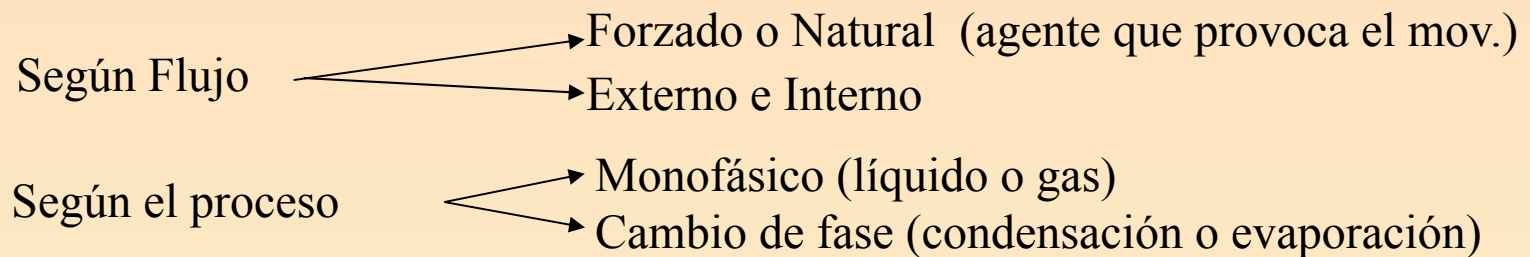
q'' : flujo de calor por unidad de área y tiempo (W/m²)

k : conductividad térmica (W/m K) propiedad de la materia.

INTRODUCCIÓN. MODOS TRANSMISIÓN DE CALOR.

CONVECCIÓN: Conducción + Movimiento

Transferencia de calor, por unidad de tiempo, entre una superficie y un fluido. Es una función de las condiciones de la superficie (geometría y temperatura) y de las condiciones del fluido (temperatura, velocidad y propiedades termofísicas del mismo).



Ley de Enfriamiento de Newton (1701) :

$$q''_{conv} = \frac{q_{conv}}{A} = h (T_{sup} - T_{fluido})$$

h: coeficiente de convección (W/m² K) no es una propiedad

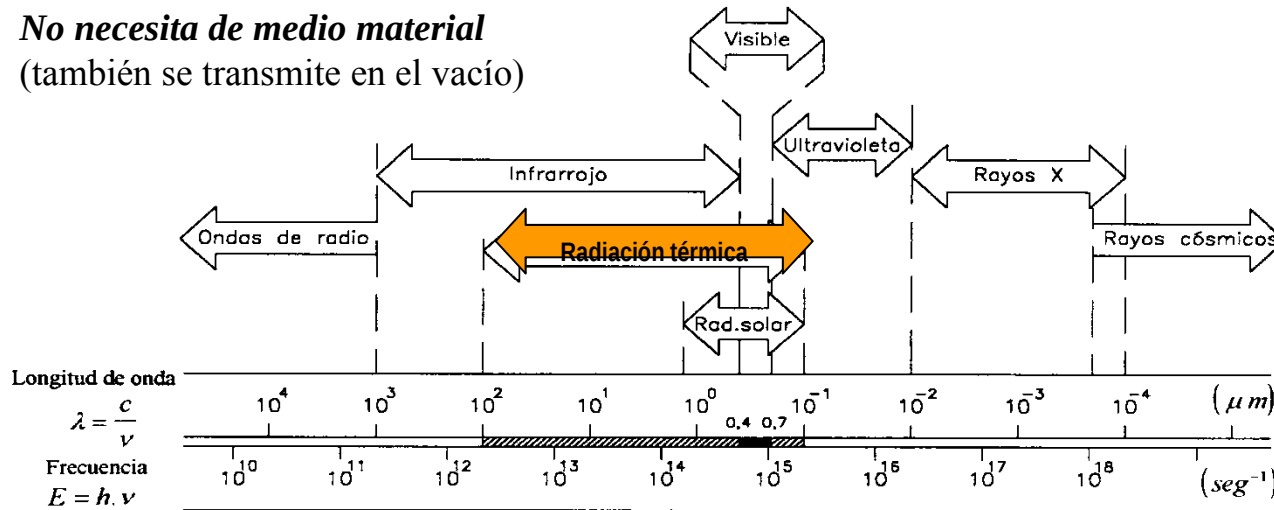
Valores típicos del coeficiente de transferencia de calor por convección

Proceso	h [W/m ² K]
• <i>Convección libre</i>	
– Gases	2 - 25
– líquidos	50 - 1000
• <i>Convección forzada</i>	
– Gases	25 - 250
– líquidos	50 - 20000
• <i>Convección con cambio de fase</i>	
– Ebullición o condensación	2500 - 100000

RADIACIÓN TÉRMICA:

Energía emitida como radiación electromagnética por la materia asociada a su temp. absoluta.

No necesita de medio material
(también se transmite en el vacío)



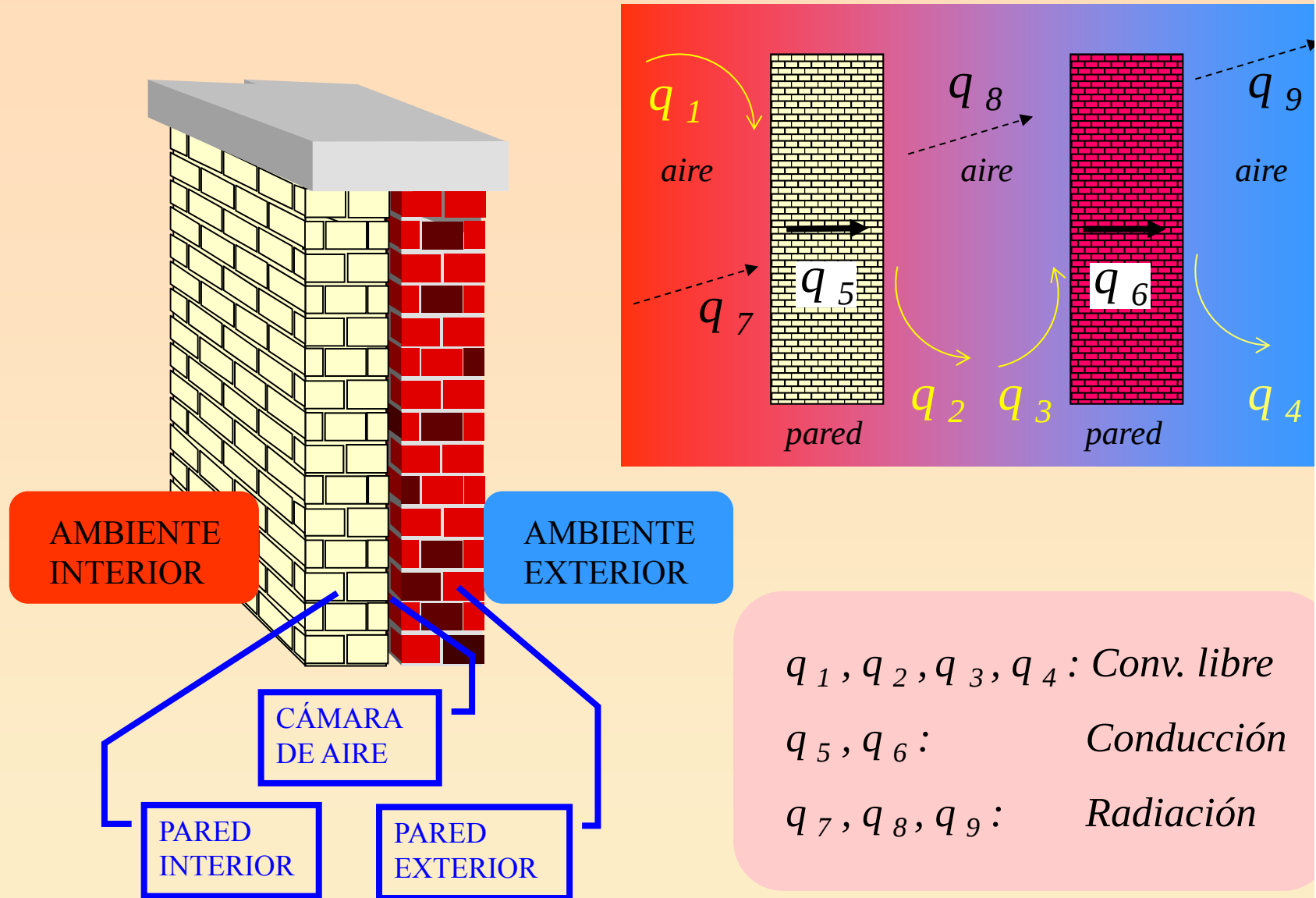
La energía TOTAL emitida por radiación por una superficie a temperatura T(K), viene dada por la **ley de Stefan-Boltzmann** (1879,1884): $E = \sigma \cdot T^4$ σ : Const. de Stefan-Boltzmann ($5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$)

La energía intercambiada se obtiene de un balance de energía en cada elemento (superficie) entre la energía emitida y absorbida en forma radiante.

$$q''_{rad} = \frac{q_{rad}}{A_{sup}} = \frac{(T_{sup}^4 - T_{rec}^4)}{A_{sup} (D_{rad})}$$

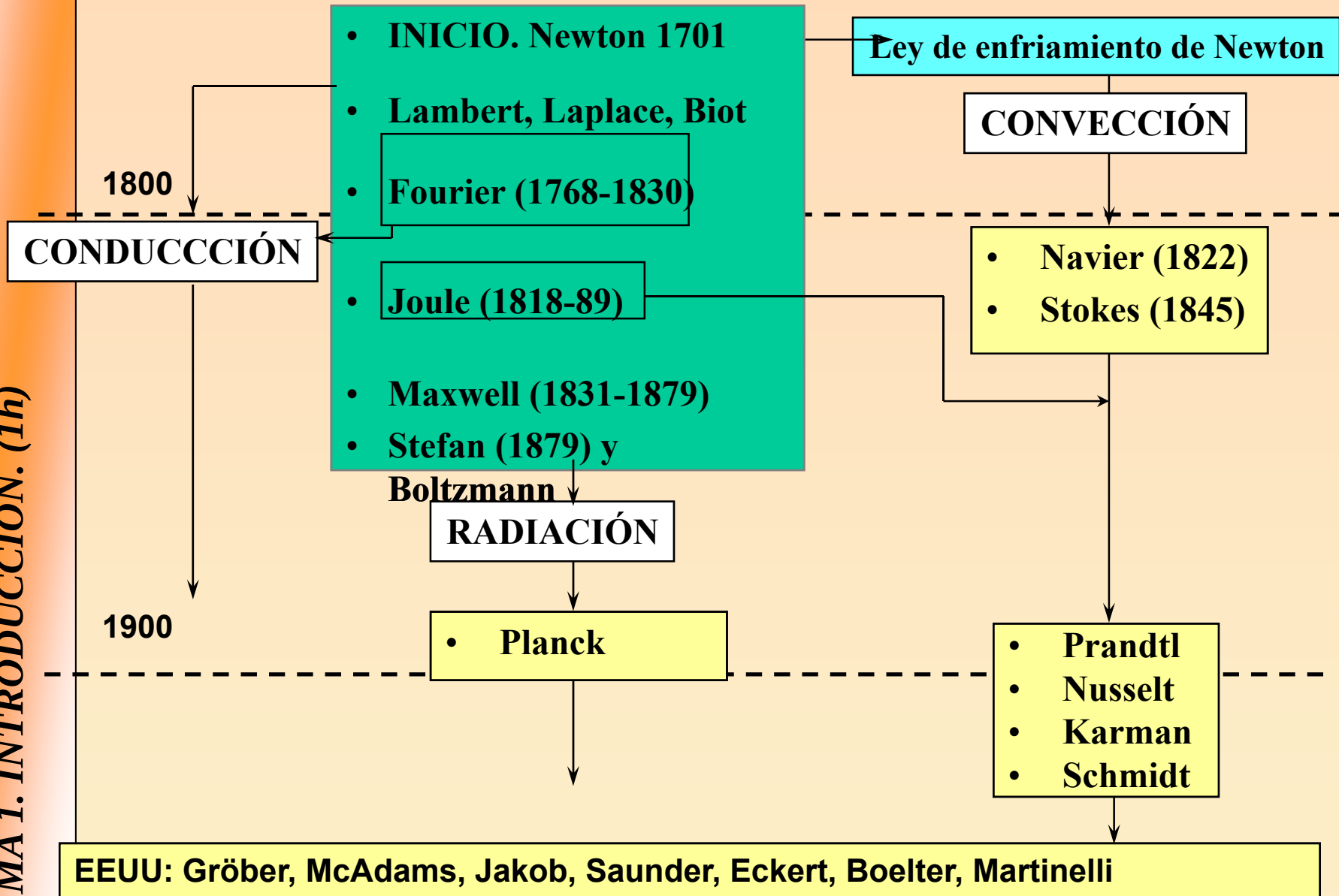
Función de las emisividades ϵ_p , de los factores de forma F_{ij} y de las áreas A_i de las superficies que intervienen en el intercambio térmico

EJEMPLO : CERRAMIENTO EXTERIOR CON CÁMARA DE AIRE



CRONOLOGÍA EN LA TRANSMISIÓN DE CALOR

TEMA 1. INTRODUCCIÓN. (1h)

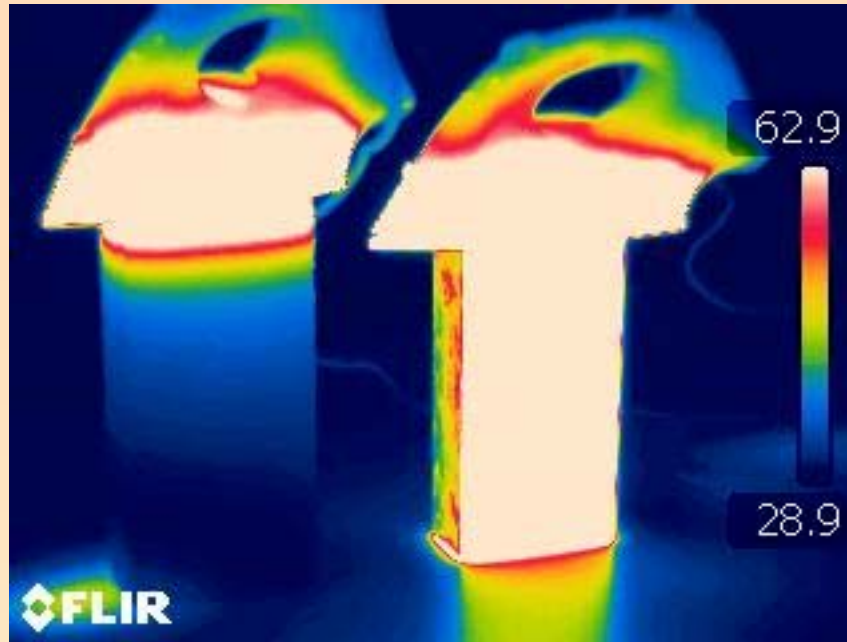


CONDUCCION

Conducción. Fundamentos

- ☐ **Ley de Fourier**
- ☐ **Conductividad térmica**
- ☐ **Ecuación general de conducción del calor**
- ☐ **Simplificación de la ecuación de conducción del calor.**
- ☐ **Difusividad térmica**
- ☐ **Condiciones de unicidad**

LEY DE CONDUCCION DE FOURIER. GRADIENTE TERMICO



- Fenomenológica. Basada en la observación empírica.
- El flujo de calor q'' es proporcional al gradiente de temperaturas a través de la conductividad térmica (k)

$$\vec{q}'' = -k \cdot \nabla T$$

(El signo negativo viene de que el calor se transmite en sentido contrario al gradiente de temperaturas).

CONDUCCIÓN. Ley de Fourier (1822)

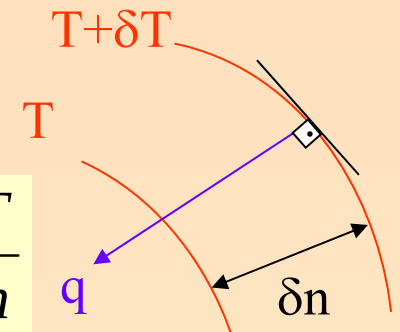
Ley de Fourier .- El calor por conducción se transmite siempre desde temperaturas superiores a inferiores y proporcionalmente al gradiente de temperaturas en dicha dirección.

$$\vec{q}'' = -k \vec{\nabla} T \quad \vec{q}'' = q''_x \vec{i} + q''_y \vec{j} + q''_z \vec{k}$$

q'' : flujo de calor (W / m²)

k : conductividad térmica (W / m K)

$$q'' = -k \frac{\delta T}{\delta n}$$

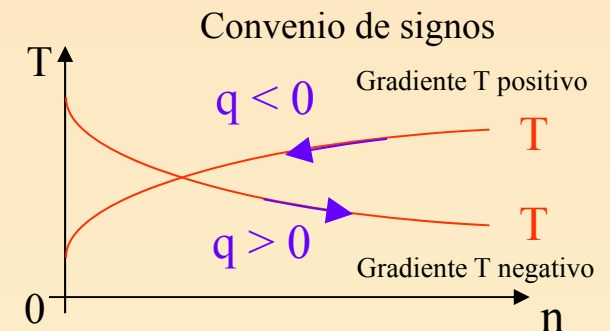


- La potencia térmica total (**calor**) que atraviesa la superficie A:

$$q = \int_A \vec{q}'' \cdot d\vec{A} \quad q: \text{Calor (W)}$$

- El **valor medio del flujo** de calor q''_m :

$$q''_m = \frac{q}{\int dA}$$

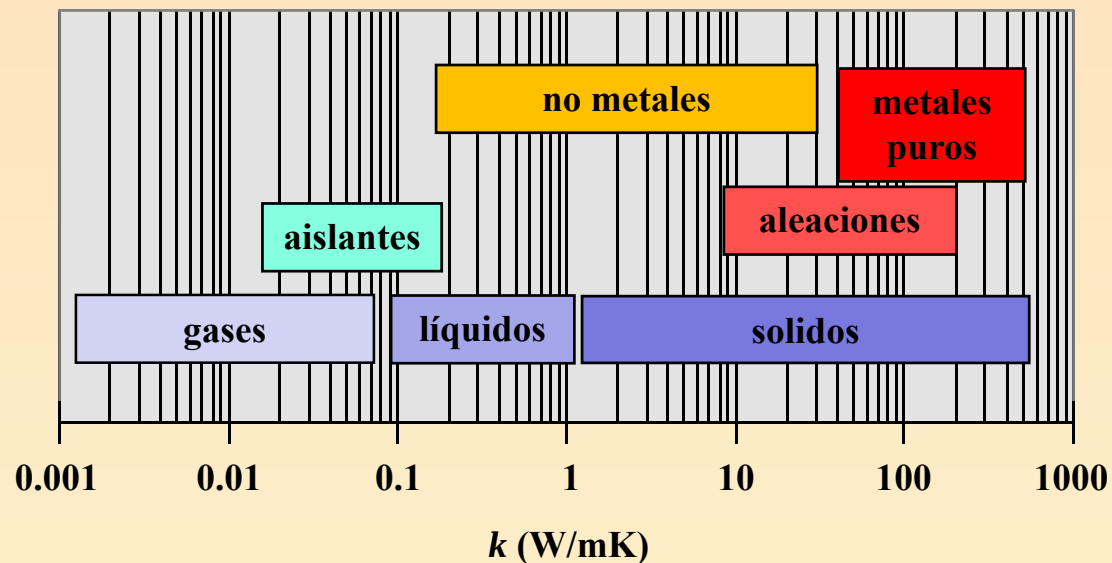


CONDUCTIVIDAD

Conductividad Térmica k (W/m K) .- Propiedad del material que caracteriza la transmisión de calor por conducción.

- De forma teórica : $k = f$ (dirección propagación, T)
- Con mucha precisión : $k = a + bT$
- A nivel práctico : $k = \text{cte.}$

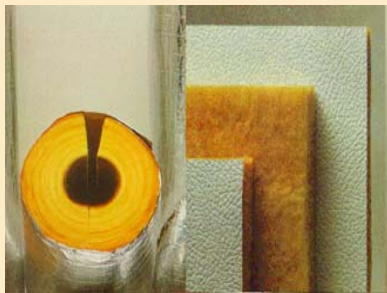
RANGO DE VALORES



SUSTANCIAS	CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (W/m K)
Gases:	
Amoniaco (0°C, 1 atm)	0.022
Aire (0°C, 1atm)	0.024
Líquidos:	
Aceite de motor (0°C)	0.147
Etilen Glicol (0°C)	0.242
Agua (líq. sat., 0°C)	0.55
Sólidos:	
Vidrio (20°C)	0.75
Hielo (0°C)	2.25
Ladrillo (200°C)	4.0
Cuarzo (20°C)	7.5
Acero inoxidable (18% Cr, 8%Ni)	16
Hierro puro (0°C)	75
Zinc puro (0°C)	110
Aluminio puro (0°C)	200
Cobre puro (0°C)	390
Plata pura (0°C)	420

Materiales aislantes

- Basan sus propiedades en el **gas en reposo** que contienen.
- A mayor peso molecular del gas, menor conductividad térmica
- El gas se encuentra atrapado entre fibras o dentro de cavidades cerradas, cuyo tamaño debería ser inferior al recorrido medio del gas a cada temperatura
- Habitualmente el gas es simplemente aire
- Composición de materiales aislantes
 - Fibras: vidrio, lana de roca...
 - Burbuja abierta: aislantes flexibles
 - Burbuja cerrada: aislantes rígidos, poliuretano, poliestireno...
- Ejemplos de materiales aislantes naturales: corcho, plumas, pelo animal (lana), algodón...



DEDUC. DE LA EC. GRAL. DE CONDUCCION DE CALOR

Flujo de calor (Desarrollo serie de Taylor función continua)

$$q_{(x+dx)} = q_{(x)} + \frac{\partial q_{(x)}}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_{(x)}}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2} + \dots \quad \text{(se desprecian términos de orden superior)}$$

Haciendo uso de la ley de FOURIER : $q_{(x)} = -k \frac{\partial T}{\partial x} dy \, dz$

Conducción :

$$[q_{(x)} - q_{(x+dx)}] dt = -\frac{\partial q_{(x)}}{\partial x} dx \, dt = -\frac{\partial \left[k \frac{\partial T}{\partial x} dy \, dz \right]}{\partial x} dx \, dt = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz \, dt$$

Generación :

$$q_{generado} = q''' dx \, dy \, dz$$

Almacenamiento :

$$q_{almac} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz$$

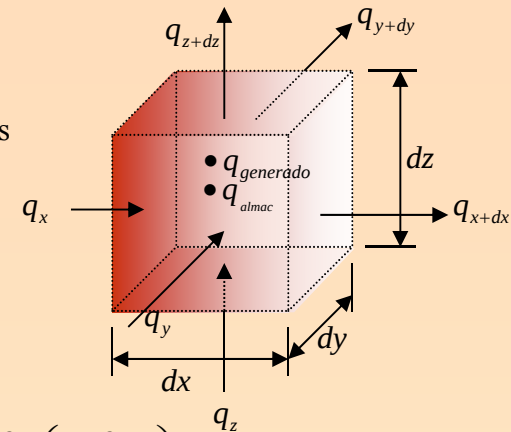
Balance energético

$$(q_{conduccion} + q_{generado} = q_{almac})$$

$$[q_{(x)} - q_{(x+dx)}] dt + [q_{(y)} - q_{(y+dy)}] dt + [q_{(z)} - q_{(z+dz)}] dt + q_{generado} dt = q_{almac} dt$$

La ec. General será :

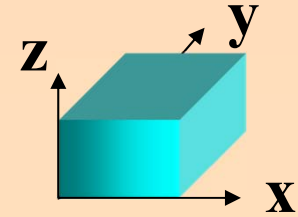
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 21$$



CONDICIONES DE UNICIDAD

1) Condiciones iniciales :

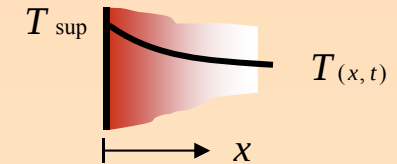
$$t = t_{\text{inicial}} \rightarrow T = f(x, y, z, t_{\text{inicial}})$$



2) Condiciones de contorno :

1ª Especie : de temperatura

$$T(\text{sup}, t) = T_{\text{sup}}$$

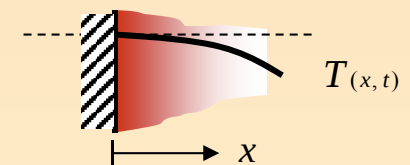
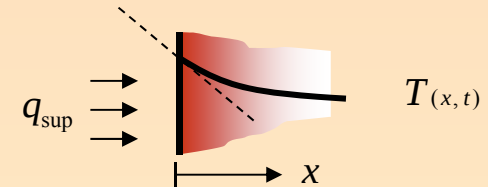


2ª Especie : de calor

a) flujo de calor constante b) sup. adiabática o aislada

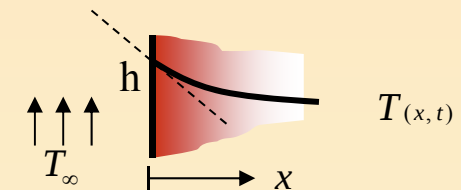
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{sup}} = q''_{\text{sup}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{sup}} = 0$$



3ª Especie : en contacto con un fluido

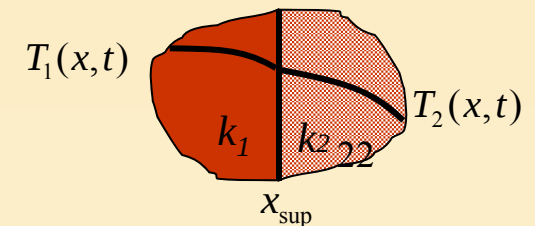
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{sup}} = h (T_{\infty} - T_{\text{sup}})$$



4ª Especie : de cambio de material

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{\text{sup}} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{\text{sup}}$$

$$T_1(x_{\text{sup}}, t) = T_2(x_{\text{sup}}, t)$$

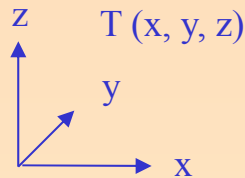


DEDUC. DE LA EC. GRAL. DE CONDUCCION DE CALOR

Ecuación de la conducción en diferentes sistemas de coordenadas :

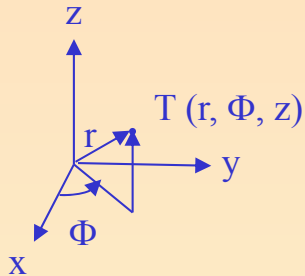
$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + g = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cartesianas



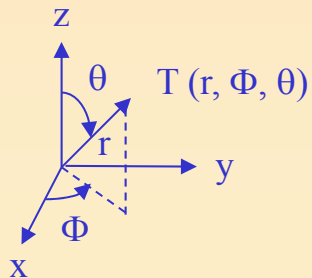
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cilíndricas



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Esféricas



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

SIMPLIFICACIONES DE LA ECUACIÓN GENERAL

0. Ecuación General:

$$\nabla(k\nabla T) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

1. Régimen variable y $k = \text{cte.}$:

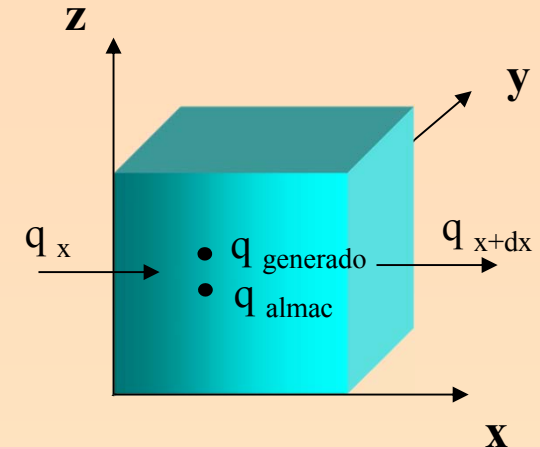
$$\nabla(\nabla T) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

2. Régimen variable, $k = \text{cte.}$ y $g = 0$:

$$\nabla(\nabla T) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

3. Régimen permanente, $k = \text{cte.}$ y $g = 0$:

$$\nabla(\nabla T) = 0$$



Difusividad térmica :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad [m^2 / s]$$

$\alpha \downarrow \Rightarrow$ transitorio lento

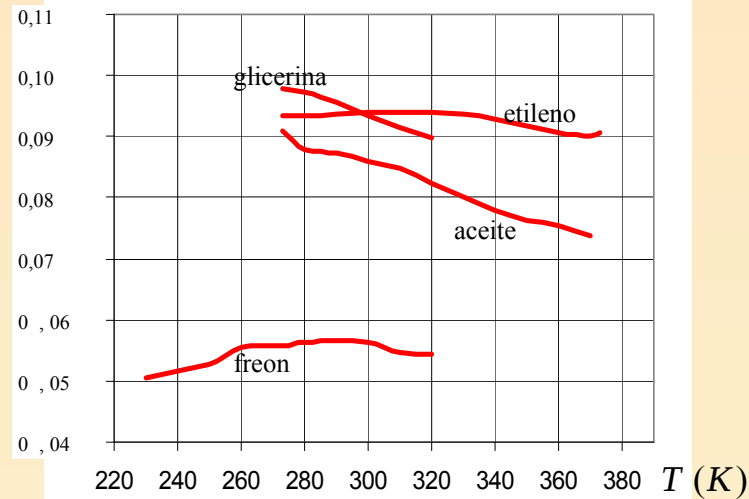
$\alpha \uparrow \Rightarrow$ transitorio rápido

DIFUSIVIDAD TERMICA

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{\text{conductividad}}{\text{densidad} * \text{calor específico}}$$

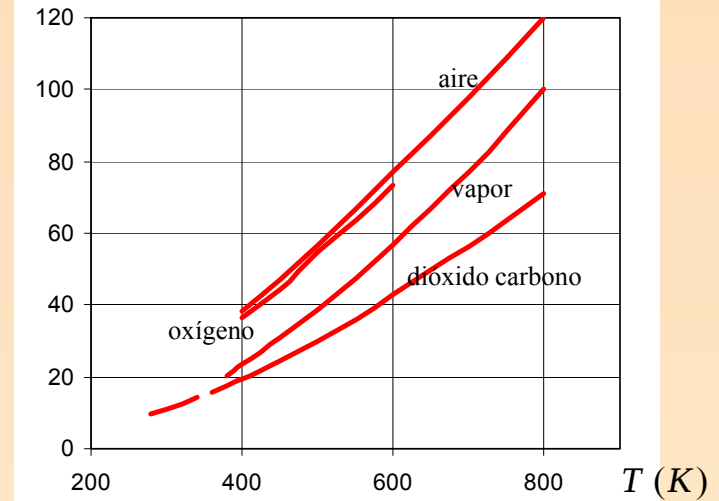
$\alpha \cdot 10^6 \text{ (m}^2/\text{s)}$

Líquidos



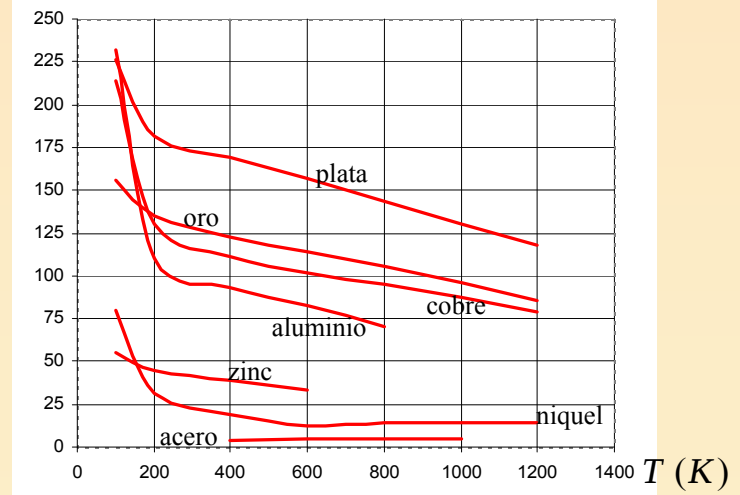
$\alpha \cdot 10^6 \text{ (m}^2/\text{s)}$

Gases



$\alpha \cdot 10^6 \text{ (m}^2/\text{s)}$

Sólidos



Conducción. Conducción estacionaria unidimensional

❑ Ejemplos prácticos de soluciones de ecuación del calor para geometrías sencillas:

❑ Placa plana

❑ Tuberías

❑ Analogía eléctrica

❑ Convección y radiación

❑ Estructuras compuestas

❑ Coeficiente global de transmisión de calor

❑ Superficies adicionales

❑ Ecuaciones que describen aletas de sección constante

REGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

PLACA PLANA

Ec. general :
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Simplificación : Estacionario y unidimensional $T = f(x, y, z, t) \rightarrow T = f(x)$
 conductividad constante y generación nula $k = cte \quad g = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \xrightarrow{\text{integrando}} \quad T = C_1 x + C_2$$

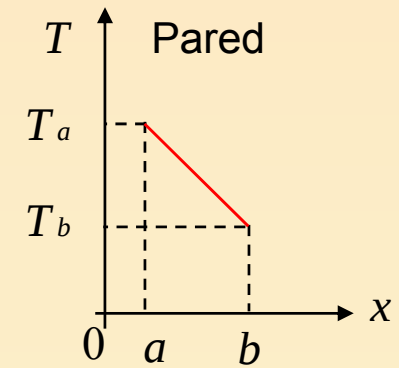
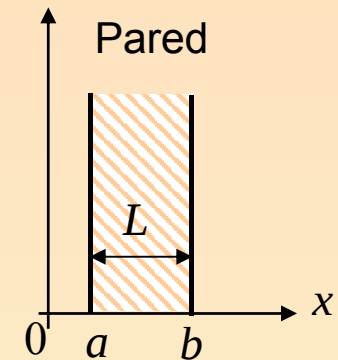
Con dos condiciones contorno $x = a \rightarrow T = T_a$
 $x = b \rightarrow T = T_b$

Ec. distribución de temp. :

$$T = \frac{T_b - T_a}{b - a} (x - a) + T_a$$

Flujo de calor :

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_a - T_b}{(b - a) / k} = \frac{T_a - T_b}{L / k} = Cte.$$



REGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

TUBERIAS

$$\text{Ec. general : } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Simplificaciones : Estacionario y unidimensional $T = f(r, \varphi, z, t) \rightarrow T = f(r)$

Conductividad constante y generación nula $k = \text{cte}$ $g = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad \xrightarrow{\text{integrando}} \quad T = C_1 \ln r + C_2$$

$$\begin{aligned} \text{Con dos condiciones contorno } r = r_a &\rightarrow T = T_a \\ r = r_b &\rightarrow T = T_b \end{aligned}$$

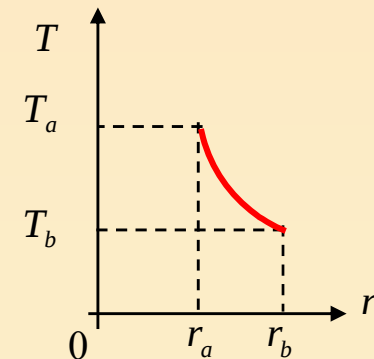
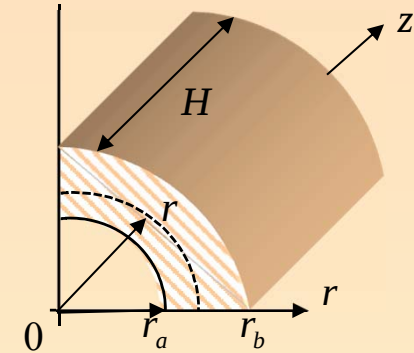
Ec. de distrib. de temp.

$$T = \frac{T_b - T_a}{\ln r_b - \ln r_a} (\ln r - \ln r_a) + T_a$$

$$\text{Flujo de calor : } q'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right| = \frac{1}{r} \frac{T_a - T_b}{\ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)}$$

Potencia térmica total :

$$q = 2 \pi r H \quad q'' = \frac{T_a - T_b}{\frac{\ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)}{2 \pi H k}} = \text{Cte}$$



REGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

PLACA PLANA COMPUESTA

Como el flujo de calor por unidad de superficie es constante :

$$q'' = \frac{T_a - T_b}{\frac{L_1}{k_1}} = \frac{T_b - T_c}{\frac{L_2}{k_2}} = \frac{T_a - T_c}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}} = cte$$

En caso de existir convección :

$$q'' = h_1 (T_1 - T_a) = h_2 (T_c - T_2)$$

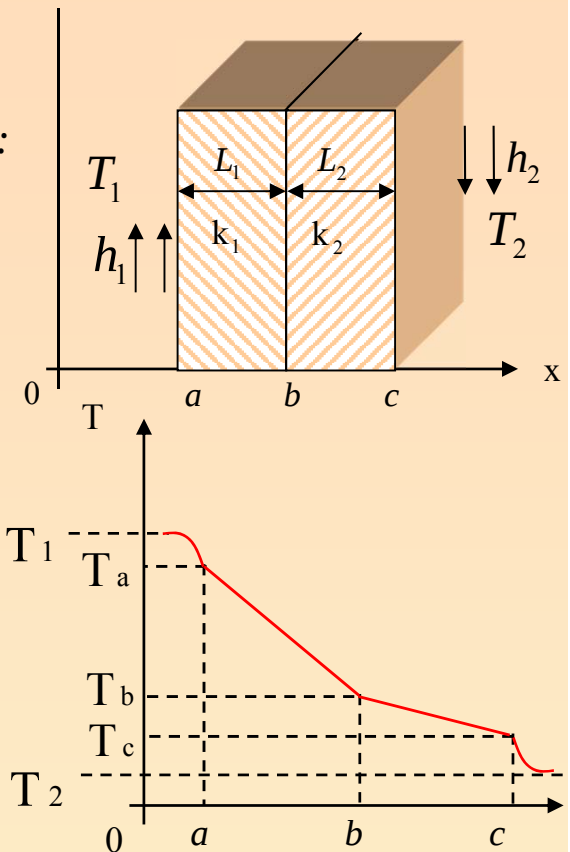
De forma general:

$$q'' = \frac{T_1 - T_a}{\frac{1}{h_1}} = \frac{T_a - T_b}{\frac{L_1}{k_1}} = \frac{T_b - T_c}{\frac{L_2}{k_2}} = \frac{T_c - T_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{1}{h_2}} = Cte$$

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\Sigma r_i}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\Sigma R_i}$$

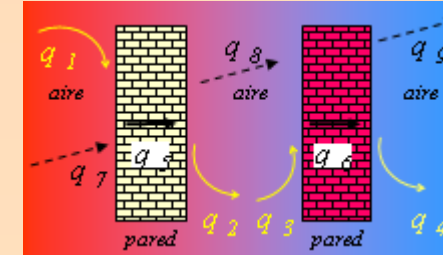
(De estas igualdades se pueden obtener las temperaturas intermedias)



REGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

ANALOGIA
ELECTRICA

$$I = \frac{\Delta V}{R} \rightarrow q = \frac{\Delta T}{R}$$



Placa

$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{b-a}{Ak}}$$

Conducción

$$R_{cond} = \frac{b-a}{Ak} = \frac{L}{Ak}$$

Cilindro

$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi Hk}}$$

$$R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}{2\pi Hk}$$

Esfera

$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1/r_a - 1/r_b}{4\pi k}}$$

$$R_{cond} = \frac{1/r_a - 1/r_b}{4\pi k}$$

Contacto

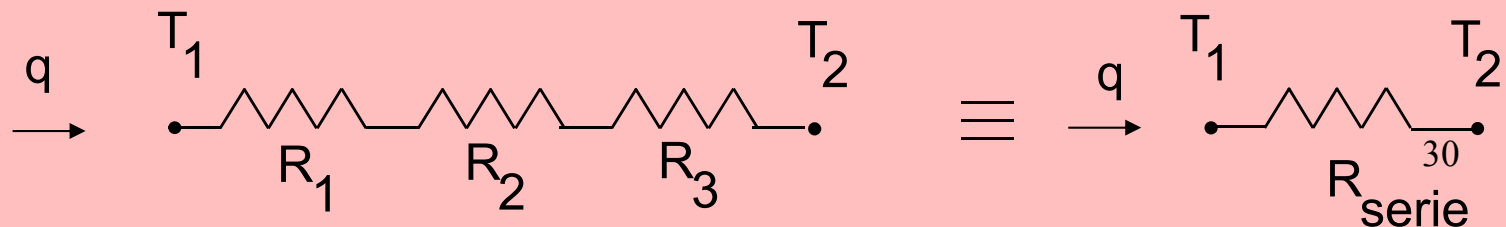
$$q = \frac{T_a - T_b}{r_{contacto}/A}$$

$$R_{contacto} = r_{contacto}/A$$

Convección

$$q = A_{sup} h (T_{sup} - T_{fluido}) = \frac{T_{sup} - T_{fluido}}{\frac{1}{A_{sup} h}}$$

$$R_{conv} = \frac{1}{A_{sup} h}$$

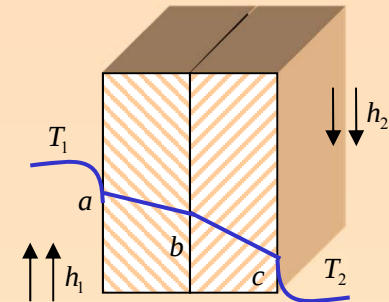


30
serie

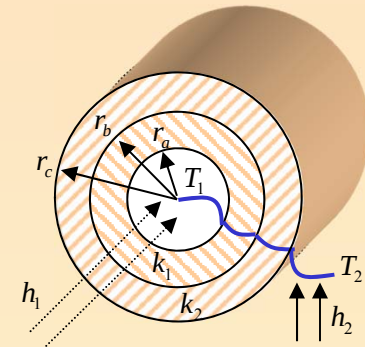
COEFICIENTE GLOBAL TRANSMISION DE CALOR

$$q = UA(T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{R_T}$$

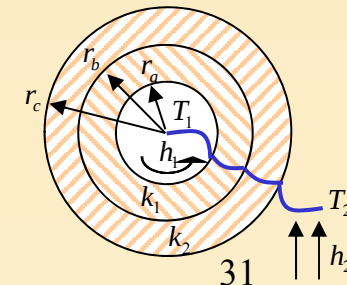
Placa $UA = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{\frac{1}{Ah_1} + \frac{b-a}{Ak_1} + \frac{c-b}{Ak_2} + \frac{1}{Ah_2}}$



Cilindro $UA = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{\frac{1}{A_a h_1} + \frac{\ln(r_b/r_a)}{2\pi H k_1} + \frac{\ln(r_c/r_b)}{2\pi H k_2} + \frac{1}{A_c h_2}}$



Esfera $UA = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{\frac{1}{A_a h_1} + \frac{1/r_a - 1/r_b}{4\pi k_1} + \frac{1/r_b - 1/r_c}{4\pi k_2} + \frac{1}{A_c h_2}}$



CONDUCTIVIDAD Y GENERACION VARIABLE. CASO PLACA

Ecuación de conducción para placa plana en régimen estacionario y unidireccional :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k_{(T)} \frac{dT}{dx} \right) + q'''_{(x)} &= 0 \longrightarrow \int d \left(k_{(T)} \frac{dT}{dx} \right) = \int -q'''_{(x)} dx \longrightarrow \\ \longrightarrow k_{(T)} \frac{dT}{dx} &= \int -q'''_{(x)} dx \longrightarrow \int k_{(T)} dT = \int \left[\int -q'''_{(x)} dx \right] dx \end{aligned}$$

1º) para $k = A + BT$ y $q''' = \text{cte}$.

$$AT + \frac{BT^2}{2} = -\frac{1}{2} q''' x^2 + C_1 x + C_2 \longrightarrow T = \frac{-A \pm \sqrt{\left(A^2\right) - 4\left(\frac{B}{2}\right) \left(+\frac{1}{2} q''' x^2 - C_1 x - C_2\right)}}{2\left(\frac{B}{2}\right)}$$

2º) para $k = A + BT$ y $q''' = 0$

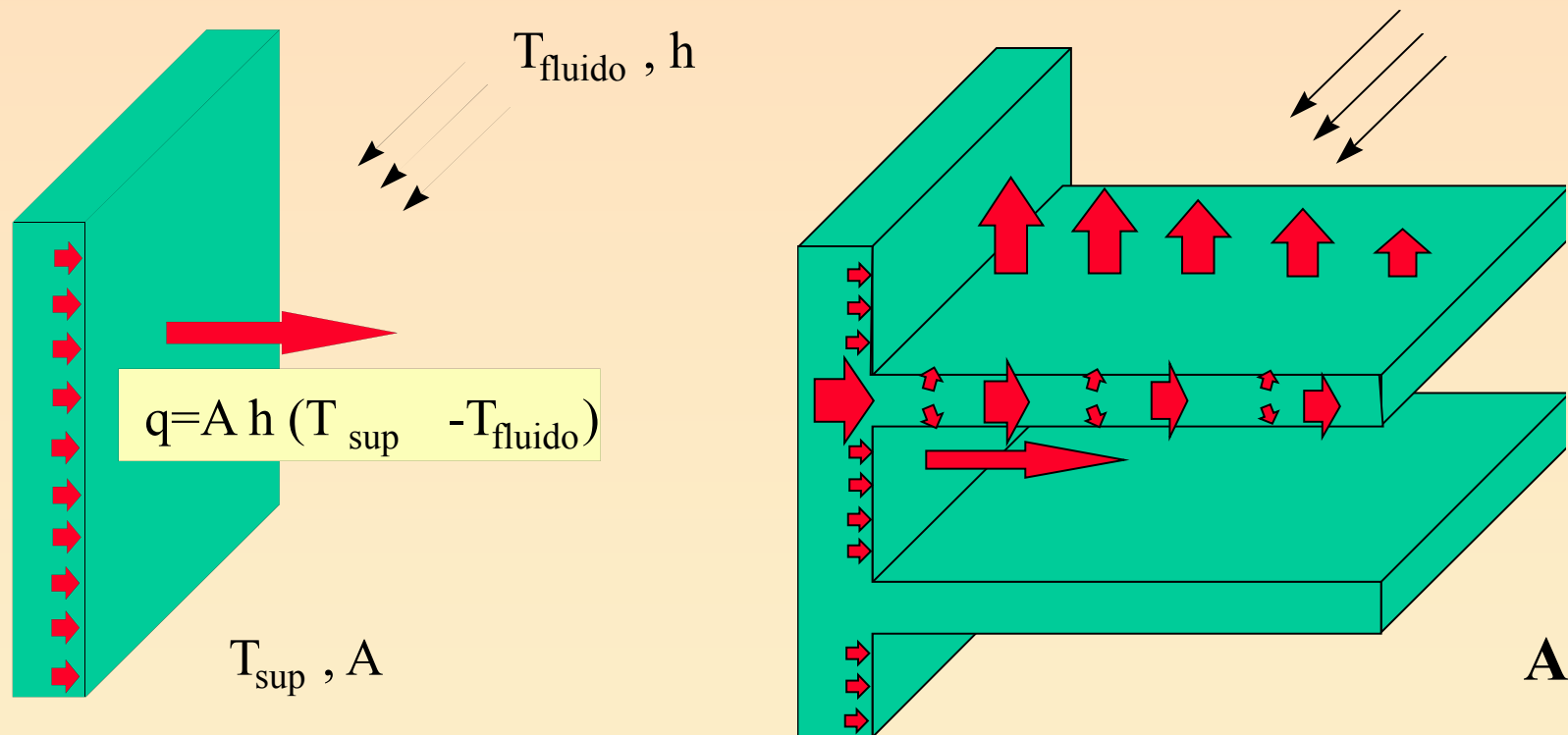
$$AT + \frac{BT^2}{2} = C_1 x + C_2 \longrightarrow T = \frac{-A \pm \sqrt{\left(A^2\right) - 4\left(\frac{B}{2}\right) (-C_1 x - C_2)}}{2\left(\frac{B}{2}\right)}$$

3º) para $k = \text{cte}$ y $q''' = \text{cte}$.

$$k T = -\frac{1}{2} q''' x^2 + C_3 x + C_4 \longrightarrow T = -\frac{1}{2} \frac{q'''}{k} x^2 + C_1 x + C_2$$

4º) para $k = \text{cte}$ y $q''' = 0 \longrightarrow T = C_1 x + C_2$

OBJETIVO: INCREMENTO DEL CALOR DISIPADO POR CONVECCIÓN AL FLUIDO.

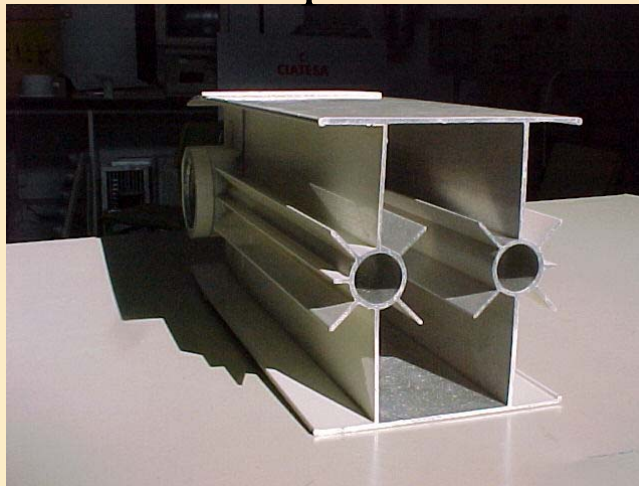


SUPERFICIES ADICIONALES. EJEMPLOS

Aplicaciones



Compresor



Radiador



Circuitos eléctricos

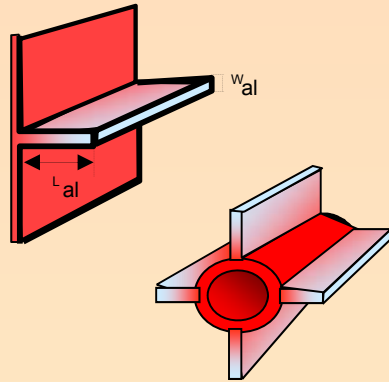


Condensador

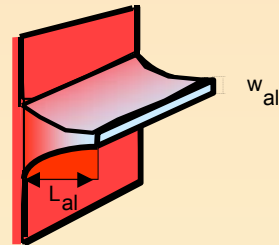
SUPERFICIES ADICIONALES. TIPOS

Rectas

Sección uniforme

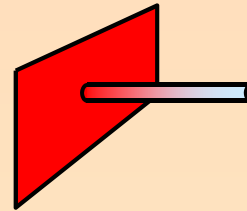


Sección variable

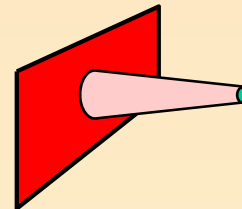


Agujas

Sección uniforme



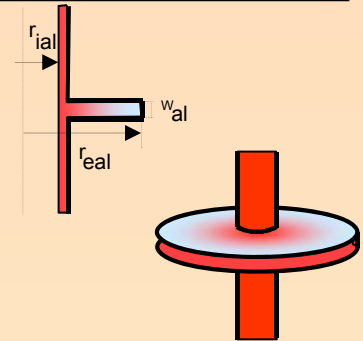
Sección variable



Anulares

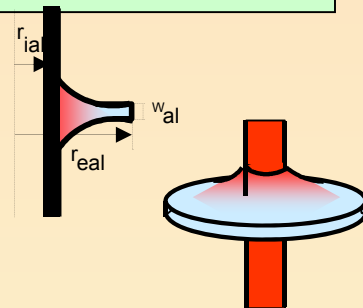
Espesor uniforme

Sección variable



Espesor variable

Sección variable



Aumenta la superficie exterior.

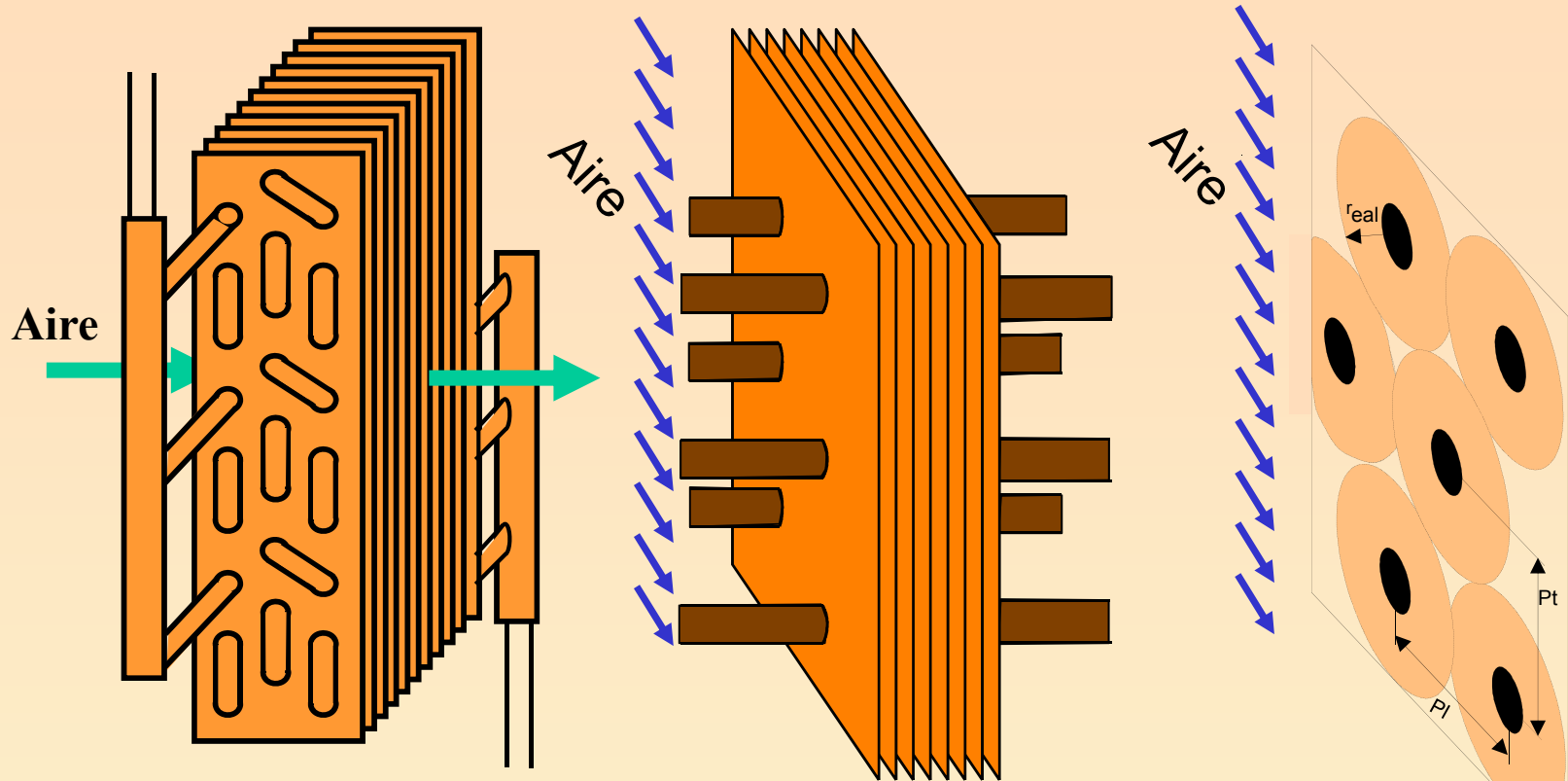
Aplicación cuando : $h \downarrow$ $k \uparrow$ $W \downarrow$

TEMA 2. CONDUCCION

3. Conducción estacionaria. Unidimensional II. Aletas (1h)

SUPERFICIES ADICIONALES

Aplicación de aletas anulares.



$$r_{ext\ aleta} = \sqrt{\frac{P_t P_l}{\pi}}$$

ECUACIÓN GENERAL SUPERFICIES ADICIONALES.

Flujo de calor que se transmite por conducción en $A_0(x)$:

$$q(x) = A_0(x) \cdot q'' = -k \frac{dT(x)}{dx} A_0(x)$$

Variación del calor que se transmite por conducción en un dx :

$$\frac{dq(x)}{dx} = -k \frac{d^2T(x)}{dx^2} A_0(x) - k \frac{dT(x)}{dx} \frac{dA_0(x)}{dx}$$

Calor cedido por convección en el dx :

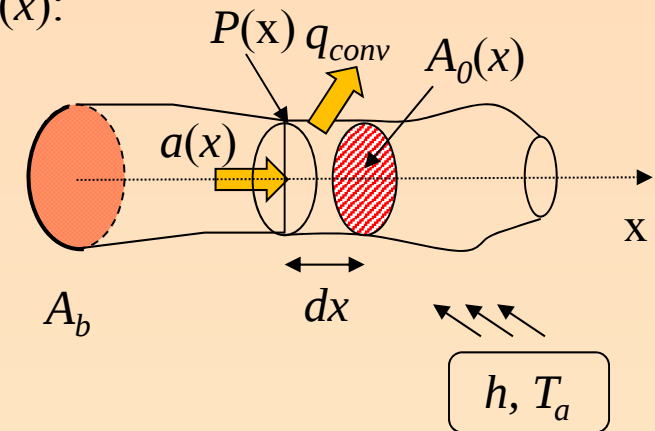
$$\frac{dq(x)}{dx} = hP(x)(T(x) - T_a)$$

Balance de energía: Variación conducción = calor cedido convección en el dx :

$$-k \frac{d^2T(x)}{dx^2} A_0(x) - k \frac{dT(x)}{dx} \frac{dA_0(x)}{dx} = hP(x)(T(x) - T_a)$$

- En función de la temperatura corregida $\theta(x) = T(x) - T_a$, la ecuación general será:

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{d\theta(x)}{dx} \frac{dA_0(x)}{dx} \frac{1}{A_0(x)} - \frac{hP(x)}{kA_0(x)} \theta(x) = 0$$



ALETA RECTA Y AGUJA DE ESPESOR UNIFORME

$$\theta(x) = T(x) - T_a$$

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{d \theta(x)}{dx} \frac{dA_0(x)}{dx} \frac{1}{A_0(x)}}_{=0} - \frac{hP(x)}{kA_0(x)} \theta(x) = 0$$

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - \frac{hP}{kA_0} \theta(x) = 0$$

Resulta :

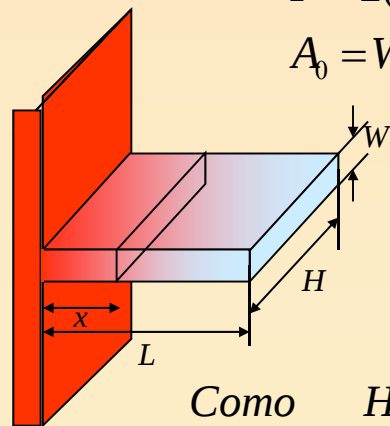
$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} - m^2 \theta(x) = 0$$

$$m^2 = \frac{hP}{kA_0}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_0}}$$

Solución:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} = C_1 \text{Ch}[m(L-x)] + C_2 \text{Sh}[m(L-x)]$$



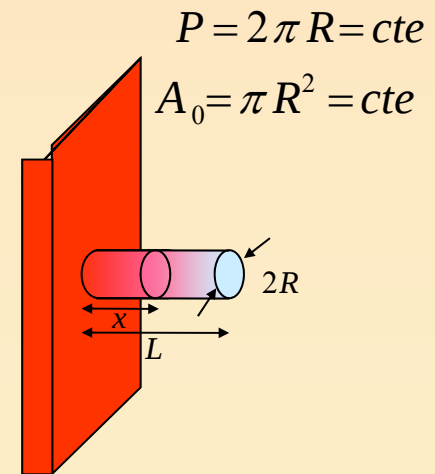
$$P = 2(H+W) = \text{cte}$$

$$A_0 = WH = \text{cte}$$

$$m = \sqrt{\frac{2h(H+W)}{kW H}}$$

Como $H \gg W$

$$m^2 = \frac{2h}{kW}$$



$$P = 2\pi R = \text{cte}$$

$$A_0 = \pi R^2 = \text{cte}$$

$$m^2 = \frac{2h}{kR}$$

ALETAS RECTAS Y AGUJAS DE ESPESOR UNIFORME

Condiciones de contorno

Temperatura en la base conocida

$$\theta_0 = \theta(x) \Big|_{x=0}$$

APROXIMACIÓN:

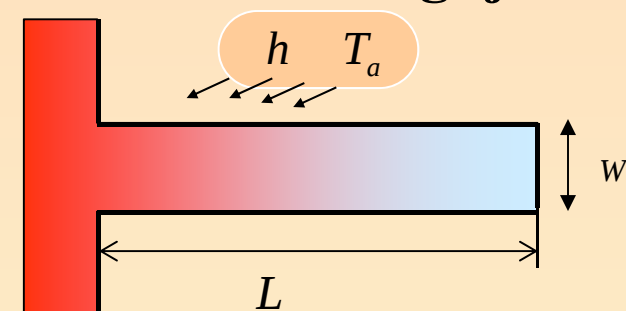
Flujo de calor despreciable en el extremo

$$-k \frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

Distribución de temperaturas

$$\theta(x) = \theta_0 \frac{Ch \left[m (L - x) \right]}{Ch (m L)}$$

Aleta recta o aguja



Calor transmitido

$$q = -kA_0 \frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=0} = k m A_0 \theta_0 Th (mL)$$

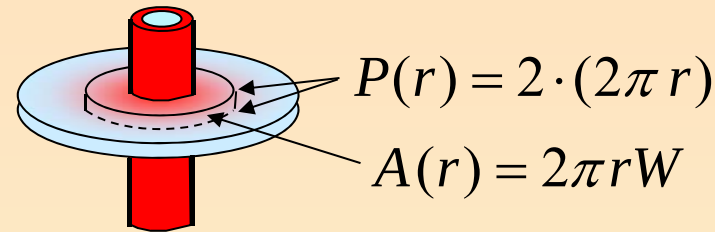
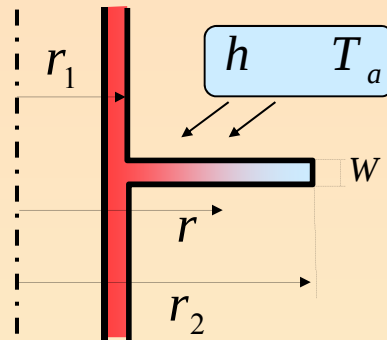
ALETA ANULAR DE ESPESOR UNIFORME.

$$\frac{d^2\theta(r)}{dr^2} + \frac{d\theta(r)}{dr} \frac{dA(r)}{dr} \frac{1}{A(r)} - \underbrace{\frac{h}{k} \frac{P(r)}{A(r)}}_{m^2} \theta(r) = 0$$

$$\theta(r) = T(r) - T_a$$

$$m^2$$

$$\longrightarrow m^2 = \frac{2h}{kW}$$



$$\frac{d^2\theta(r)}{dr^2} + \frac{d\theta(r)}{dr} \frac{1}{r} - m^2\theta(r) = 0$$

Cuya solución general. es:

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

I_0 func. de Bessel modificada de 1ª esp. de orden 0
 K_0 func. de Bessel modificada de 2ª esp. de orden 0

ALETA ANULAR DE ESPESOR UNIFORME

Condiciones de contorno

Temperatura en la base conocida

$$\theta_0 = \theta(r) \Big|_{r=r_1}$$

Con flujo de calor despreciable en el extremo (situación standard) $-k \frac{d\theta(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} = h_e \theta(r) \Big|_{r=r_2} = 0 \Rightarrow h_e = 0$

Caso $h_e \neq 0$ no útil

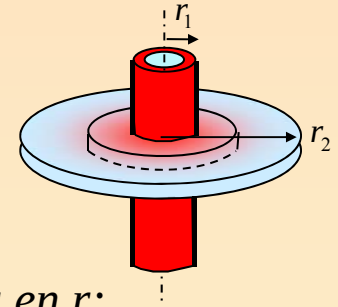
Aplicando dichas condiciones a la ec. general :

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

Resulta :

$$\theta(r) = \theta_0 \frac{I_0(mr) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}$$

Aleta anular



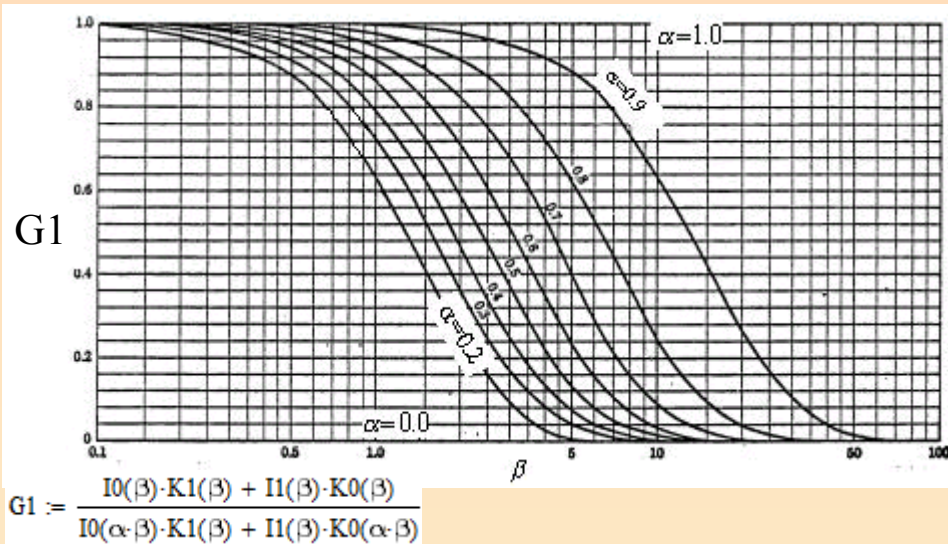
Aplicando Fourier obtenemos el calor en cualquier sección situada en r :

$$q(r) = -A(r)k \frac{d\theta}{dr} = mk2\pi r W \theta_0 \frac{K_1(mr) I_1(mr_2) - I_1(mr) K_1(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}$$

Particularizando para $r=r_1$ obtendremos el calor total cedido por la aleta

ALETA ANULAR DE ESPESOR UNIFORME

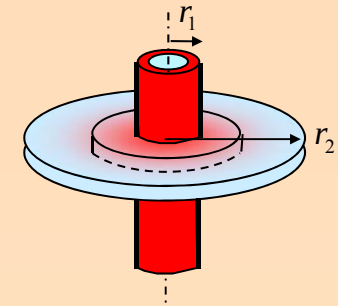
Gráfica para obtener θ en el extremo de la aleta (r_2)



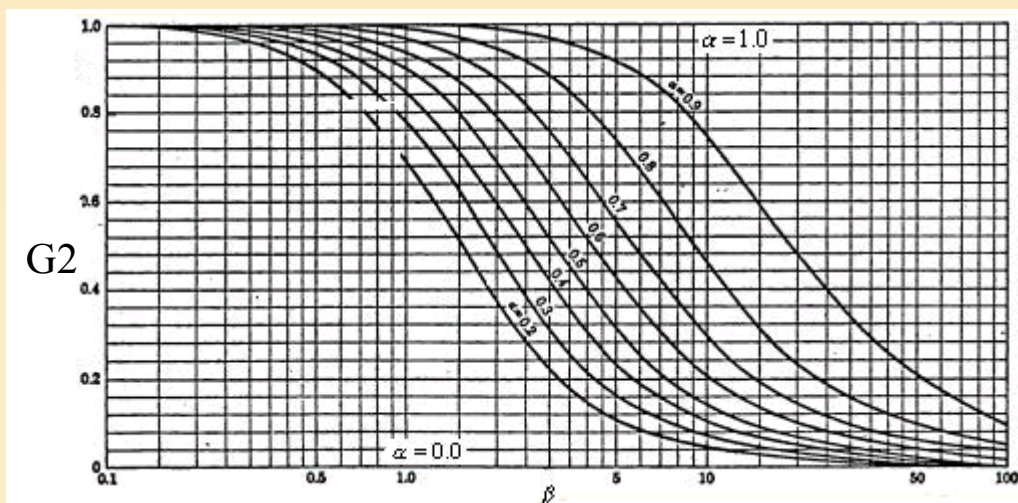
$$\theta(r_2) = \theta_0 \cdot G1$$

$$\alpha = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\beta = m \cdot r_2$$



Gráfica para obtener el **calor** total disipado por la aleta



$$q = k \cdot \pi \cdot W \cdot \theta_0 \cdot \beta^2 \cdot (1 - \alpha^2) G2$$

EFICIENCIA DE LAS ALETAS

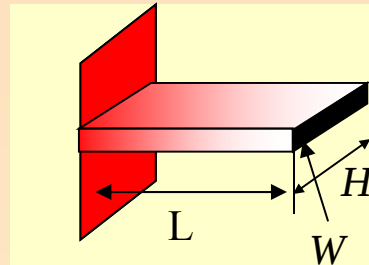
$$\eta = \frac{q}{q(\text{toda la superficie a } T_0)} = \frac{q}{ah\theta_0}$$

$$q = \eta ah\theta_0$$

a = área total aleta

Flujo de calor despreciable en el extremo

Aleta recta



$$m^2 = \frac{2h}{kW}$$

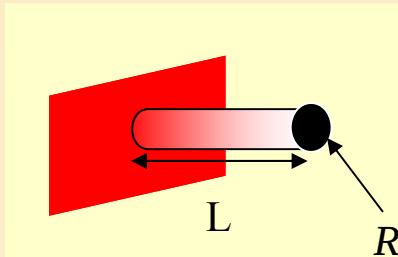
$$a = 2LH$$

$$q = k m A \theta_0 Th (mL)$$

luego

$$\eta = \frac{k m A \theta_0 Th (mL)}{ah \theta_0} = \frac{k m WH \theta_0 Th (mL)}{2LHh \theta_0} = \frac{Th (mL)}{mL}$$

Análogamente para agujas :



$$m^2 = \frac{2h}{kR}$$

$$a = 2\pi RL$$

$$\eta = \frac{Th ml}{mL}$$

TEMA 2. CONDUCCION

3. Conducción estacionaria. Unidimensional II. Aletas (1h)

SUPERFICIES ADICIONALES. TIPOS

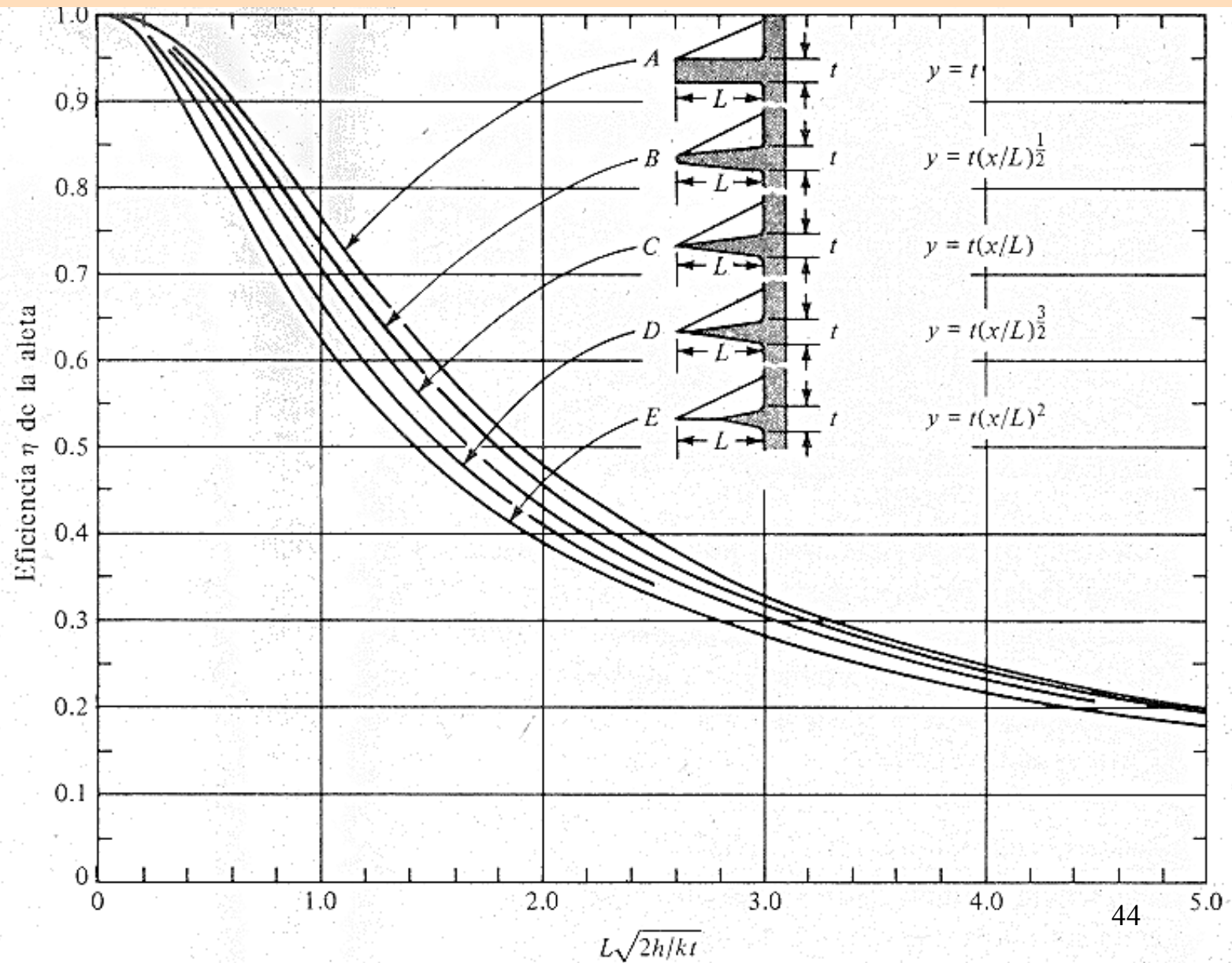
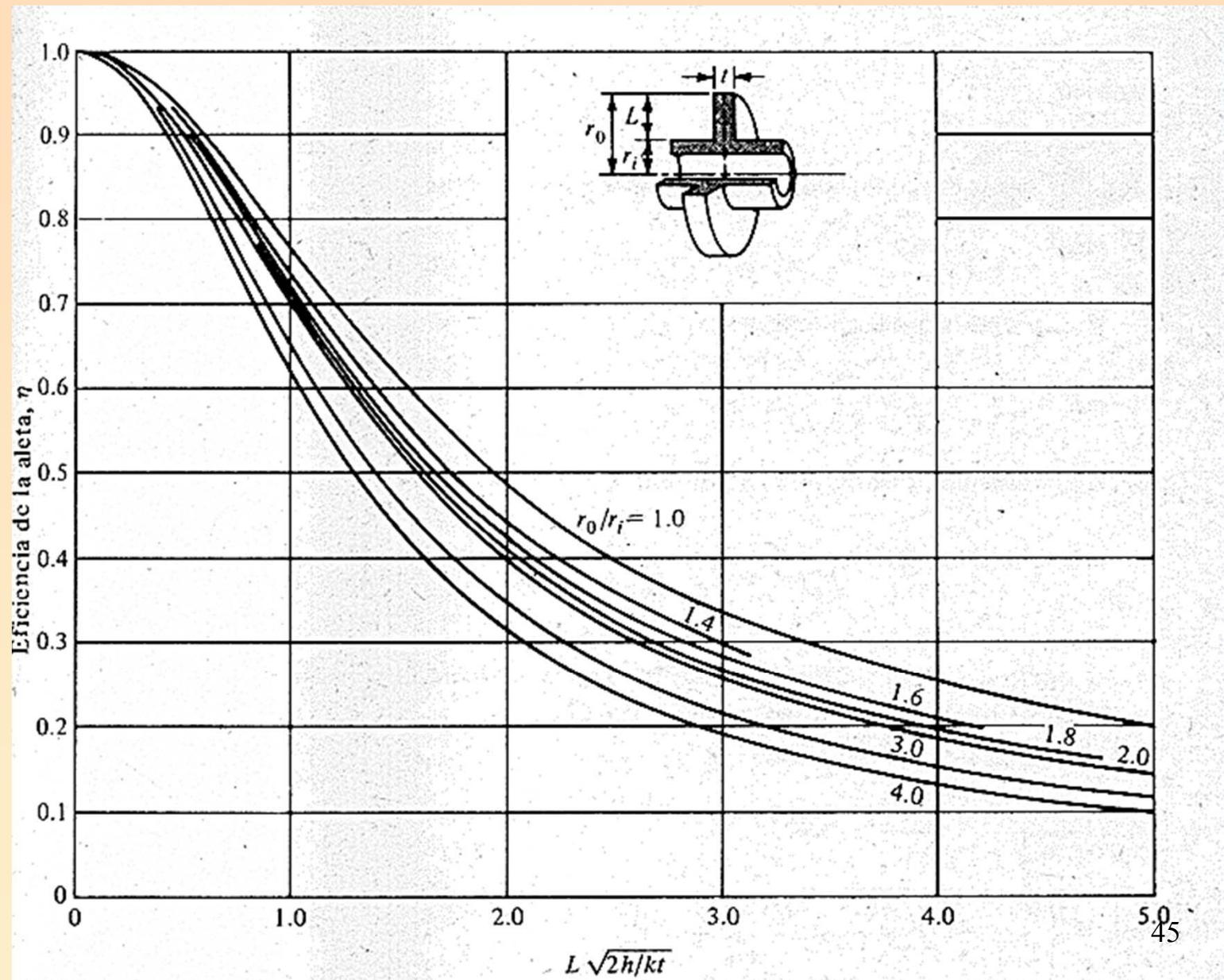


FIG. 2.11. Eficiencia de aletas axiales en donde el espesor y de la aleta varía con la di-

TEMA 2. CONDUCCION

3. Conducción estacionaria. Unidimensional II. Aletas (1h)

SUPERFICIES ADICIONALES. TIPOS



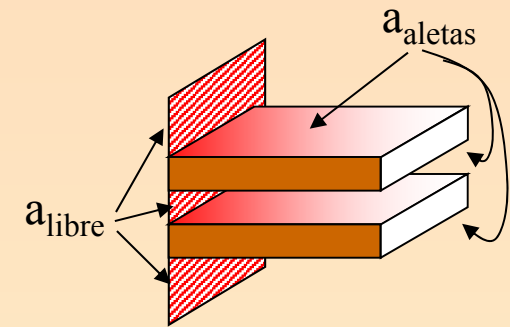
CALOR TOTAL TRANSFERIDO POR UNA SUPERFICIE CON ALETAS

$$q_{total} = q_{\text{área aletas}} + q_{\text{área libre}}$$

$$a_{\text{libre}} = a_{\text{total}} - a_{\text{aletas}}$$

$$q_{total} = \eta a_{\text{aletas}} h \theta_0 + (a_{\text{total}} - a_{\text{aletas}}) h \theta_0$$

$$q_{total} = a_{\text{total}} h \theta_0 \left[\eta \left(\frac{a_{\text{aletas}}}{a_{\text{total}}} \right) + 1 - \left(\frac{a_{\text{aletas}}}{a_{\text{total}}} \right) \right]$$



Pudiendo definir la eficiencia ponderada de la superficie completa como:

$$\eta' = [\eta \beta + 1 - \beta] \quad \text{siendo} \quad \beta = \frac{a_{\text{aletas}}}{a_{\text{total}}}$$

$$q_{total} = \eta' a_{\text{total}} h \theta_0$$

O bien:

$$q_{total} = (a_{\text{libre}} + \eta a_{\text{aletas}}) h \theta_0$$

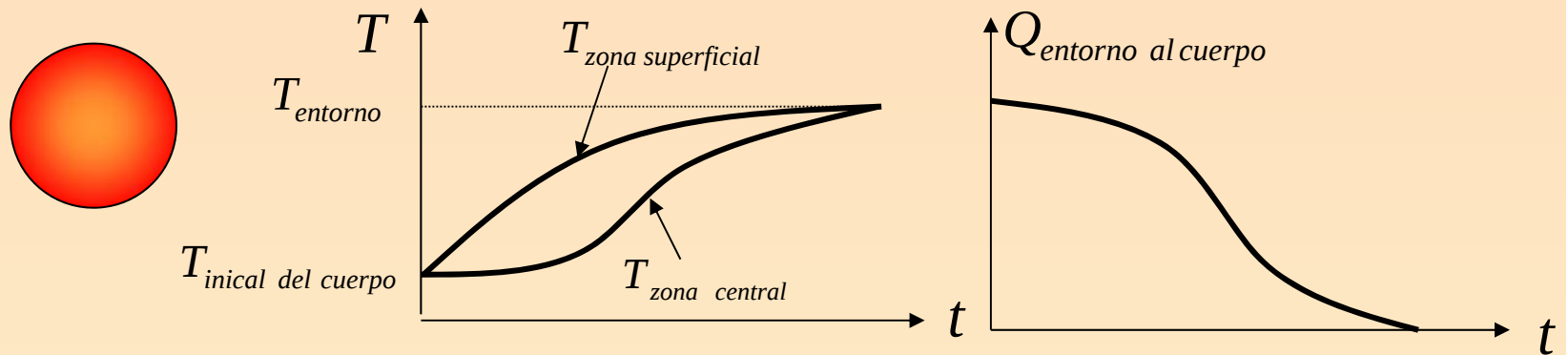
CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO

- ❑ Conducción de calor transitoria**
- ❑ Aproximacion cero-dimensional**
- ❑ Numero de Biot y Numero de Fourier**
- ❑ Ecuacion transitoria de conduccion de calor para una placa**
- ❑ Diagramas de Heissler**

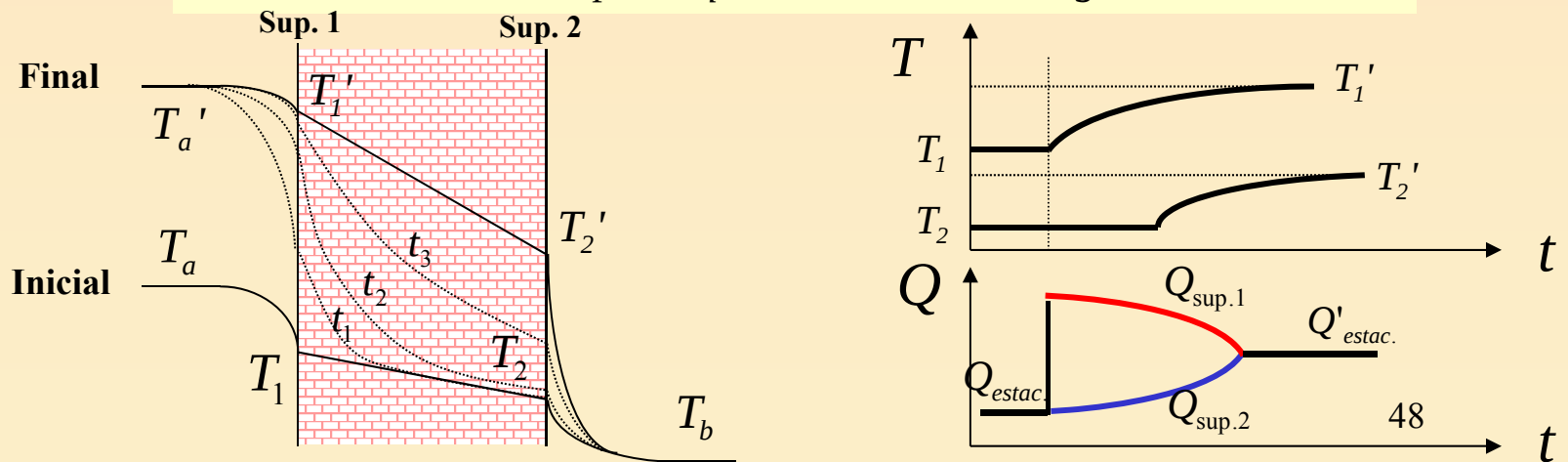
CONDUCCION EN REGIMEN TRANSITORIO. TIPOS

- Tipos:**
- Calentar (o enfriar) bruscamente un sólido
 - Someter al sólido a cambios cíclicos de temperatura.
 - Someter al sólido a unas condiciones de temperatura variable cualesquiera

Ejemplos: - Calentamiento de un cuerpo en un recinto a temperatura cte.



- Calentamiento de una placa que se encuentra en régimen estacionario



CONDUCCION TRANSITORIA. CERO-DIMENSIONAL.**Modelo cero-dimensional (Temperatura uniforme en todo el cuerpo)**

Cuerpos con resistencia interna despreciable ($k \uparrow \uparrow$)

Balance de energía

$$mCp \frac{dT}{dt} = -Ah(T - T_a)$$

Separando variables:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -\frac{Ah}{mCp} dt$$

Integrando:

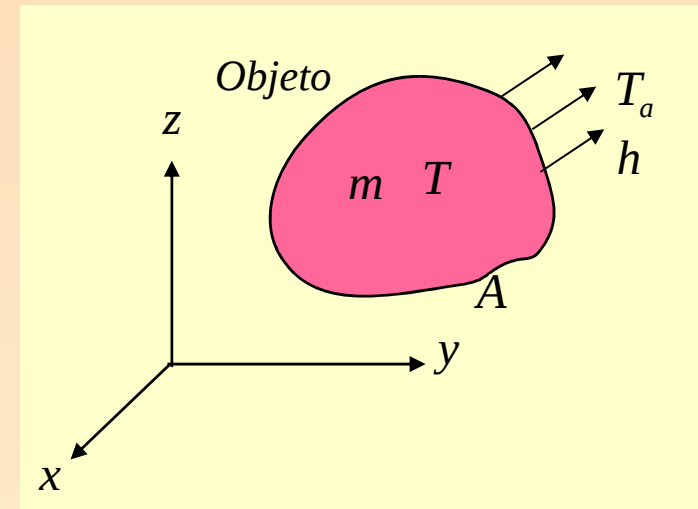
$$\int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T - T_a} = \int_0^t -\frac{Ah}{mCp} dt$$

Despejando:

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) e^{-\frac{Ah}{mCp}t} \longrightarrow \frac{(T_f - T_a)}{(T_i - T_a)} = \frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\frac{Ah}{V\rho Cp}t} = e^{-\frac{Ah\alpha}{Vk}t}$$

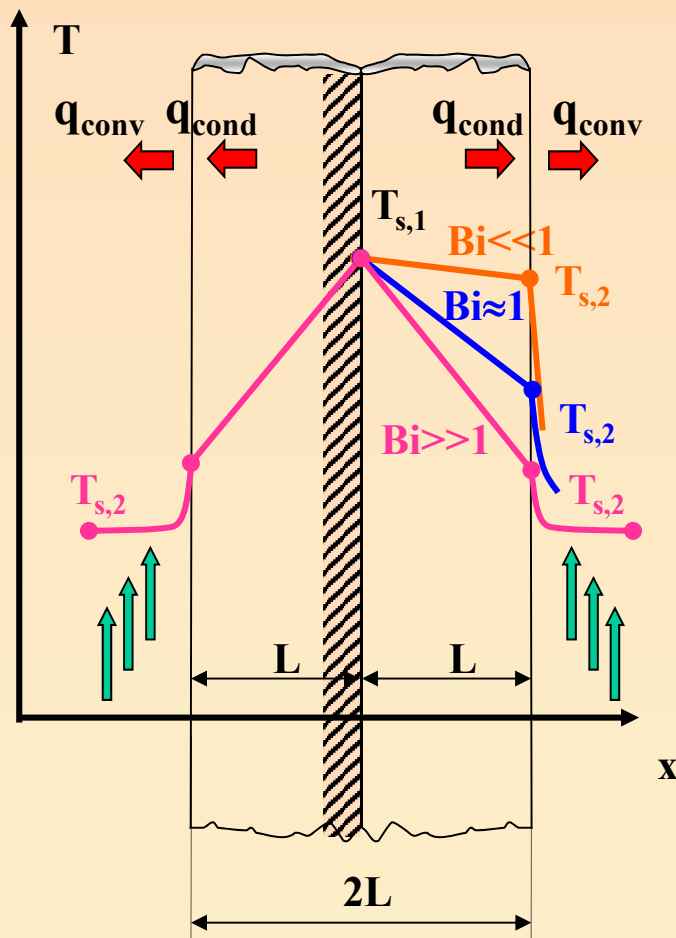
Cantidad de calor.

$$[q]_0^t = mCp (T_i - T_f) = mCp (T_i - T_a)(1 - e^{-\frac{Ah}{mCp}t})$$



NUMERO BIOT

Comparación entre la variación de temperatura en el interior de la pieza (conducción) con la variación de temperatura en el fluido (convección).



En condiciones estacionarias, el calor que se transmite por conducción dentro de la placa es igual al que se transmite por convección entre la superficie de la placa y el fluido en contacto con ésta:

$$\frac{k_{placa} \cdot A}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = h \cdot A (T_{s,2} - T_{\infty})$$

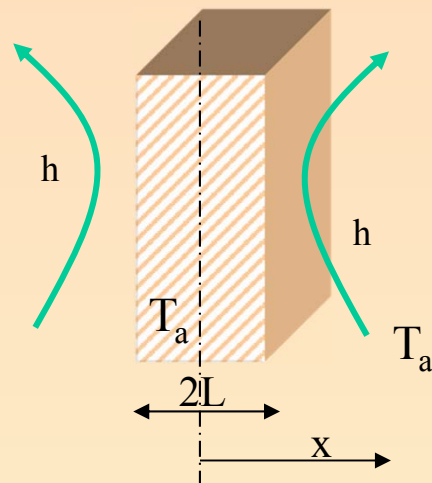
$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{L/k_{placa} \cdot A}{1/h \cdot A} = \frac{R_{conduc.}}{R_{convec.}} = \frac{h \cdot L}{k_{placa}}$$

Número de Biot

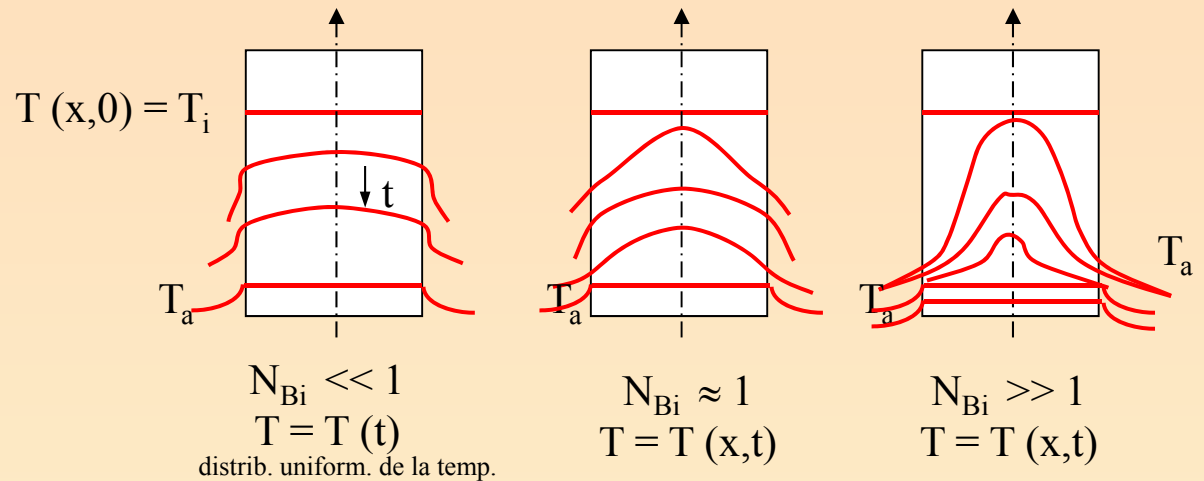
Placa	Cilindro	Esfera
$N_{Bi} = \frac{h \cdot L}{k_{solido}}$	$N_{Bi} = \frac{h \cdot r}{k_{solido}}$	$N_{Bi} = \frac{h \cdot r}{k_{solido}}$

CONDUCCION TRANSITORIA. CERO-DIMENSIONAL.

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) e^{-\frac{Ah}{mCp}t}$$



Evolución de temperaturas para distintos N_{Bi}



El modelo cero dimensional es válido si $N_{Bi} \leq 0.1$

CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. PLACAS

Modelo uni-dimensional

Caso de placa infinita.

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Evolución para la placa desde una temperatura inicial $f(x)$ a una temperatura final T_1

Realizando el cambio de variable

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_1$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Método de separación de variables

$$\Rightarrow \theta(x, t) = R(x) P(t)$$

Sustituyendo y separando variables : $\Rightarrow \frac{1}{R(x)} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{P(t)} \frac{d P(t)}{dt} = -M^2$

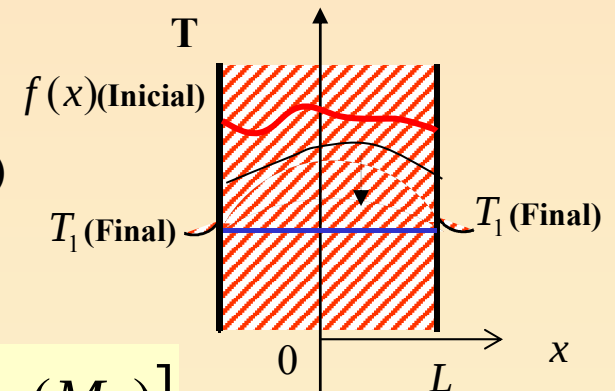
e integrando nos da :

$$P(t) = C_1 e^{-M^2 \alpha t} \quad R(x) = C_2 \sin(Mx) + C_3 \cos(Mx)$$

Sustituyendo :

$$\theta(x, t) = e^{-M^2 \alpha t} [B_1 \sin(Mx) + B_2 \cos(Mx)]$$

Donde B_1 y B_2 son ctes de integración que se obtienen a partir de las condiciones de contorno.



CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. PLACAS

PLACA INFINITA. CAMBIO BRUSCO DE LA TEMPERATURA DEL FLUIDO QUE BAÑA LA PLACA

Retomando la ecuación general :

$$\theta(x,t) = e^{-M^2 \alpha t} (B_1 \sen (M x) + B_2 \cos (M x))$$

Con las nuevas condiciones de contorno :

Flujo de calor en el centro de la placa nulo
 $t > 0 ; x = 0 ; \left. \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow B_1 = 0$
 $f(x)$ debe ser simétrica

Convección en el extremo de la placa
 $t > 0 ; x = L ; \left. \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{h}{k} \theta_L$

$$-e^{-M^2 \alpha t} M B_2 \sen (ML) = -\frac{h}{k} e^{-M^2 \alpha t} B_2 \cos (ML) \Rightarrow \operatorname{tg} (ML) = \frac{hL}{k} \frac{1}{ML} = \frac{N_{Bi}}{ML}$$

M_n solución
 $n=1,2,3$

Temp. Inicial T_i cte. $\theta(x,0) = \psi(x) = T_i - T_a = \theta_i$

$$M_n L = f(N_{Bi})$$

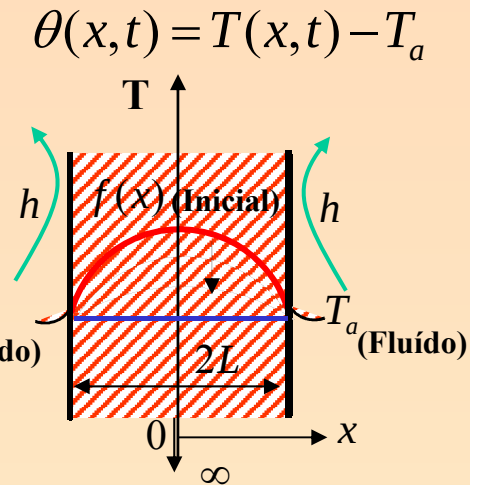
$$\theta(x,t) = 2 \theta_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-M_n^2 \alpha t} \frac{\sen (M_n L)}{M_n L + \sen (M_n L) \cos (M_n L)} \cos (M_n x)$$

$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}$$

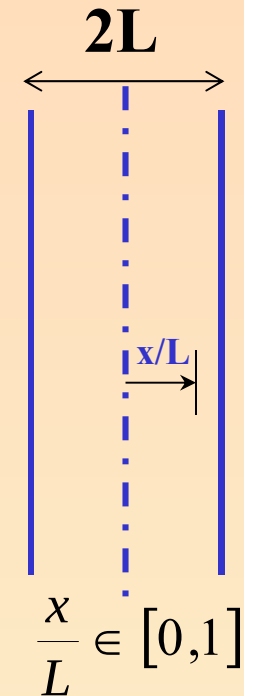
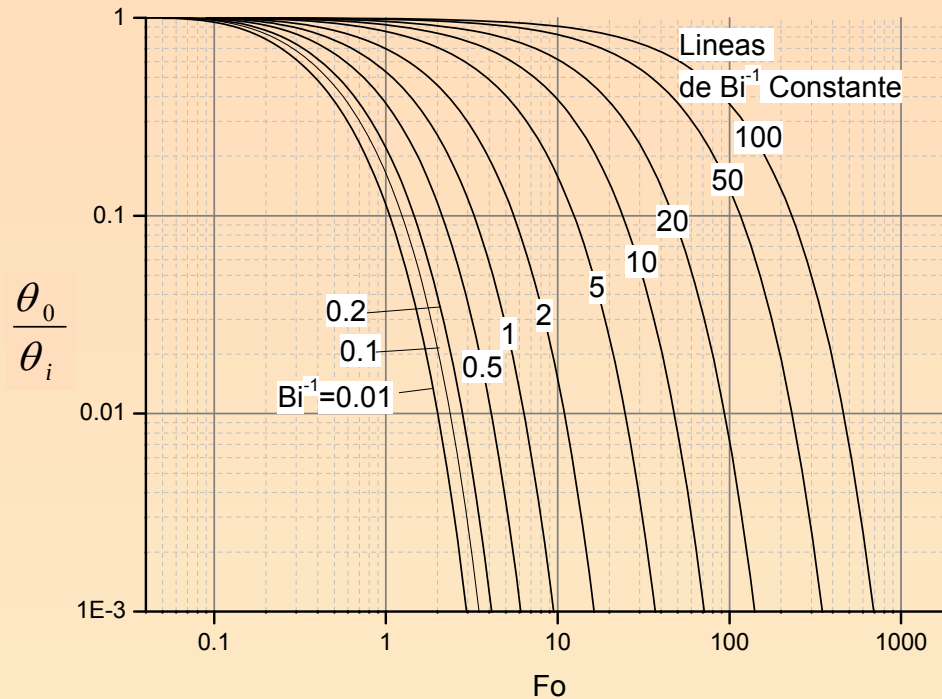
$$\theta(x,t) = 2 \theta_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n L)^2 N_{Fo}} \frac{\sen (M_n L)}{M_n L + \sen (M_n L) \cos (M_n L)} \cos (M_n L \frac{x}{L})$$

$$\frac{\theta(x,t)}{\theta_i} = f(N_{Fo}, N_{Bi}, x/L)$$



CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. PLACAS

T_0 : temperatura en el plano central de la placa = $T(x=0,t)$



$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_a$$

$$\theta(0,t) = \theta_0 = 2\theta_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n L)^2 N_{Fo}} \frac{\sin(M_n L)}{M_n L + \sin(M_n L) \cos(M_n L)}$$

$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}$$

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = f(N_{Fo}, N_{Bi})$$

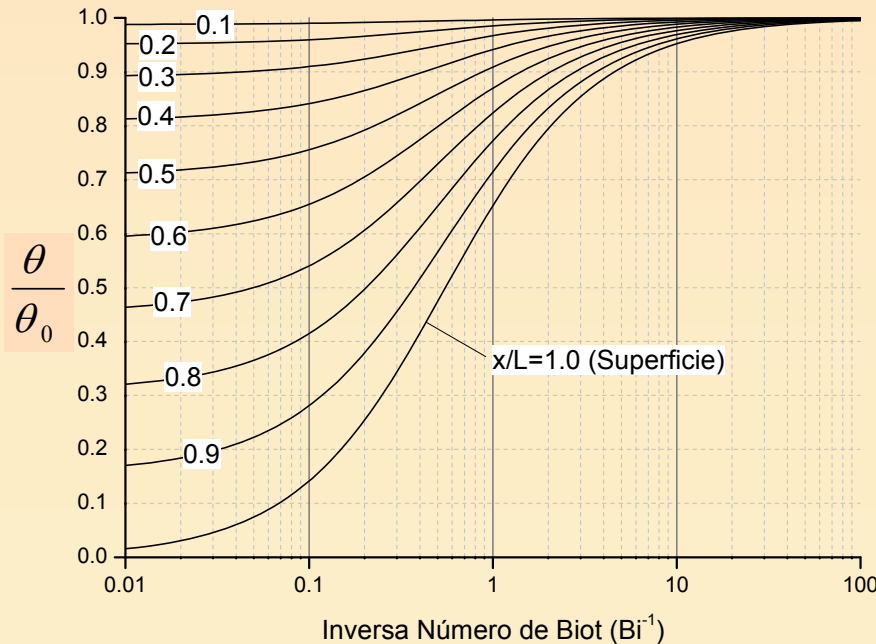
CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. PLACAS

$$\theta(x, t) = 2\theta_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n L)^2 N_{Fo}} \frac{\text{sen}(M_n L)}{M_n L + \text{sen}(M_n L) \cos(M_n L)} \cos\left(M_n L \frac{x}{L}\right)$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 = 2\theta_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n L)^2 N_{Fo}} \frac{\text{sen}(M_n L)}{M_n L + \text{sen}(M_n L) \cos(M_n L)}$$

Tomando únicamente el primer término
(válido después de los primeros instantes)

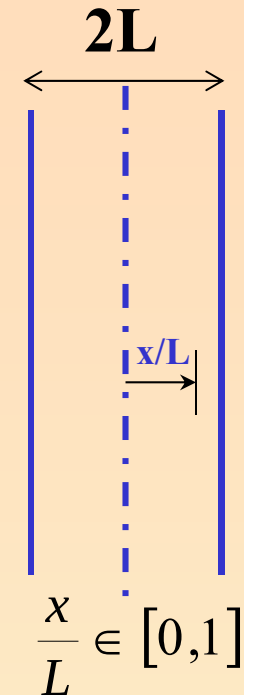
$$\frac{\theta(x, t)}{\theta_0} = \frac{\frac{\text{sen}(M_n L)}{M_n L + \text{sen}(M_n L) \cos(M_n L)} \cos\left(M_n L \frac{x}{L}\right)}{\frac{\text{sen}(M_n L)}{M_n L + \text{sen}(M_n L) \cos(M_n L)} \cos\left(M_n L \frac{x}{L}\right)} = f\left(N_{Bi}, \frac{x}{L}\right)$$



T_0 : temperatura en el plano central de la placa = $T(x=0, t)$

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_a$$

$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$



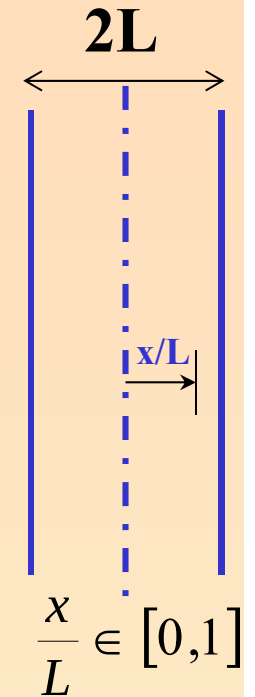
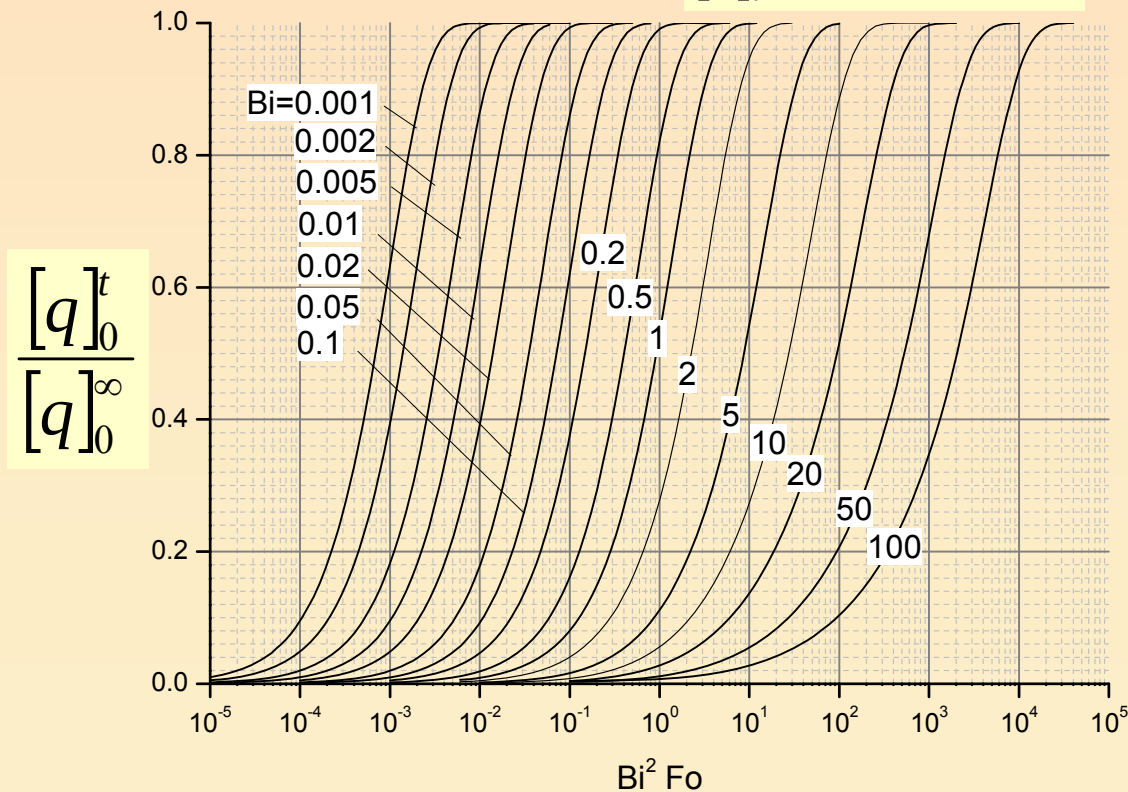
CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. PLACAS

$$[q]_0^t = -2Ak \int_0^t \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} dt =$$

$$= 2A\rho C_p L (T_0 - T_a) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-M_n^2 \alpha t}) \frac{1}{M_n L} \frac{\sin^2(M_n L)}{M_n L + \sin(M_n L) \cos(M_n L)}$$

$$[q]_0^{\infty} = 2A\rho C_p L (T_0 - T_a)$$

$$\frac{[q]_0^t}{[q]_0^{\infty}} = f(N_{Bi}, N_{Fo})$$



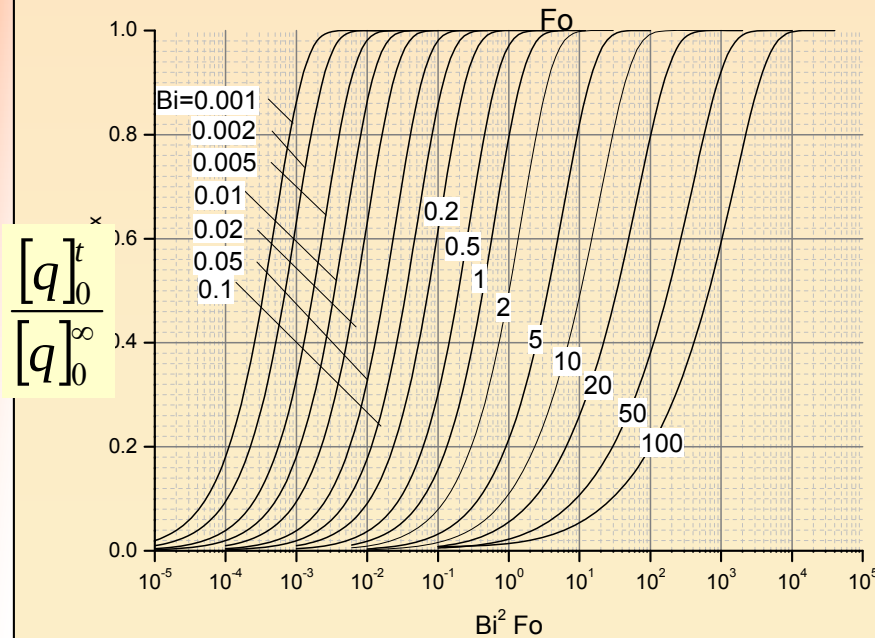
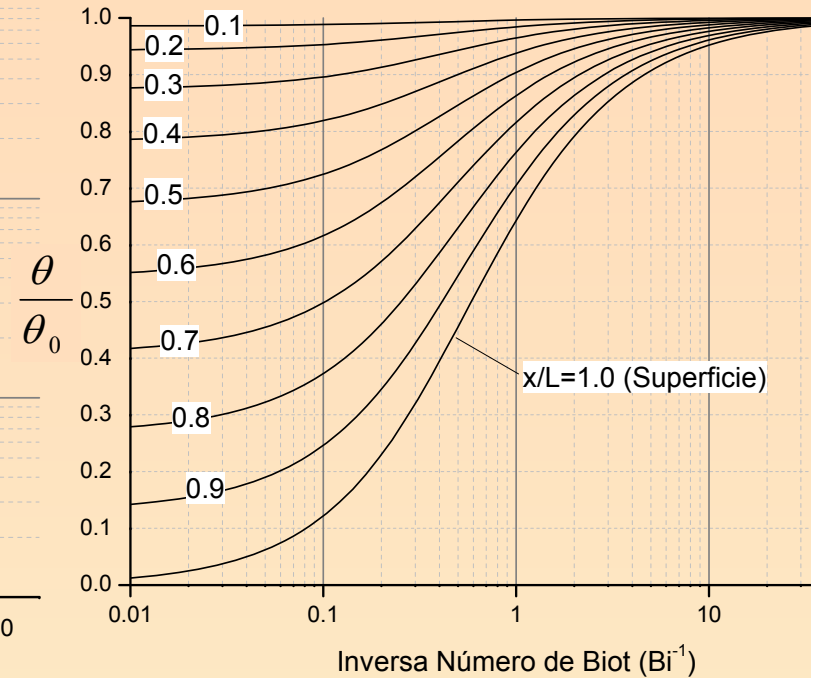
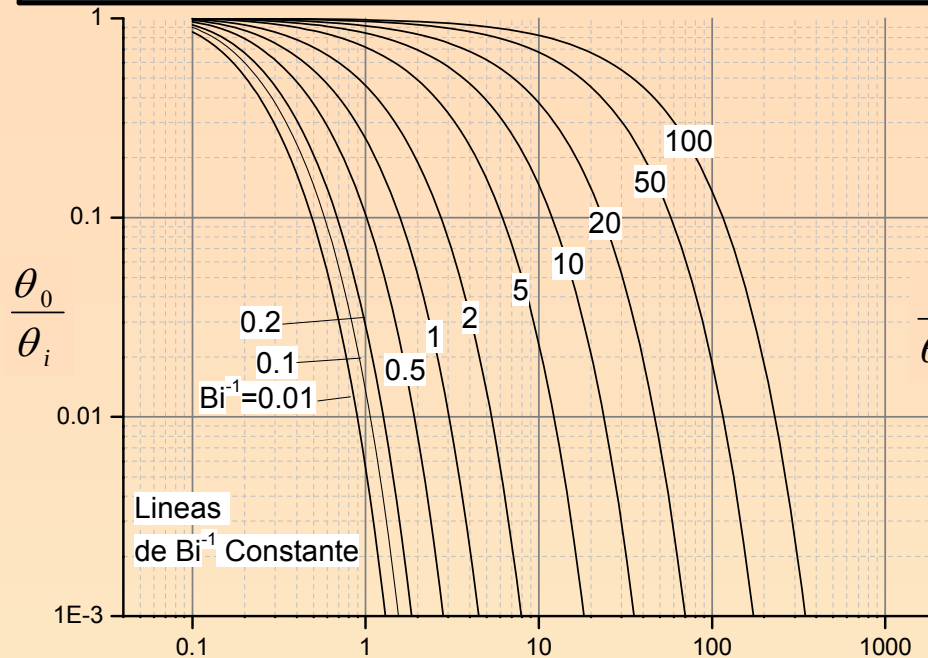
$$N_{Bi} = \frac{hL}{k}$$

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}$$

TEMA 2. CONDUCCION

3. Conducción transitoria (2h)

CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. CILINDROS



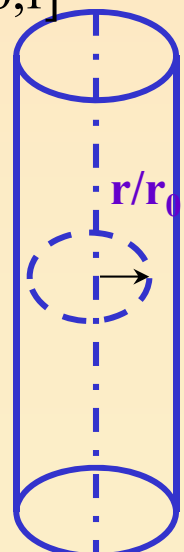
To: temperatura en el eje del cilindro $T(r=0,t)$ $\frac{r}{r_0} \in [0,1]$

$$\theta(r,t) = T(r,t) - T_a$$

$$N_{Bi} = \frac{hr_0}{k}$$

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t}{r_0^2}$$

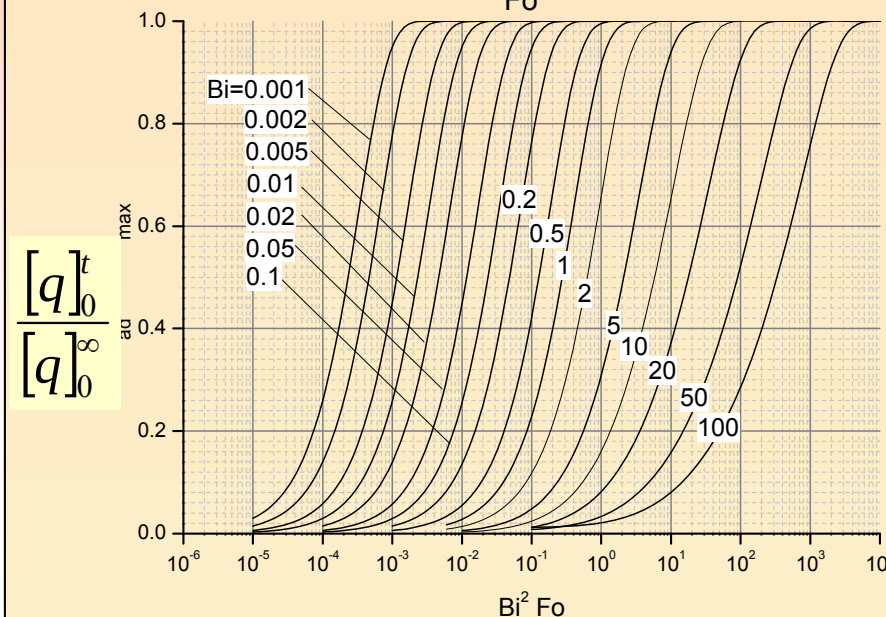
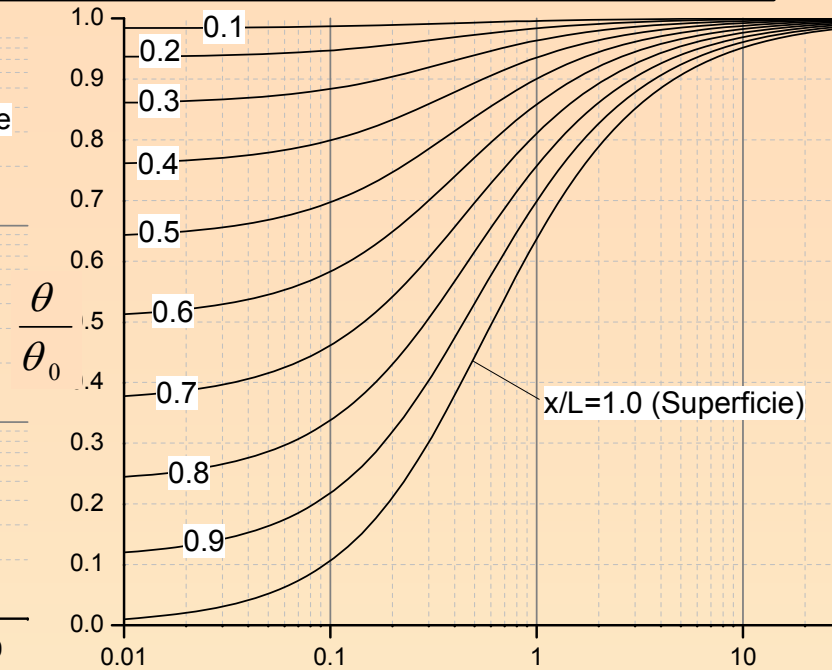
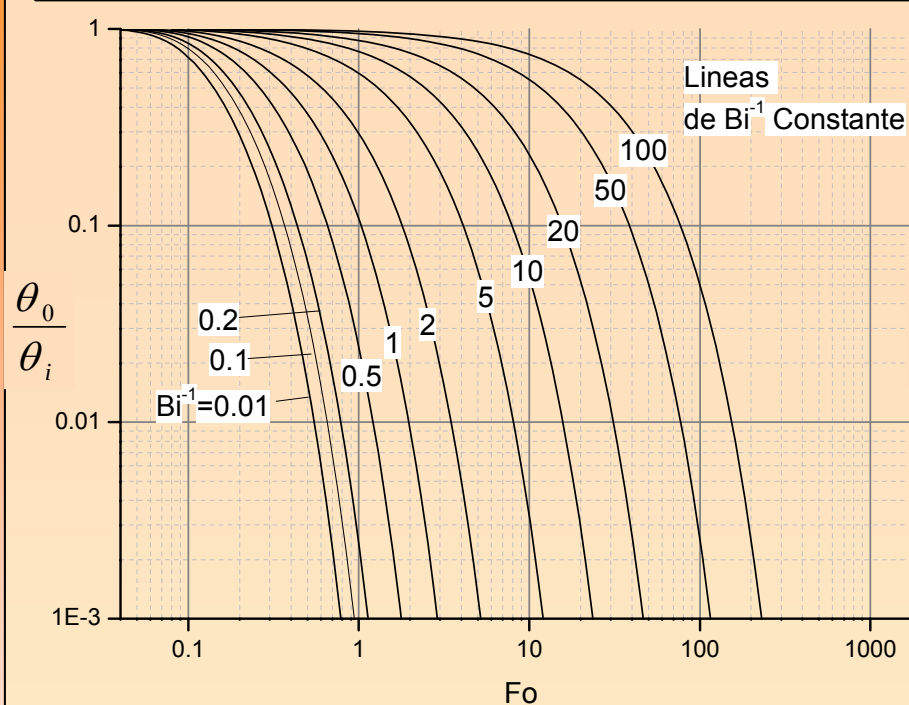
$$[q]_0^\infty = V\rho C_p(T_0 - T_a)$$



TEMA 2. CONDUCCION

3. Conducción transitoria (2h)

CONDUCCION TRANSITORIA. UNI-DIMENSIONAL. ESFERA



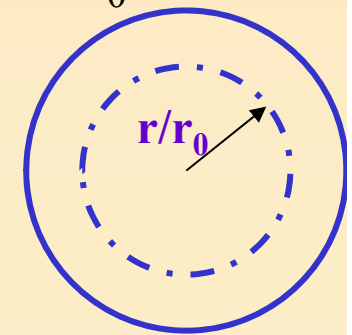
To: temperatura en el centro de la esfera $T(r=0,t)$ $\frac{r}{r_0} \in [0,1]$

$$\theta(r,t) = T(r,t) - T_a$$

$$N_{Bi} = \frac{hr_0}{k}$$

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t}{r_0^2}$$

$$[q]_0^\infty = V\rho C_p(T_0 - T_a)$$



https://www.youtube.com/watch?v=Atnjo7dD_bA

<https://www.youtube.com/watch?v=xq1Q5DwfVNU>

https://www.youtube.com/watch?v=w_IbPRNZ6ho