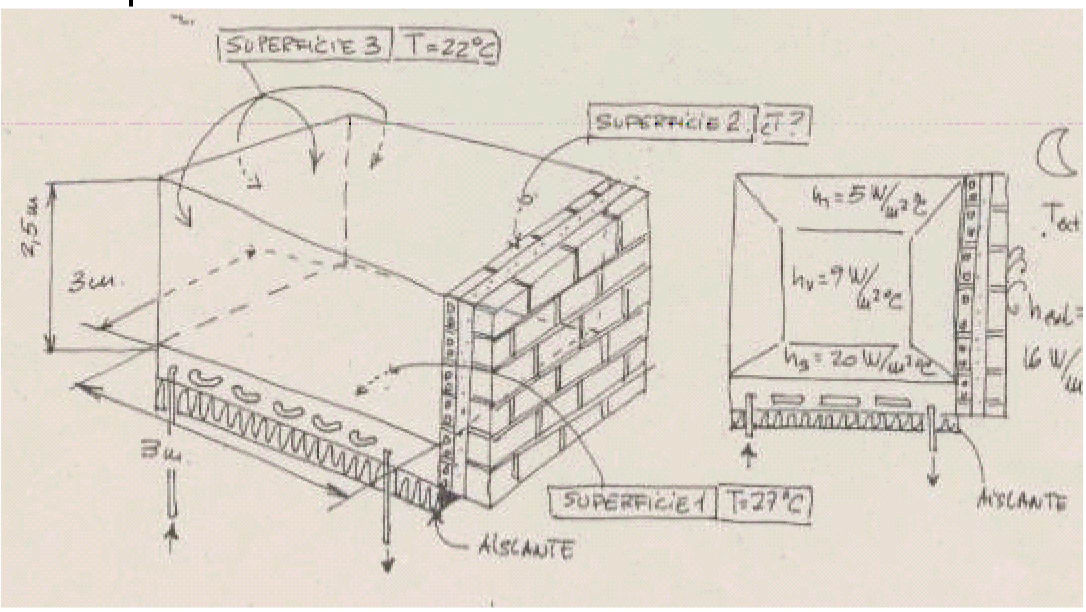
PROBLEMA (PCA Habitación)
A una habitación se envía agua caliente para alimentar el suelo radiante. Es invierno, fuera la temperatura es de 0ºC y es de noche.
Para simplificar, la habitación no tiene ventanas en el único muro que da al exterior. La omposicióon del muro es :

	espesor	conductividad
Ladrillo macizo	*0.155 m*	*0.87 W/mºC*
Enfoscado de cemento	*0.015 m*	*1.4 W/mºC*
Poliuretano	*0.01 m*	*0.05 W/mºC*
Ladrillo hueco	*0.04 m*	*0.49 W/mºC*
Enlucido de yeso	*0.015 m*	*0.3 W/mºC*

Dentro de la habitación hay aire (totalmente transparente a la radiación infrarroja)
Aunque el agua se envía a una tempeatua superior se supone que el suelo en su superificie tiene una temperatura uniforme de 27ºC. El resto de paredes y techo se suponen a 21ºC, desconociéndose la temperatura de la superficie que da al exterior.
Emisividad del suelo 0.9, resto de superficies 0.7
Calcular la cantidad de calor cedida por el suelo radiante y las temperaturas de aire y de la pared exterior en los siguientes supuestos :
1) Se conocen los coeficientes de convección interior : Pared interior 9 W/mºC, Techo 5 W/mºC,Suelo 20 W/mºC, y para la pared exterior 16 W/mºC (se asume que este último coeficiente tiene en cuenta el intercambio de calor por radiación en el exterior)
2) Se conocen los coeficientes de convección interior (mismos que el caso anterior) y que el coeficiente de convección exterior es 10 W/mºC (sin radiación). Para el intercambio por radiación exterior suponer el cielo como un cuerpo negro a la temperatura 6ºC mas baja que la del ambiente exterior, y el suelo curpo gris con emisividad 0.7 a la temperatura ambiente mas 4ºC
3) Se desconocen los coeficientes de convección interior y exterior, suponer en el interior aire en calma, y en el exterior una ligera brisa de aire con una velocidad de 1m/s. Para el intercambio por radiación exterior seguir suponiendo el cielo como un cuerpo negro a la temperatura 6ºC mas baja que la del ambiente exterior, y el suelo a la temperatura ambiente mas 4ºC
Propiedades del aire :

T	ρ	Cp	μ 10^7	k 10^3
K	kg/m3	J/kgK	Pa s	W/mK
250	1,3947	1006	159,6	22,3
300	1,1614	1007	184,6	26,3



<u>Asignación de datos:</u> $alt := 2.5$ m $anc := 3$ m $lar := 3$ m $\sigma := 5.67\cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 K^4}$

$Atecho := anc\cdot lar$ $Atecho = 9\ m^2$ $Asuelo := Atecho$

$Apint := anc\cdot alt$ $Apint = 7.5\ m^2$ $Apext := Apint$

$Aresto := anc\cdot alt + lar\cdot alt + lar\cdot alt$ $Aresto = 22.5\ m^2$

Recinto exterior $Tambiente := 0 + 273.15$ K $\varepsilon pext := 0.7$ $v := 3.6\ \frac{m}{s}$

Recinto interior

$Tsuelo := 27 + 273.15$ K

$Tresto := 21 + 273.15$ K

"1" Pared exterior $\varepsilon_1 := 0.7$ $A_1 := Apint$ $A_1 = 7.5\ m^2$

"2" Suelo $T_2 := Tsuelo$ $\varepsilon_2 := 0.9$ $A_2 := Asuelo$ $A_2 = 9\ m^2$

"3" Resto $T_3 := Tresto$ $\varepsilon_3 := 0.7$ $A_3 := Atecho + Aresto$

$A_3 = 31.5\ m^2$

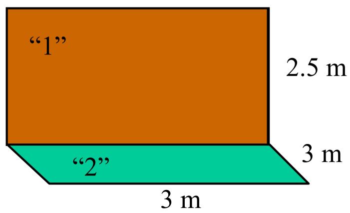
material :	espesor : m	conductividad : $\frac{W}{m°C}$
Ladrillo macizo	$LLM := 0.155$	$kLM := 0.87$
Enfoscado cemento	$LEC := 0.015$	$kEC := 1.4$
Poliuretano	$LPO := 0.01$	$kPO := 0.05$
Ladrillo hueco	$LLH := 0.04$	$kLH := 0.49$
Enlucido Yeso	$LEY := 0.015$	$kEY := 0.3$

<u>Solución :</u>

En primer lugar debemos estimar los factores de visión en el recinto interior. El número de factores de visión a determinar (por métodos analíticos u otros), para este recinto será :

$N := 3$ Existen 3 superficies $P := 2$ Dos no se ven así mismas (El suelo y la pared exterior)

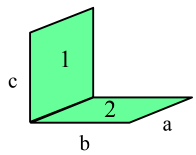
Luego el nº de factores de forma a determinar serán :



$$\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N-1) - P = 1$$

Decidimos calcular el factor de forma F1_2, el cual se obtiene directamente como :

$a := 3$ $b := 3$ $c := 2.5$



$H := \frac{b}{a}$ $H = 1$ $W := \frac{c}{a}$ $W = 0.833$

$$FP1(H,W) := \frac{1}{4}\cdot\ln\left[\left[\frac{(1+W^2)\cdot(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\right]\cdot\left[\frac{W^2\cdot(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)\cdot(W^2+H^2)}\right]^{W^2}\cdot\left[\frac{H^2\cdot(1+W^2+H^2)}{(1+H^2)\cdot(W^2+H^2)}\right]^{H^2}\right]$$

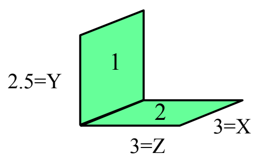
$$FP(H,W) := \frac{1}{\pi\cdot W}\cdot\left(FP1(H,W) + H\cdot atan\left(\frac{1}{H}\right) + W\cdot atan\left(\frac{1}{W}\right) - \sqrt{W^2+H^2}\cdot atan\left(\frac{1}{\sqrt{W^2+H^2}}\right)\right)$$

$F1\_2 := FP(H,W)$

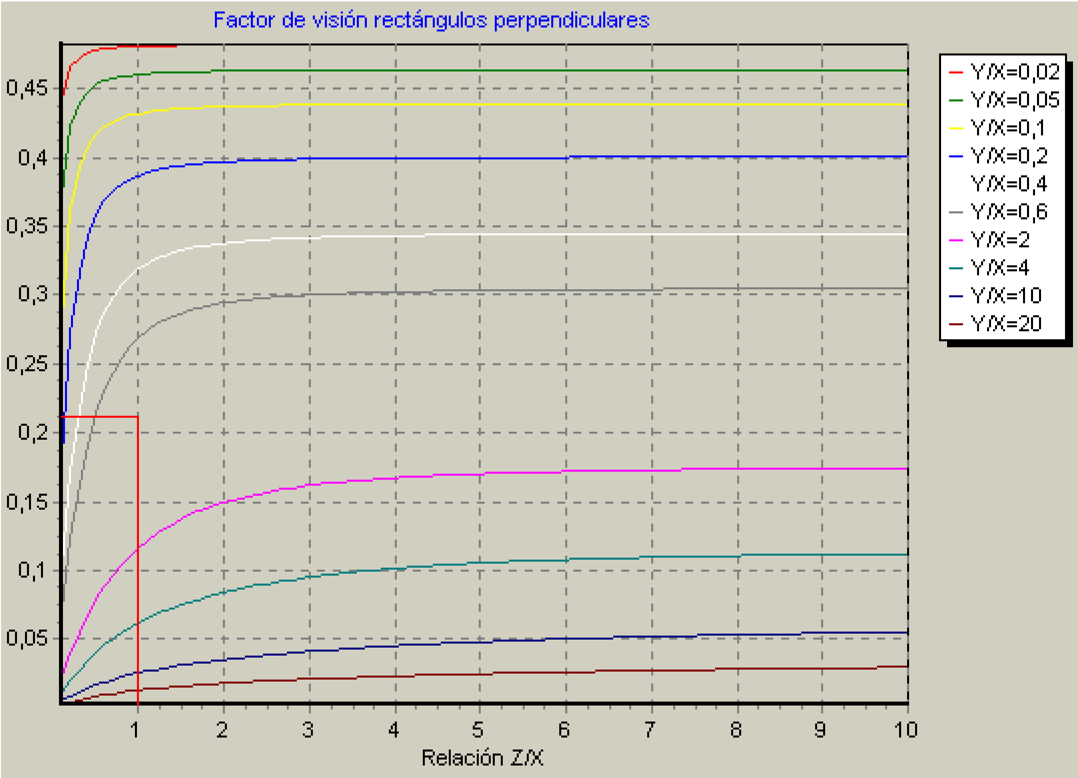
$F1\_2 = 0.225$

En vez de utilizar la expresión matemática podríamos haber utilizado la gráfica, así como ejemplo para le facor de forma

$X := 3$ $Z := 3$ $Y := 2.5$



y de forma gráfica $\frac{Z}{X} = 1$ $\frac{Y}{X} = 0.833$



$F1\_2 = 0.225$

Una vez hemos determinado el factor de forma F1_2 podemos determinar el resto por la propiedad de recirpocidad de los factores de forma y por la adición, así :

$F1\_1 := 0$ (Por construccion el suelo no se ve así mimo).

$F1\_3 := 1 - F1\_1 - F1\_2$ $F1\_3 = 0.775$ (Por la sumatoria = 1).

$F2\_2 := 0$ (Por construccion la pared exterior no se ve así mima).

$F2\_1 := \frac{A_1}{A_2} \cdot F1\_2$ $F2\_1 = 0.187$ (Por reciprocidad).

$F2\_3 := 1 - F2\_1 - F2\_2$ $F2\_3 = 0.813$ (Por la sumatoria = 1).

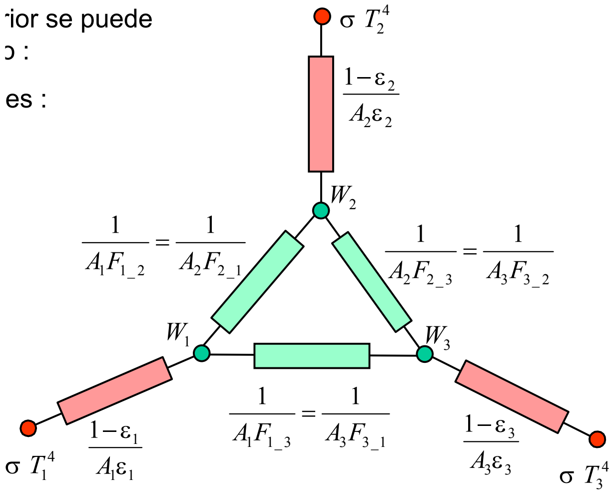
$F3\_1 := \frac{A_1}{A_3} \cdot F1\_3$ $F3\_1 = 0.185$ (Por reciprocidad).

$F3\_2 := \frac{A_2}{A_3} \cdot F2\_3$ $F3\_2 = 0.232$ (Por reciprocidad).

$F3\_3 := 1 - F3\_1 - F3\_2$ $F3\_3 = 0.583$ (Por la sumatoria = 1).

El intercambio de calor radiante en el interior se puede representar mediante el esquema eléctrico :

El esquema general para 3 superficies es :

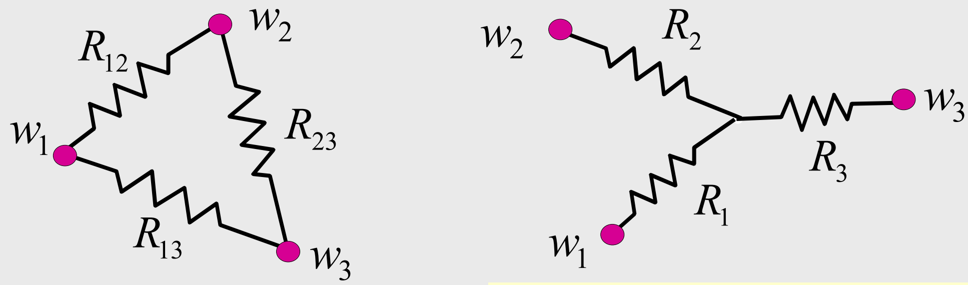


$$\frac{1}{A_1\,F1\_2} = 0.593 \qquad \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 \cdot A_1} = 0.0571$$

$$\frac{1}{A_2\,F2\_3} = 0.137 \qquad \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \cdot A_2} = 0.012$$

$$\frac{1}{A_3\,F3\_1} = 0.172 \qquad \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 \cdot A_3} = 0.01361$$

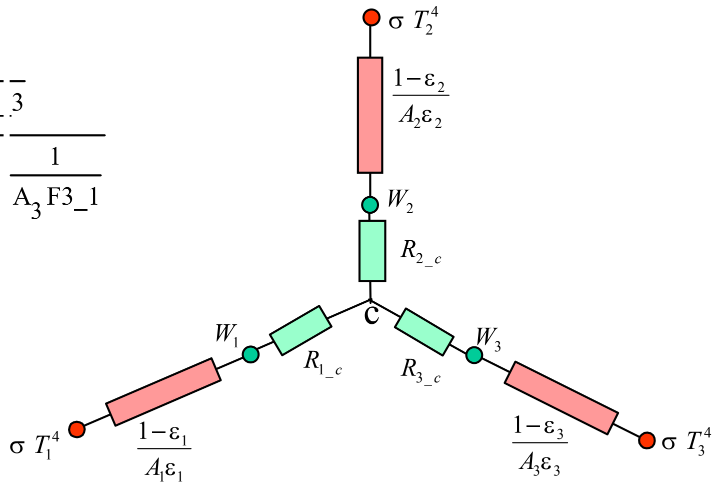
Recordatorio equivalencia circuitos Δ-Y



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

$$R_{12} = R_1R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

Resultando :



$$R1\_c := \frac{\dfrac{1}{A_1\,F1\_2}\cdot\dfrac{1}{A_1\,F1\_3}}{\dfrac{1}{A_1\,F1\_2}+\dfrac{1}{A_2\,F2\_3}+\dfrac{1}{A_3\,F3\_1}}$$

$$R1\_c = 0.11312$$

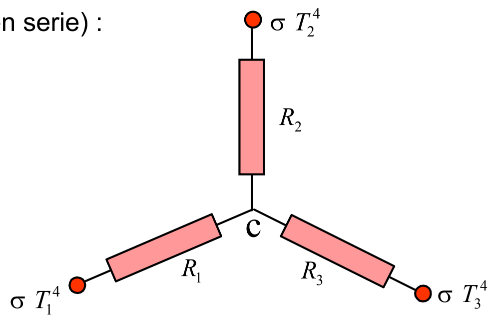
$$R2\_c := \frac{\dfrac{1}{A_2\,F2\_1}\cdot\dfrac{1}{A_2\,F2\_3}}{\dfrac{1}{A_1\,F1\_2}+\dfrac{1}{A_2\,F2\_3}+\dfrac{1}{A_3\,F3\_1}}$$

$$R2\_c = 0.08992$$

$$R3\_c := \frac{\dfrac{1}{A_3\,F3\_1}\cdot\dfrac{1}{A_3\,F3\_2}}{\dfrac{1}{A_1\,F1\_2}+\dfrac{1}{A_2\,F2\_3}+\dfrac{1}{A_3\,F3\_1}}$$

$$R3\_c = 0.02607$$

El cual se puede reagrupar (sumando resistencias en serie) :



$$R1 := \frac{1-\varepsilon 1}{A_1\,\varepsilon 1} + R1\_c$$

$$R1 = 0.1703$$

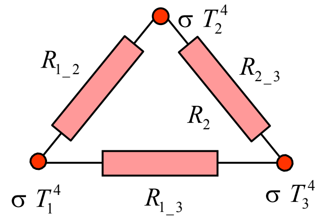
$$R2 := \frac{1-\varepsilon 2}{A_2\,\varepsilon 2} + R2\_c$$

$$R2 = 0.1023$$

$$R3 := \frac{1-\varepsilon 3}{A_3\,\varepsilon 3} + R3\_c$$

$$R3 = 0.0397$$

Pudiendo convertir el circuito estrella en triángulo



$$R1\_2 := R1 \cdot R2 \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

$$R1\_2 = 0.711$$

$$R1\_3 := R1 \cdot R3 \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

$$R1\_3 = 0.276$$

$$R2\_3 := R2 \cdot R3 \cdot \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

$$R2\_3 = 0.166$$

CASO 1)

$hsuelo := 20 \dfrac{W}{m^2 {}^{o}C}$ $\quad$ $htecho := 5 \dfrac{W}{m^2 {}^{o}C}$ $\quad$ $hpint := 9 \dfrac{W}{m^2 {}^{o}C}$ $\quad$ $hpext := 16 \dfrac{W}{m^2 {}^{o}C}$

En este caso serán necdesarios realizar tres balances de energía para obtener las tres temperaturas desconocidas, Taire, Tpint y Tpext.

Balance de energía en el aire interior

$$A_{suelo} h_{suelo} \left(T_{aire} - T_{suelo}\right) + A_{techo} h_{techo} \left(T_{aire} - T_{resto}\right) + \\ + A_{resto} h_{p\,int} \left(T_{aire} - T_{resto}\right) + A_{p\,int} h_{p\,int} \left(T_{aire} - T_{p\,int}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$T_{aire} = \frac{A_{suelo} h_{suelo} T_{suelo} + A_{techo} h_{techo} T_{resto} + A_{resto} h_{p\,int} T_{resto}}{A_{suelo} h_{suelo} + A_{techo} h_{techo} + A_{p\,int} h_{p\,int} + A_{resto} h_{p\,int}} + \\ + \frac{A_{p\,int} h_{p\,int}}{A_{suelo} h_{suelo} + A_{techo} h_{techo} + A_{p\,int} h_{p\,int} + A_{resto} h_{p\,int}} T_{p\,int}$$

$$T_{aire} = B1 + B2\, T_{p\,int}$$

$$B1 := \frac{\text{Asuelo}\cdot\text{hsuelo Tsuelo} + \text{Atecho}\cdot\text{htecho Tresto} + \text{Aresto}\cdot\text{hpint Tresto}}{\text{Asuelo}\cdot\text{hsuelo} + \text{Atecho}\cdot\text{htecho} + \text{Apint}\cdot\text{hpint} + \text{Aresto}\cdot\text{hpint}}$$

$$B1 = 256.22$$

$$B2 := \frac{\text{Apint}\cdot\text{hpint}}{\text{Asuelo}\cdot\text{hsuelo} + \text{Atecho}\cdot\text{htecho} + \text{Apint}\cdot\text{hpint} + \text{Aresto}\cdot\text{hpint}}$$

$$B2 = 0.136$$

Balance de energía en la pared (con el exterior y supuesto todo el intercambio resumido en hpext)

$$Rpared = \frac{L_{LM}}{k_{LM}} + \frac{L_{EC}}{k_{EC}} + \frac{L_{PO}}{k_{PO}} + \frac{L_{LH}}{k_{LH}} + \frac{L_{EY}}{k_{EY}}$$

$$A_{pext} h_{pext} \left(T_{ambiente} - T_{pext}\right) + A_{pext} \frac{T_{p\,int} - T_{pext}}{Rpared} = 0 \qquad (2)$$

$$T_{pext} = \frac{h_{pext} T_{ambiente}}{h_{pext} + \frac{1}{Rpared}} + \frac{\frac{1}{Rpared}}{h_{pext} + \frac{1}{Rpared}} T_{p\,int}$$

$$T_{pext} = B3 + B4\, T_{p\,int}$$

$$Rpared := \frac{LLM}{kLM} + \frac{LEC}{kEC} + \frac{LPO}{kPO} + \frac{LLH}{kLH} + \frac{LEY}{kEY} \qquad Rpared = 0.521 \; \frac{m^2\,^{o}C}{W}$$

$$B3 := \frac{\text{hpext}\cdot\text{Tambiente}}{\text{hpext} + \frac{1}{\text{Rpared}}} \qquad B4 := \frac{\frac{1}{\text{Rpared}}}{\text{hpext} + \frac{1}{\text{Rpared}}}$$

$$B3 = 243.868 \qquad B4 = 0.107$$

Balance de energía en la pared (con el interior)

$$\frac{\sigma\left(T_{resto}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{resto\_p\,int}} + \frac{\sigma\left(T_{suelo}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{suelo\_p\,int}} + A_{p\,int} h_{p\,int} \left(T_{aire} - T_{p\,int}\right) + A_{p\,int} \frac{T_{pext} - T_{p\,int}}{Rpared} = 0 \qquad (3)$$

y sustituyendo Taire y Tpext :

$$\frac{\sigma\left(T_{resto}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{resto\_p\,int}} + \frac{\sigma\left(T_{suelo}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{suelo\_p\,int}} + A_{p\,int} h_{p\,int} \left(B1 + (B2-1)\, T_{p\,int}\right) + A_{p\,int} \frac{B3 + (B4-1)\, T_{p\,int}}{Rpared} = 0$$

el cual se expresa como :

$$B5 := \frac{\sigma \cdot Tresto^4}{R2\_3} + \frac{\sigma \cdot Tsuelo^4}{R1\_2} + Apint \cdot hpint \cdot B1 + Apint \cdot \frac{B3}{Rpared}$$

$$B5 = 2.402 \times 10^4$$

$$B6 := \left(\frac{\sigma}{R2\_3} + \frac{\sigma}{R1\_2} \right)$$

$$B6 = 4.217 \times 10^{-7}$$

$$B7 := Apint \cdot hpint \cdot (B2 - 1) + Apint \cdot \frac{(B4 - 1)}{Rpared} \qquad B7 = -71.16$$

iternado con la ecuación resultante :

$$B5 - B6 \left(T_{p\,\mathrm{int}} \right)^4 + B7\, T_{p\,\mathrm{int}} = 0$$

obtenemos un valor de : $Tpint = 293.51$ K

$$Tpint - 273.15 = 20.36 \quad ºC$$

con esta temperatura obtendremos :

$Taire := B1 + B2 \cdot Tpint$ $\qquad Taire = 296.245 \qquad Taire - 273.15 = 23.095$ ºC

$Tpext := B3 + B4 \cdot Tpint$ $\qquad Tpext = 275.333 \qquad Tpext - 273.15 = 2.183$ ºC

a partir de las tres ecuaciones (1), (2) y (3) el procedimiento para obtener las temperatureas es independiente, aquí simplemente se ha señalado uno

Una vez obtenidas estas temperaturas las potencias térmicas puestas en juego son :

$$Qpared := Apint \cdot \frac{Tpint - Tpext}{Rpared} \qquad Qpared = 261.95 \quad W \qquad \frac{Qpared}{Apint} = 34.93 \quad \frac{W}{m^2}$$

$$Qsuelo := Asuelo \cdot hsuelo \cdot (Tsuelo - Taire) + \frac{\sigma \cdot \left(Tsuelo^4 - Tresto^4 \right)}{R1\_3} + \frac{\sigma \cdot \left(Tsuelo^4 - Tpint^4 \right)}{R1\_2}$$

$$Qsuelo = 887.659 \quad W \qquad \frac{Qsuelo}{Asuelo} = 98.63 \quad \frac{W}{m^2}$$

El resto de energía está "perdiéndose" por las demás paredes y techo:

$$Qresto := Qsuelo - Qpared \qquad Qresto = 625.71 \quad W$$

Otra forma corriente de haber obtenido la temperatura de la pared interior se hubiera basado en "linealizar" el intercambio de energía radiante en el interior, es decir reescribir el balance de energia como :

Balance de energía en la pared (con el interior)

$$A_{p\,\mathrm{int}} h_{p\_resto} \left(T_{resto} - T_{p\,\mathrm{int}} \right) + A_{p\,\mathrm{int}} h_{p\_suelo} \left(T_{suelo} - T_{p\,\mathrm{int}} \right) +$$

$$+ A_{p\,\mathrm{int}} h_{p\,\mathrm{int}} \left(B1 + (B2 - 1)\, T_{p\,\mathrm{int}} \right) + A_{p\,\mathrm{int}} \frac{B3 + (B4 - 1)\, T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared} = 0 \qquad (3^*)$$

donde para etimar hp_resto y hp_suelo debemos estimar una temperatura de la pared interior aproximada a la realidad, supongamos en este caso :

$$\text{Tpint} = 293.51 \ \text{K}$$

$$\text{hp\_resto} := \frac{\sigma\cdot\left(\text{Tresto}^2 + \text{Tpint}^2\right)\cdot(\text{Tresto} + \text{Tpint})}{\text{Apint}\cdot\text{R2\_3}} \qquad \text{hp\_resto} = 4.628 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$$

$$\text{hp\_suelo} := \frac{\sigma\cdot\left(\text{Tsuelo}^2 + \text{Tpint}^2\right)\cdot(\text{Tsuelo} + \text{Tpint})}{\text{Apint}\cdot\text{R1\_2}} \qquad \text{hp\_suelo} = 1.11 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$$

coeficientes de convección equivalentes al intercambio de calor por radiación.

En este caso se hubiera despejado directamente

$$\text{Tpint} := \frac{\left(\text{hp\_resto}\cdot\text{Tresto} + \text{hp\_suelo}\cdot\text{Tsuelo} + \text{hpint}\cdot\text{B1} + \frac{\text{B3}}{\text{Rpared}}\right)}{\left[\text{hp\_resto} + \text{hp\_suelo} + \text{hpint}\cdot(1 - \text{B2}) + \frac{(1 - \text{B4})}{\text{Rpared}}\right]}$$

y que comprobamos coincide con el supuesto $\text{Tpint} = 293.51 \ \text{K}$

CASO 2)

$\text{hsuelo} := 20 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$ $\quad \text{htecho} := 5 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$ $\quad \text{hpint} := 9 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$ $\quad \text{hpext} := 16 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,{}^{\text{o}}\text{C}}$

En este caso serán necesarios igualmente realizar tres balances de energía para obtener las tres temperaturas desconocidas, Taire, Tpint y Tpext.

Balance de energía en el aire interior (identico al anterior caso)

$\text{B1} = 256.22 \qquad \text{B2} = 0.136$

$$T_{aire} = B1 + B2\ T_{p\,\text{int}} \qquad (1)$$

Balance de energía en la pared (con el exterior)

En primer lugar debermos analizar el intercambio de calor que se produce por radiación :

En este caso existen 3 superficies :

Recinto exterior					
	"4" Pared exterior		$\varepsilon_4 := 0.7$	$A_4 := \text{Apext}$	$A_4 = 7.5 \ \text{m}^2$
$\text{Tsext} := 0 + 4 + 273.15 \ \text{K}$	"5" Suelo ext	$T_5 := \text{Tsext}$	$\varepsilon_5 := 0.9$	$A_5 := \infty$	
$\text{Tcielo} := 0 - 6 + 273.15 \ \text{K}$	"6" Cielo	$T_6 := \text{Tresto}$	$\varepsilon_6 := 1$	$A_6 := \infty$	

Como siempre debemos estimar los factores de visión en el recinto exterior. El número de factores de visión a determinar (por métodos analíticos u otros), para este recinto será :

$\text{N} := 3$ Existen 3 superficies $\text{P} := 3$ Ninguna se ve así misma

Luego el nº de factores de forma a determinar serán : $\frac{1}{2}\cdot\text{N}\cdot(\text{N} - 1) - \text{P} = 0$

Por construcción : $F4\_5 := 0.5$ $F4\_6 := 0.5$ $F4\_4 := 0$

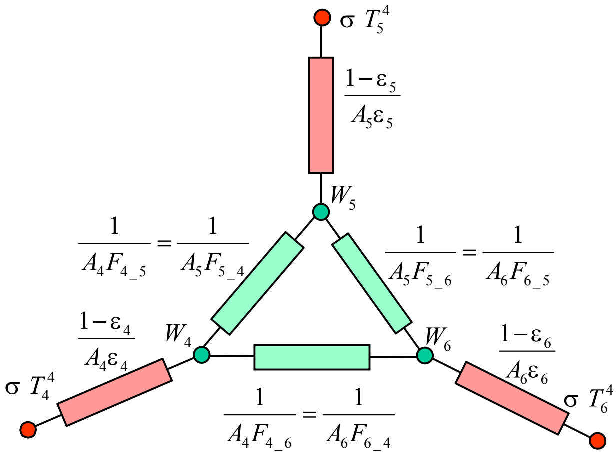
$F5\_6$ y $F6\_5$ valores cerca de la unidad

El circuito eléctrico resultante será :

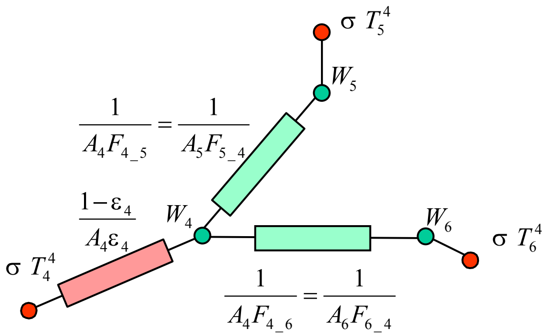
$$\frac{1}{A_5 F5\_6} = 0 \qquad \frac{1-\varepsilon 4}{\varepsilon 4 \cdot A_4} = 0.0571$$

$$\frac{1}{A_4 F4\_5} = 0.267 \qquad \frac{1-\varepsilon 5}{\varepsilon 5 \cdot A_5} = 0$$

$$\frac{1}{A_4 F4\_6} = 0.267 \qquad \frac{1-\varepsilon 6}{\varepsilon 6 \cdot A_6} = 0$$

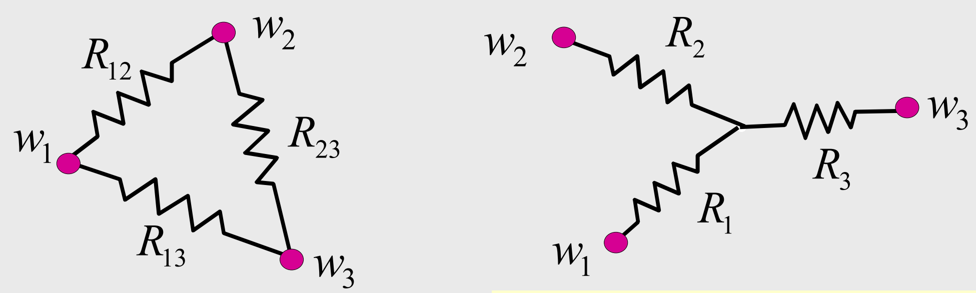


luego el esquema eléctrico resulta :



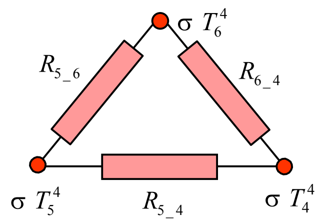
y haceindo uso del equivalente estella-triángulo :

Recordatorio equivalencia circuitos Δ-Y



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \qquad R_{12} = R_1R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

$$R4\_5 = \left(\frac{1-\varepsilon_4}{A_4\varepsilon_4}\right)\left(\frac{1}{A_4F_{4\_5}}\right)\left(\frac{A_4\varepsilon_4}{1-\varepsilon_4} + A_4F_{4\_5} + A_4F_{4\_6}\right)$$



y recordando los valores de los factores de forma :

$$R4\_5 = \left(\frac{2}{A_4}\right)\left(1 + \frac{1-\varepsilon_4}{\varepsilon_4}\right) = \frac{2}{\varepsilon_4 A_4}$$

$$R_{cielo\_pext} = R4\_5 = \frac{2}{\varepsilon_{pext} A_{pext}}$$

análogamente :

$$R_{sext\_pext} = R4\_6 = \frac{2}{\varepsilon_{pext} A_{pext}}$$

Por lo que el balance de energía se expresa como :

$$\frac{\sigma\left(T_{cielo}^4 - T_{pext}^4\right)}{R_{cielo\_pext}} + \frac{\sigma\left(T_{sext}^4 - T_{pext}^4\right)}{R_{sext\_pext}} + A_{pext} h_{pext}\left(T_{ambiente} - T_{pext}\right) + A_{pext}\frac{T_{p\,\mathrm{int}} - T_{pext}}{Rpared} = 0$$

o bien :

$$\frac{\varepsilon_{pext}\sigma\left(\left(T_{ambiente} - 6\right)^4 - T_{pext}^4\right)}{2} + \frac{\varepsilon_{pext}\sigma\left(\left(T_{ambiente} + 4\right)^4 - T_{pext}^4\right)}{2} +$$

$$+ h_{pext}\left(T_{ambiente} - T_{pext}\right) + \frac{T_{p\,\mathrm{int}} - T_{pext}}{Rpared} = 0 \qquad (2)$$

Balance de energía en la pared (identico al anterior caso)

$$\frac{\sigma\left(T_{resto}^4 - T_{p\,\mathrm{int}}^4\right)}{R_{resto\_p\,\mathrm{int}}} + \frac{\sigma\left(T_{suelo}^4 - T_{p\,\mathrm{int}}^4\right)}{R_{suelo\_p\,\mathrm{int}}} + A_{p\,\mathrm{int}} h_{p\,\mathrm{int}}\left(T_{aire} - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + A_{p\,\mathrm{int}}\frac{T_{pext} - T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared} = 0$$

(3)

por iteración se pueden obtener a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3) las temperaturas desconocidas.

Una forma fácil de operar es linealizar todos los intercambios de calor por radiación (recordemos que en estos casos es necesario un valor "a priori" de las temperaturas de las paredes), supongamos :

Tpint = 294.06 K Tpext = 274.93 K

linealizando (3) y eliminando Apint obtenemos :

$$h_{p\_resto}\left(T_{resto} - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + h_{p\_suelo}\left(T_{suelo} - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + h_{p\,\mathrm{int}}\left(B1 + (B2-1)\,T_{p\,\mathrm{int}}\right) + \frac{T_{pext} - T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared} = 0$$

(3*)

donde para etimar hp_resto y hp_suelo debemos estimar una temperatura de la pared interior aproximada a la realidad :

$$hp\_resto := \frac{\sigma\cdot\left(Tresto^2 + Tpint^2\right)\cdot(Tresto + Tpint)}{Apint\cdot R2\_3}$$ $$hp\_resto = 4.641 \quad \frac{W}{m^2 ºC}$$

$$hp\_suelo := \frac{\sigma\cdot\left(Tsuelo^2 + Tpint^2\right)\cdot(Tsuelo + Tpint)}{Apint\cdot R1\_2}$$ $$hp\_suelo = 1.11 \quad \frac{W}{m^2 ºC}$$

y expresandolo de forma matricial :

$$BB_{0,0} := -\left[hp\_resto + hp\_suelo + hpint\cdot(1 - B2) + \frac{1}{Rpared}\right] \qquad BB_{0,1} := \frac{1}{Rpared}$$

$$CC_0 := -(hp\_resto\cdot Tresto + hp\_suelo\cdot Tsuelo + hpint\cdot B1)$$

linealizando (2) y eliminando Apext obtenemos :

$$h_{p\_cielo}\left(T_{ambiente} - 6 - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + h_{p\_sext}\left(T_{sambiente} + 4 - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + \\ + h_{pext}\left(T_{ambiente} - T_{p\,\mathrm{int}}\right) + \frac{T_{pext} - T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared} = 0 \qquad (2^*)$$

donde para etimar hp_resto y hp_suelo debemos estimar una temperatura de la pared interior aproximada a la realidad, supongamos en este caso :

$$\varepsilon pext := 0.7$$

$$hp\_cielo := \frac{\varepsilon pext\cdot\sigma\cdot\left[(Tambiente - 6)^2 + Tpext^2\right]\cdot(Tambiente - 6 + Tpext)}{2}$$

$$hp\_cielo = 1.581 \quad \frac{W}{m^2 ºC}$$

$$hp\_sext := \frac{\varepsilon pext\cdot\sigma\cdot\left[(Tambiente + 4)^2 + Tpint^2\right]\cdot(Tambiente + 4 + Tpint)}{2}$$

$$hp\_sext = 1.85 \quad \frac{W}{m^2 ºC}$$

y expresandolo de forma matricial :

$$BB_{1,1} := -\left(hp\_cielo + hp\_sext + hpext + \frac{1}{Rpared}\right) \qquad BB_{1,0} := \frac{1}{Rpared}$$

$$CC_1 := -[hp\_cielo\cdot(Tambiente - 6) + hp\_sext\cdot(Tambiente + 4) + hpext\cdot Tambiente]$$

cuya solución es :

$$BB = \begin{pmatrix} -15.449 & 1.921 \\ 1.921 & -21.353 \end{pmatrix} \qquad CC = \begin{pmatrix} -4006 \\ -5306 \end{pmatrix} \qquad TT := BB^{-1}\cdot CC$$

$$TT = \begin{pmatrix} 293.46 \\ 274.88 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} Tpint - 273.15 &= 20.31 \quad ºC \\ Tpext - 273.15 &= 1.73 \quad ºC \end{aligned}$$

que como observamos coinciden practicamente con los valores supuestos (por lo que no realizamos mas aproximaciones)

La temperatura del aire la obteníamos de :

$$\mathrm{Taire} := \mathrm{B1} + \mathrm{B2}\cdot\mathrm{Tpint} \qquad \mathrm{Taire} = 296.237 \qquad \mathrm{Taire} - 273.15 = 23.087 \quad ºC$$

Una vez obtenidas estas temperaturas las potencias térmicas puestas en juego son :

$$\mathrm{Qpared} := \mathrm{Apint}\cdot\frac{\mathrm{Tpint} - \mathrm{Tpext}}{\mathrm{Rpared}} \qquad \mathrm{Qpared} = 267.69 \quad W \qquad \frac{\mathrm{Qpared}}{\mathrm{Apint}} = 35.69 \quad \frac{W}{m^2}$$

$$\mathrm{Qsuelo} := \mathrm{Asuelo}\cdot\mathrm{hsuelo}\cdot(\mathrm{Tsuelo} - \mathrm{Taire}) + \frac{\sigma\cdot\left(\mathrm{Tsuelo}^4 - \mathrm{Tresto}^4\right)}{\mathrm{R1\_3}} + \frac{\sigma\cdot\left(\mathrm{Tsuelo}^4 - \mathrm{Tpint}^4\right)}{\mathrm{R1\_2}}$$

$$\mathrm{Qsuelo} = 889.436 \quad W \qquad \frac{\mathrm{Qsuelo}}{\mathrm{Asuelo}} = 98.83 \quad \frac{W}{m^2}$$

$$\mathrm{Qresto} := \mathrm{Qsuelo} - \mathrm{Qpared} \qquad \mathrm{Qresto} = 621.75 \quad W$$

CASO 3)

Este tercer caso es semajante al caso 2 anterior, aunque desconocemos los coeficientes de convección, por lo tanto en el desarrollo del problema es necesario realizar su determinación :

Como siempre es necesario realizar tres balances de energía para obtener las tres temperaturas desconocidas, Taire, Tpint y Tpext.

El sistema que vamos a resolver es iterativo, ya que tanto los coeficientes de convección para el caso de convección natural, como los coeficientes equivalentes de radiación dependen de las temperaturasde las paredes, y aire y estas son las incognitas a resolver.

$$\mathrm{Tpint} := 291.66 \qquad \mathrm{Tpext} := 284.84 \qquad \mathrm{Taire} := 295.86$$

cambian los coeficientes de convección)

$$\begin{aligned} & A_{suelo}h_{suelo}\left(T_{aire} - T_{suelo}\right) + A_{techo}h_{techo}\left(T_{aire} - T_{resto}\right) + \\ & + A_{resto}h_{p\,\mathrm{int}}\left(T_{aire} - T_{resto}\right) + A_{p\,\mathrm{int}}h_{p\,\mathrm{int}}\left(T_{aire} - T_{p\,\mathrm{int}}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

supondremos inicialmente en el interior que la convección es laminar (en caso de ser turbulento partiríamos de ecuaciones diferentes). Este punto se debe comprobar al finalizar el problema

En flujo laminar para el aire :

$$\mathrm{hpint} := 1.31\cdot(\mathrm{Taire} - \mathrm{Tresto})^{0.3333} \qquad \mathrm{hpint} = 1.566 \quad \frac{W}{m^2 ºC}$$

Techo (cara fria hacia abajo)

$$\mathrm{htecho} := 1.52\cdot(\mathrm{Taire} - \mathrm{Tresto})^{0.3333}$$

$$\mathrm{htecho} = 1.818 \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 °C}}$$

Suelo (cara caliente hacia arriba)

$$\mathrm{hsuelo} := 1.52\cdot(\mathrm{Tsuelo} - \mathrm{Taire})^{0.3333}$$

$$\mathrm{hsuelo} = 2.47 \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 °C}}$$

$$T_{aire} = \frac{A_{suelo}h_{suelo}T_{suelo} + A_{techo}h_{techo}T_{resto} + A_{resto}h_{p\,\mathrm{int}}T_{resto}}{A_{suelo}h_{suelo} + A_{techo}h_{techo} + A_{p\,\mathrm{int}}h_{p\,\mathrm{int}} + A_{resto}h_{p\,\mathrm{int}}} +$$

$$+ \frac{A_{p\,\mathrm{int}}h_{p\,\mathrm{int}}}{A_{suelo}h_{suelo} + A_{techo}h_{techo} + A_{p\,\mathrm{int}}h_{p\,\mathrm{int}} + A_{resto}h_{p\,\mathrm{int}}} T_{p\,\mathrm{int}}$$

$$T_{aire} = B1 + B2\,T_{p\,\mathrm{int}} \qquad (1)$$

$$\mathrm{B1} := \frac{\mathrm{Asuelo\cdot hsuelo\,Tsuelo + Atecho\cdot htecho\,Tresto + Aresto\cdot hpint\,Tresto}}{\mathrm{Asuelo\cdot hsuelo + Atecho\cdot htecho + Apint\cdot hpint + Aresto\cdot hpint}}$$

$$\mathrm{B1} = 255.327$$

$$\mathrm{B2} := \frac{\mathrm{Apint\cdot hpint}}{\mathrm{Asuelo\cdot hsuelo + Atecho\cdot htecho + Apint\cdot hpint + Aresto\cdot hpint}}$$

$$\mathrm{B2} = 0.137$$

Balance de energía en la pared (la expresión del balance es la misma que en le caso 2), siendo diferente la estimación del ccoeficiente de convección exterior)

$$\frac{\sigma\left(T_{cielo}^4 - T_{pext}^4\right)}{R_{cielo\_pext}} + \frac{\sigma\left(T_{sext}^4 - T_{pext}^4\right)}{R_{sext\_pext}} + A_{pext}h_{pext}\left(T_{ambiente} - T_{pext}\right) + A_{pext}\frac{T_{p\,\mathrm{int}} - T_{pext}}{Rpared} = 0$$

o bien :

$$\frac{\varepsilon_{pext}\sigma\left(\left(T_{ambiente} - 6\right)^4 - T_{pext}^4\right)}{2} + \frac{\varepsilon_{pext}\sigma\left(\left(T_{ambiente} + 4\right)^4 - T_{pext}^4\right)}{2} +$$

$$+ h_{pext}\left(T_{ambiente} - T_{pext}\right) + \frac{T_{p\,\mathrm{int}} - T_{pext}}{Rpared} = 0 \qquad (2)$$

Al llevar el aire una velocidad de 1 m/s se supone régimen turbulento, con una longitud igual a la anchura de la pared

$$\mathrm{Tm} := \frac{\mathrm{Tpext + Tambiente}}{2} \qquad \mathrm{Tm} = 278.995$$

Recordemos que las propiedades del aire en ese rango de temperaturas era :

T	ρ	Cp	μ 10^7	k 10^3
K	kg/m3	J/kgK	Pa s	W/mK
250	1,3947	1006	159,6	22,3
300	1,1614	1007	184,6	26,3

Las propiedades del aire a esa temperatura media son :

$$\rho aire(T) := 1.3947 + \frac{1.1614 - 1.3947}{300 - 250}\cdot(T - 250) \qquad \mu aire(T) := 10^{-7}\cdot\left[159.6 + \frac{184.6 - 159.6}{300 - 250}\cdot(T - 250\right.$$

$$Cpaire(T) := 1006 + \frac{1007 - 1006}{300 - 250}\cdot(T - 250) \qquad kaire(T) := 0.0223 + \frac{0.0263 - 0.0223}{300 - 250}\cdot(T - 250)$$

$$Praire(T) := \frac{\mu aire(T)\cdot Cpaire(T)}{kaire(T)} \qquad \nu aire(T) := \frac{\mu aire(T)}{\rho aire(T)}$$

siendo :

$$\rho aire(Tm) = 1.259\ \frac{kg}{m^3} \qquad \mu aire(Tm) = 1.741\times 10^{-5}\ \text{Pa s} \qquad \nu aire(Tm) = 1.382\times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$$

$$Cpaire(Tm) = 1006.58\ \frac{J}{kgK} \qquad kaire(Tm) = 0.025\ \frac{W}{mK} \qquad Praire(Tm) = 0.712$$

siendo el nº de Reynolds :

$$Re := \frac{\rho aire(Tm)\cdot v\cdot anc}{\mu aire(Tm)} \qquad Re = 781265$$

luego es turbulento

$$Nu := 0.037\cdot Re^{0.8}\cdot Praire(Tm)^{0.33333}$$

$$Nu = 1711$$

$$hpext := \frac{Nu\cdot kaire(Tm)}{anc}$$

$$hpext = 14.04\ \frac{W}{m^2 {}^{o}C}$$

Balance de energía en la pared (identico al anterior caso, pero recordando que el coeficiente de convección de la pared intrior ha variado)

$$\frac{\sigma\left(T_{resto}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{resto\_p\,int}} + \frac{\sigma\left(T_{suelo}^4 - T_{p\,int}^4\right)}{R_{suelo\_p\,int}} + A_{p\,int}h_{p\,int}\left(T_{aire} - T_{p\,int}\right) + A_{p\,int}\frac{T_{pext} - T_{p\,int}}{Rpared} = 0 \tag{3}$$

habíamos supuesto régimen laminar

$$hpint := 1.31\cdot(Taire - Tpint)^{0.333}$$

$$hpint = 2.026\ \frac{W}{m^2 {}^{o}C}$$

por iteración se pueden obtener a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3) las temperaturas desconocidas.

Una forma fácil de operar es linealizar todos los intercambios de calor por radiación (recordemos que en estos casos es necesario un valor "a priori" de las temperaturas de las paredes, que ya hemos dado), supongamos :

linealizando (3) y eliminando Apint obtenemos :

$$h_{p\_resto}\left(T_{resto}-T_{p\,\mathrm{int}}\right)+h_{p\_suelo}\left(T_{suelo}-T_{p\,\mathrm{int}}\right)+h_{p\,\mathrm{int}}\left(B1+(B2-1)\,T_{p\,\mathrm{int}}\right)+\frac{T_{pext}-T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared}=0 \quad (3^*)$$

donde para etimar hp_resto y hp_suelo debemos estimar una temperatura de la pared interior aproximada a la realidad :

$$hp\_resto := \frac{\sigma\cdot\left(Tresto^2+Tpint^2\right)\cdot(Tresto+Tpint)}{Apint\cdot R2\_3} \qquad hp\_resto = 4.584 \quad \frac{W}{m^2\,^{o}C}$$

$$hp\_suelo := \frac{\sigma\cdot\left(Tsuelo^2+Tpint^2\right)\cdot(Tsuelo+Tpint)}{Apint\cdot R1\_2} \qquad hp\_suelo = 1.1 \quad \frac{W}{m^2\,^{o}C}$$

y expresandolo de forma matricial :

$$BB_{0,0} := -\left[hp\_resto + hp\_suelo + hpint\cdot(1-B2)+\frac{1}{Rpared}\right] \qquad BB_{0,1} := \frac{1}{Rpared}$$

$$CC_0 := -(hp\_resto\cdot Tresto + hp\_suelo\cdot Tsuelo + hpint\cdot B1)$$

linealizando (2) y eliminando Apext obtenemos :

$$h_{p\_cielo}\left(T_{ambiente}-6-T_{p\,\mathrm{int}}\right)+h_{p\_sext}\left(T_{sambiente}+4-T_{p\,\mathrm{int}}\right)+ \\ +h_{pext}\left(T_{ambiente}-T_{p\,\mathrm{int}}\right)+\frac{T_{pext}-T_{p\,\mathrm{int}}}{Rpared}=0 \quad (2^*)$$

donde para etimar hp_resto y hp_suelo hemos estimado una temperatura de la pared interior aproximada a la realidad, supongamos en este caso :

$$\varepsilon pext := 0.7$$

$$hp\_cielo := \frac{\varepsilon pext\cdot\sigma\cdot\left[(Tambiente-6)^2+Tpext^2\right]\cdot(Tambiente-6+Tpext)}{2}$$

$$hp\_cielo = 1.671 \quad \frac{W}{m^2\,^{o}C}$$

$$hp\_sext := \frac{\varepsilon pext\cdot\sigma\cdot\left[(Tambiente+4)^2+Tpint^2\right]\cdot(Tambiente+4+Tpint)}{2}$$

$$hp\_sext = 1.83 \quad \frac{W}{m^2\,^{o}C}$$

y expresandolo de forma matricial :

$$BB_{1,1} := -\left(hp\_cielo + hp\_sext + hpext + \frac{1}{Rpared}\right) \qquad BB_{1,0} := \frac{1}{Rpared}$$

$$CC_1 := -[hp\_cielo\cdot(Tambiente - 6) + hp\_sext\cdot(Tambiente + 4) + hpext\cdot Tambiente]$$

cuya solución es :

$$BB = \begin{pmatrix} -9.355 & 1.921 \\ 1.921 & -19.46 \end{pmatrix} \qquad CC = \begin{pmatrix} -2196 \\ -4788 \end{pmatrix} \qquad TT := BB^{-1}\cdot CC$$

$$TT = \begin{pmatrix} 291.22 \\ 274.79 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Tpint - 273.15 = 18.07 \quad ºC \\ Tpext - 273.15 = 1.64 \quad ºC \end{matrix}$$

que como observamos coinciden practicamente con los valores supuestos (por lo que no realizamos mas aproximaciones)

La temperatura del aire la obteníamos de :

$$Taire := B1 + B2\cdot Tpint \qquad Taire = 295.306 \qquad Taire - 273.15 = 22.156 \quad ºC$$

Una vez obtenidas estas temperaturas las potencias térmicas puestas en juego son :

$$Qpared := Apint\cdot\frac{Tpint - Tpext}{Rpared} \qquad Qpared = 236.66 \quad W \qquad \frac{Qpared}{Apint} = 31.56 \quad \frac{W}{m^2}$$

$$Qsuelo := Asuelo\cdot hsuelo\cdot(Tsuelo - Taire) + \frac{\sigma\cdot\left(Tsuelo^4 - Tresto^4\right)}{R1\_3} + \frac{\sigma\cdot\left(Tsuelo^4 - Tpint^4\right)}{R1\_2}$$

$$Qsuelo = 310.67 \quad W \qquad \frac{Qsuelo}{Asuelo} = 34.52 \quad \frac{W}{m^2}$$

$$Qresto := Qsuelo - Qpared \qquad Qresto = 74.01 \quad W$$

Quedaría finalmente comprobar que el régimen interior es laminar, para lo cual debemos estimar el producto del nº de Grassof por el nº de Prandt

$$Tmi := \frac{Tresto + Taire}{2} \qquad Tmi = 294.73 \quad K$$

$$Gr := \frac{g\cdot\frac{1}{Taire}\cdot(Taire - Tresto)\cdot alt^3\cdot(\rho aire(Tmi))^2}{(\mu aire(Tmi))^2}$$

$$Ra := Gr\cdot Praire(Tmi)$$

$$Ra = 1.803 \times 10^9 \qquad \text{Turbulento}$$