PROBLEMA

A una habitación de una casa, se envía agua caliente para alimentar el suelo radiante. Es invierno, fuera la temperatura es 0ºC y es de noche.

Para simplificar, la habitación no tiene ventana en el único muro que da al exterior. La composición del muro es:

Ladrillo macizo 0.155m 0.87 W/mºC
Enfoscado de cemento 0.015m 1.4 W/m/ºC
Poliuretano 0.01m 0.05 W/m/ºC
Ladrillo hueco 0.04m 0.49 W/m/ºC
Enlucido de yeso 0.015m 0.3 W/m/ºC

Dentro de la habitación hay aire (totalmente transparente a la radiación).
Los coeficientes de convección con la paredes techo, suelo y exterior son:
Paredes verticales 9W/m2/ºC
Techo 5 W/m2/ºC
Suelo 20 W/m2/ºC
Exterior 16 W/m2ºC

Aunque el agua se envía a una temperatura superior, se supone que la superficie tiene una temperatura uniforme de 27ºC. Todo el resto de paredes y techo, se supone que se mantienen a 22ºC, excepto la cara interna del muro cuya temperatura se desconoce.
La emisividad del suelo es 0.9 y la del resto 0.7.
A) ¿Cuáles son los factores de forma para las superficies de la figura?
B) ¿Cuál es la temperatura de la habitación?...., ¿y la de la cara interna del muro?
C) ¿Qué potencia hay que comunicar al agua del suelo?

$ancho := 3$ $largo := 3$ $alto := 2.5$

Coeficientes de convección en W/m2ºC:

$hv := 9$ $hs := 20$ $ht := 5$ $hext := 16$

Temperaturas en ºC

$t1 := 27$ $t3 := 22$ $text := 0$

$\varepsilon 1 := 0.9$ $\varepsilon 2 := 0.7$ $\varepsilon 3 := 0.7$ $\sigma := 5.67\cdot 10^{-8}$ $en(T) := \sigma\cdot(T + 273.15)^4$

Conductividades y espesores de las capas del muro

$k1 := 0.87$ $k2 := 1.4$ $k3 := 0.05$ $k4 := 0.49$ $k5 := 0.3$

$esp1 := 0.155$ $esp2 := 0.015$ $esp3 := 0.01$ $esp4 := 0.04$ $esp5 := 0.015$

Cálculo superficies:

$A1 := ancho \cdot largo \qquad A1 = 9$

$A2 := largo \cdot alto \qquad A2 = 7.5$

$A3 := A1 + 3 \cdot A2 \qquad A3 = 31.5$

Cálculo de los factores de forma:

De tablas: $F_{1,2} := 0.18$

La superficie 1 no se "ve a sí misma: $F_{1,1} := 0$

Propiedad de los factores de forma: $F_{1,3} := 1 - F_{1,1} - F_{1,2} \qquad F_{1,3} = 0.82$

Por reciprocidad: $F_{2,1} := \frac{A1}{A2} \cdot F_{1,2} \qquad F_{2,1} = 0.216$

La superficie 2 no se "ve" a sí misma: $F_{2,2} := 0$

Propiedad de los factores de forma: $F_{2,3} := 1 - F_{2,2} - F_{2,1} \qquad F_{2,3} = 0.784$

Por reciprocidad: $F_{3,1} := \frac{A1}{A3} \cdot F_{1,3} \qquad F_{3,1} = 0.234$

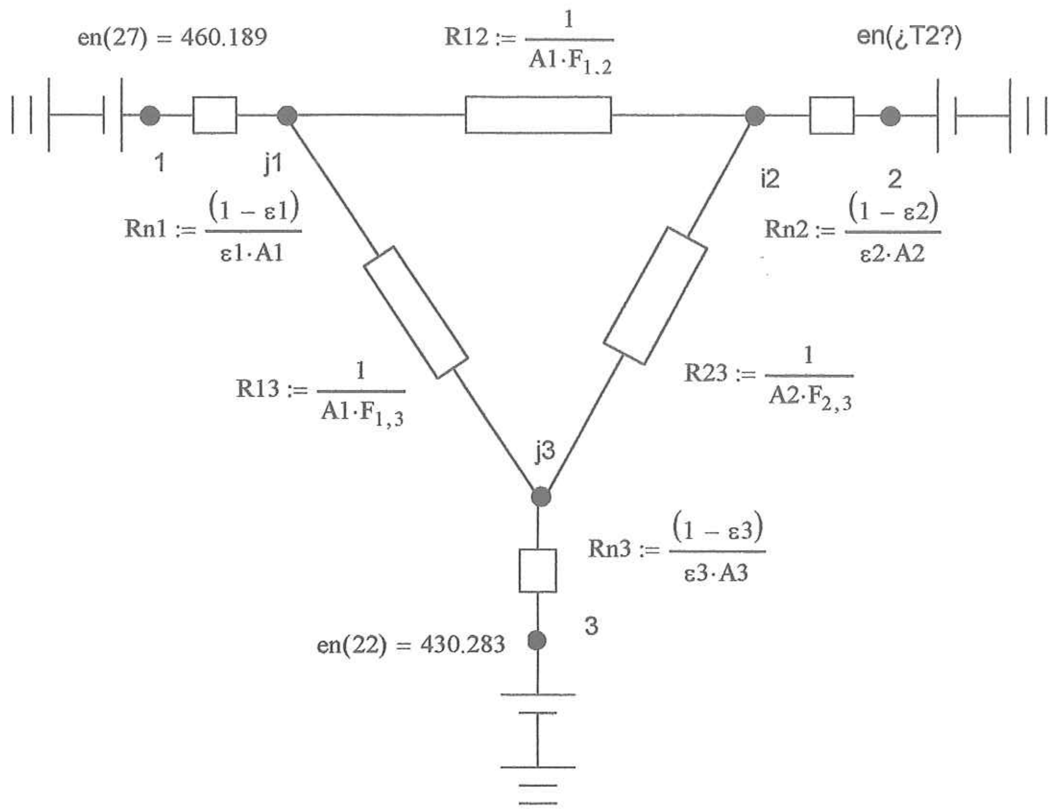
$F_{3,2} := \frac{A2}{A3} \cdot F_{2,3} \qquad F_{3,2} = 0.187$

Propiedad de los factores de forma: $F_{3,3} := 1 - F_{3,1} - F_{3,2} \qquad F_{3,3} = 0.579$

$F_{1,1} = 0 \qquad F_{1,2} = 0.18 \qquad F_{1,3} = 0.82$

$F_{2,1} = 0.216 \qquad F_{2,2} = 0 \qquad F_{2,3} = 0.784$

$F_{3,1} = 0.234 \qquad F_{3,2} = 0.187 \qquad F_{3,3} = 0.579$



R12 = 0.617	R13 = 0.136	R23 = 0.17
Rn1 = 0.012	Rn2 = 0.057	Rn3 = 0.014

Transformación estrella=>triángulo:

$SR := R12 + R13 + R23 \qquad SR = 0.923$

$$R(Ra, Rb, S) := \frac{Ra \cdot Rb}{S}$$

$R1 := R(R12, R13, SR) \qquad R1 = 0.091$

$R2 := R(R12, R23, SR) \qquad R2 = 0.114$

$R3 := R(R13, R23, SR) \qquad R3 = 0.025$

Suma resistencias en serie:

$R11 := R1 + Rn1 \qquad R11 = 0.103$

$R22 := R2 + Rn2 \qquad R22 = 0.171$

$R33 := R3 + Rn3 \qquad R33 = 0.039$

Transformación Triángulo=>estrella:

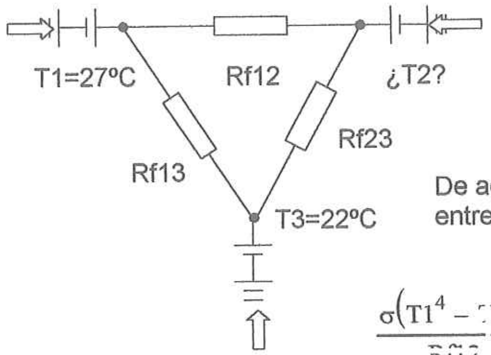
$$SIR := \frac{1}{R11} + \frac{1}{R22} + \frac{1}{R33} \qquad SIR = 41.485$$

$$R(Ra, Rb, SIR) := Ra \cdot Rb \cdot SIR$$

$$Rf12 := R(R11, R22, SIR) \qquad Rf12 = 0.73$$

$$Rf13 := R(R11, R33, SIR) \qquad Rf13 = 0.165$$

$$Rf23 := R(R22, R33, SIR) \qquad Rf23 = 0.273$$



¿Q2,rad?

De aquí se puede expresar una relación entre T2 y Q2,rad:

$$\frac{\sigma\left(T1^4 - T2^4\right)}{Rf12} + \frac{\sigma\left(T3^4 - T2^4\right)}{Rf23} + Q2,rad = 0$$

ECUACIONES:

Intercambio por radiación:

[1] $$\left(\frac{\sigma}{Rf12} \cdot T1^4 + \frac{\sigma}{Rf23} \cdot T3^4\right) - \left(\frac{\sigma}{Rf12} + \frac{\sigma}{Rf23}\right) \cdot T2^4 + Q2,rad = 0$$

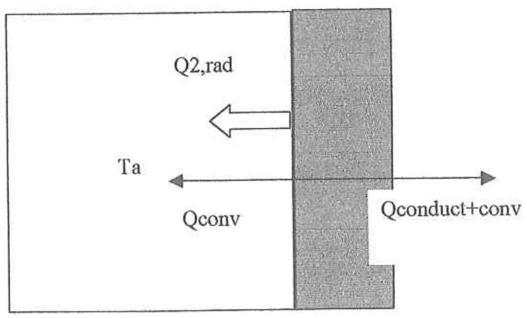
Intercambio por convección. Balance de energía para el aire de la habitación:

[2] $$A1 \cdot hs \cdot (t1 - ta) + A1 \cdot ht \cdot (t3 - ta) + (A3 - A1) \cdot hv \cdot (t3 - ta) + A2 \cdot h2 \cdot (t2 - ta) = 0$$

Intercambio con el muro (Conducción+convección).Balance de energía en la cara interna de la pared:

[3] $$A2 \cdot hv \cdot (t2 - ta) + U \cdot A2 \cdot (t2 - text) + Q2rad = 0$$

Dónde : $$U := \frac{1}{\frac{esp1}{k1} + \frac{esp2}{k2} + \frac{esp3}{k3} + \frac{esp4}{k4} + \frac{esp5}{k5} + \frac{1}{hext}} \qquad U = 1.715$$



3 Incógnitas
{t2,ta,Q2rad}

- [2] y [3] forman un sistema lineal. Si eliminamos ta, se obtiene una relación entre t2 y Q2rad:

$$A := \begin{bmatrix} A2 \cdot hv & -[A1 \cdot hs + A1 \cdot ht + (A3 - A1) \cdot hv + A2 \cdot hv] \\ A2 \cdot hv + U \cdot A2 & -(A2 \cdot hv) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 67.5 & -495 \\ 80.364 & -67.5 \end{pmatrix} \qquad |A| = 3.522 \times 10^4$$

$$b(Q2rad) := \begin{bmatrix} A1 \cdot hs \cdot t1 + [A1 \cdot ht + (A3 - A1) \cdot hv] \cdot t3 \\ -U \cdot A2 \cdot text + Q2rad \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} t2 \\ ta \end{pmatrix} = -b(Q2rad) \qquad [4] \qquad t2 := cca - ccb \cdot Q2rad \ \ ^{o}C$$

Dónde: $cca = 19.747 \qquad ccb = 0.014$

- Despejando Q2rad de [4] y substituyendo en [1] obtenemos una ecuación con t2 como única incógnita:

$$ca := \left[\frac{\sigma}{Rf12} \cdot (273.15 + t1)^4 + \frac{\sigma}{Rf23} \cdot (273.15 + t3)^4 \right] \qquad ca = 2.204 \times 10^3$$

$$cb := \left(\frac{\sigma}{Rf12} + \frac{\sigma}{Rf23} \right) \qquad cb = 2.85 \times 10^{-7}$$

Solución de la ecuación en T2:

$T2 := 20$ Valor inicial

Given

$$ca - cb \cdot T2^4 + \frac{cca + 273.15 - T2}{ccb} = 0$$

$$T2sol := \text{Find}(T2) = (293.96)$$

$t2sol := T2sol - 273.15 \qquad t2sol = 20.81$ [ºC] Solución

- El calor que por radiación emite la superficie 2 es:

$$Q2rad := \frac{cca + 273.15 - T2sol}{ccb} \qquad Q2rad = -75.623 \ [W]$$

Como sale negativo eso quiere decir que la superficie 2 recibe más radiación de la habitación de la que emite hacia ella. Esta energía puede irse por convección a la habitación y por conducción a través del muro hasta el exterior. (Como se verá más tarde, al calcular la temperatura de la habitación, se va todo por conducción al exterior, junto con el calor de transferido por convección interior, ya que la Ta>T2).

- Ahora el sistema lineal ya se puede resolver para conocer ta. Utilizando el método de Cramer:

$$Ata := A \qquad Ata^{\langle 1 \rangle} := -b(Q2rad) \qquad Ata^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} -1.03 \times 10^4 \\ 75.623 \end{pmatrix}$$

$$ta := \frac{|Ata|}{|A|} \qquad ta = 23.656 \quad [°C]$$

Esta es la temperatura del aire en la habitación.

- La potencia total que debe emitir el suelo radiante es la suma de lo que se transfiere por convección más lo que se emite por radiación al resto de superficies (2 y 3):

$$Q1rad := \frac{\sigma}{Rf12} \cdot \left[(t1 + 273.15)^4 - (t2sol + 273.15)^4 \right] + \frac{\sigma}{Rf13} \cdot \left[(t1 + 273.15)^4 - (t3 + 273.15)^4 \right.$$

$Q1rad = 231.875$ [W]

$Q1conv := A1 \cdot hs \cdot (t1 - ta)$

$Q1conv = 601.931$ [W]

$Q1 := Q1rad + Q1conv$

Calor emitido por el suelo radiante

$Q1 = 833.806$ [W]

Esto nos da un ratio: $ratio := \frac{Q1}{A1}$ $ratio = 92.645$ [W/m2]