

Temática: análisis, diseño y optimización de estructuras

SOBRE EL CARÁCTER ESTÁTICO DE LAS ESTRUCTURAS DE BARRAS. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA SU DETERMINACIÓN.

Federico Bonet Zapater

Profesor Titular de la Universidad Politécnica de Valencia (España)

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

RESUMEN

Los campos de magnitudes (fuerzas, esfuerzos o tensiones, deformaciones y corrimientos) que intervienen en cualquier problema de la Mecánica de los Medios Continuos se pueden relacionar por medio de ecuaciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas o de compatibilidad.

La resolución de estos sistemas de ecuaciones se puede realizar fundamentalmente mediante dos procedimientos, el método de rigidez y el método de flexibilidad. La tendencia actual en el campo profesional se decanta hacia el empleo de los métodos de rigidez. Sin embargo, los métodos clásicos en flexibilidad son mucho más formativos y su enseñanza se debe mantener en las Escuelas, ya que un método de rigidez proporciona una colección de resultados numéricos difíciles de interpretar para quien no tiene una sólida formación en el comportamiento estructural.

Uno de los primeros conceptos que hay que contemplar en los métodos de flexibilidad es el carácter estático de las estructuras, que permite clasificarlas en mecanismos, isostáticas e hiperestáticas. En sistemas elásticos lineales la clasificación se puede abordar desde un punto de vista estático o cinemático.

La clasificación de una estructura desde este punto de vista puede ser compleja. En estructuras de barras no basta con hacer un recuento del número de incógnitas y de ecuaciones implicadas, y hay que recurrir a la aplicación del teorema de Rouché. En el trabajo a presentar se realiza un análisis exhaustivo de esta clasificación, y se presenta una aplicación informática que clasifica una estructura de barras articuladas planas, señalando además los diversos núcleos hiperestáticos que pueden existir.

Temática: análisis, diseño y optimización de estructuras

SOBRE EL CARÁCTER ESTÁTICO DE LAS ESTRUCTURAS DE BARRAS. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA SU DETERMINACIÓN.

Federico Bonet Zapater

Profesor Titular de la Universidad Politécnica de Valencia (España)

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras

1. Introducción.-

Es conocido que en cualquier problema de la Mecánica de los Medios Continuos intervienen cuatro campos de magnitudes. Éstos son el campo de las *fuerzas generalizadas*, que pueden ser conocidas (acciones exteriores) o desconocidas (reacciones), el campo de los *esfuerzos o tensiones* (fuerzas interiores), el campo de las *deformaciones* y el campo de los *movimientos*, que también pueden ser conocidos (los correspondientes a apoyos) o desconocidos.

Entre estos campos se pueden establecer diversas relaciones, que se pueden clasificar en tres tipos: las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones cinemáticas o de compatibilidad.

La expresión concreta de esos campos y esas relaciones depende del tipo de problema que estemos estudiando. En el caso más general de la elasticidad tridimensional, las diversas magnitudes se expresan mediante funciones de campo y sus relaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En estructuras de barras se realiza una discretización que permite referir los diversos campos a los valores que adoptan en determinados puntos, relacionándose entre ellos por sistemas de ecuaciones algebraicas, que son lineales si lo son las hipótesis cinemática y constitutiva adoptadas.

La obtención de la solución del problema elástico mediante la resolución de estos sistemas de ecuaciones se puede realizar fundamentalmente por dos procedimientos, el método de rigidez o de los desplazamientos y el método de las fuerzas o de flexibilidad. En el método de rigidez se combinan los sistemas de ecuaciones mencionados anteriormente para obtener unas nuevas ecuaciones, que son las de equilibrio expresadas en función de los corrimientos, y que reciben el nombre de ecuaciones de rigidez. El método de los elementos finitos aplicado a un continuo, o el método de rigidez empleado habitualmente en los programas de cálculo por ordenador para estructuras de barras entran dentro de esta categoría.

En el método de flexibilidad trataremos de resolver por separado cada uno de los tres conjuntos de ecuaciones. Los métodos manuales con los que se puede resolver una estructura de barras sencilla, o los métodos analíticos basados en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de equilibrio en problemas más complejos, entran dentro de esta categoría.

La tendencia actual en el campo profesional se decanta hacia el empleo de los métodos de rigidez: la mayor complejidad en el tratamiento numérico que implican frente a los métodos de flexibilidad es cada vez más irrelevante ante la potencia de los medios de cálculo de que se dispone. Sin embargo, los métodos clásicos son mucho más formativos y su enseñanza se debe mantener en las Escuelas de Ingeniería.

Un método de rigidez proporciona una colección de resultados numéricos difíciles de interpretar para quien no tiene una sólida formación en el comportamiento estructural. Por otra parte, es posible mejorar los métodos de rigidez mediante la implementación de resultados obtenidos por medios analíticos; el empleo de los “macroelementos finitos” definidos por el autor en trabajos anteriores es una muestra de ello. Se trata en esencia de obtener soluciones analíticas a problemas de elementos con geometrías sencillas, que después se pueden emplear como funciones de forma de desplazamientos en la resolución de problemas más complejos. No se precisa el empleo de funciones de forma arbitrarias, por lo que la aproximación es únicamente en la adaptación de la geometría del sólido a la división en elementos, pero no en la solución de cada elemento, que es exacta.

2. Carácter estático de las estructuras

Podemos definir el concepto de estabilidad como aquella característica de la estructura que le permite mantenerse con deformaciones muy pequeñas y recuperables para cualquier estado de carga, comportándose toda ella como un sólido elástico.

Esta característica la podemos analizar desde dos puntos de vista: Desde un punto de vista **estático**, la estructura será estable si podemos equilibrar, con los esfuerzos internos y las reacciones, cualquier estado de cargas exteriores; es decir, si el sistema formado por las ecuaciones de equilibrio es un sistema compatible.

Desde un punto de vista **cinemático**, la estructura será estable, si, para unas deformaciones nulas, los únicos movimientos compatibles son nulos; es decir, si el sistema formado por las ecuaciones cinemáticas es un sistema determinado.

Uno de los conceptos que hay que contemplar en la resolución por el método de flexibilidad es el carácter estático de las estructuras. Éste lo definimos atendiendo a la posibilidad de existencia o no de solución para el sistema de las ecuaciones de equilibrio, y si esta solución es única o existen infinitas soluciones. Así clasificamos las estructuras en mecanismos, isostáticas e hiperestáticas.

Cuando las ecuaciones de equilibrio correspondientes a una estructura, para cualquier estado de cargas, forman un sistema compatible y determinado, es decir, que tienen una solución y ésta es única, la estructura recibe el nombre de isostática. En consecuencia, cualquier estado de cargas se puede equilibrar con reacciones y esfuerzos, y para la determinación de éstos bastan las ecuaciones de equilibrio.

En las estructuras isostáticas, además, el sistema de las ecuaciones cinemáticas también es determinado; ello es consecuencia de las relaciones existentes entre las ecuaciones de equilibrio y cinemáticas. Así pues, la obtención de los desplazamientos a partir de las deformaciones es un problema determinado. En particular, si las deformaciones son nulas y los desplazamientos de los apoyos también, la solución única del sistema homogéneo es la trivial (desplazamientos nulos), y por ello la estructura isostática decimos que es estable.

Cuando las ecuaciones de equilibrio forman un sistema indeterminado y compatible, es decir, que para cualquier estado de cargas admite infinitas soluciones, la estructura recibe el nombre de hiperestática. Para la obtención de los esfuerzos no bastan las ecuaciones de equilibrio, y para obtener la solución única del problema elástico se han de considerar conjuntamente las otras relaciones (cinemáticas y constitutivas).

Las ecuaciones cinemáticas, en ese caso, forman un sistema en general incompatible, con más ecuaciones que incógnitas. Pero considerando el problema homogéneo, es decir, con deformaciones y desplazamientos de apoyos nulos, admite una solución compatible que es la trivial (movimientos nulos), y por tanto la estructura hiperestática es también estable.

Si el sistema de ecuaciones de equilibrio es en general incompatible, con más ecuaciones que incógnitas, la estructura recibe el nombre de mecanismo; salvo para determinados casos de carga, no existirá el equilibrio. Las ecuaciones cinemáticas correspondientes forman un sistema indeterminado, con más incógnitas que ecuaciones; esto quiere decir que, aun en el caso trivial (deformaciones nulas y apoyos fijos), existen infinitas soluciones para los corrimientos, es decir, se puede mover libremente y por tanto es inestable.

3. Estructuras de barras

En las estructuras de barras la estructura-sólido tridimensional se discretiza en una serie de elementos unidimensionales (barras), de acuerdo a las hipótesis de la Resistencia de Materiales. Con esta discretización, el análisis de la estructura es un análisis discreto, donde las ecuaciones de equilibrio, cinemáticas y constitutivas ya no son en derivadas parciales, como correspondería al continuo tridimensional, sino que constituyen un sistema de ecuaciones en las incógnitas discretizadas, que ahora son esfuerzos y deformaciones asociadas en determinadas secciones, junto a fuerzas y movimientos. De este modo, si conocemos el comportamiento de una barra aislada, estamos en condiciones de abordar a partir de ella el estudio de una estructura de barras.

El comportamiento de una barra (su estado de tensiones y deformaciones) será conocido si sabemos las fuerzas que actúan en sus extremos, como resultado de la acción del resto de la estructura sobre ella a través de sus enlaces, y las cargas que actúan directamente sobre la barra. Las incógnitas serán pues estas fuerzas (generalizadas) en los extremos de las barras. Siendo 1 y 2 los extremos de la barra, hay una relación de equilibrio entre esas fuerzas, que se puede expresar a través de una matriz de equilibrio H de la barra:

$$\{F_1\} = -[H_{12}] \cdot \{F_2\}$$

de modo que en realidad las incógnitas que podemos tomar del campo de los esfuerzos (N) serán solamente las fuerzas en el extremo frontal de cada barra, viniendo las dorsales expresadas en función de ellas por la relación de equilibrio anterior. Si estamos en un problema plano, el número de estas incógnitas serán 3 en cada barra.

Junto a estas incógnitas estáticas, también será desconocida una parte del campo de las fuerzas (F), que se corresponde con las fuerzas que transmiten los aparatos de apoyo (**reacciones**), siendo conocidas el resto de fuerzas que actúan sobre la estructura.

Así pues, como **ecuaciones de equilibrio** a considerar nos quedan las de equilibrio de cada nudo, que nos indican que la suma vectorial de todas las fuerzas y momentos actuantes en el nudo son cero. Para poder realizar esa suma vectorial, todas las fuerzas se han de expresar en un sistema común de ejes para todas las barras de la estructura (**ejes generales**). No interesa para el propósito de este artículo hacer explícito este cambio de coordenadas, que afecta a las componentes de los vectores implicados.

El equilibrio en el nudo se puede expresar como:

$$\{F_i^{ext}\} - \sum \{F_{ij}\} = \{0\}$$

donde intervienen las fuerzas exteriores directamente aplicadas en el nudo y las que le ejercen los extremos de cada barra que llega al nudo, que son las que actúan en el extremo de la barra con el signo cambiado. Estas pueden ser frontales o dorsales, y como se relacionan por el equilibrio de la barra escrito anteriormente, nos podemos quedar únicamente con las frontales.

Si escribimos las ecuaciones de equilibrio de todos los nudos, llegamos al sistema de equilibrio de toda la estructura en las incógnitas estáticas, que como hemos indicado van a ser las fuerzas en los extremos frontales de las barras y las fuerzas exteriores desconocidas (reacciones). Llegamos a un sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\{F^{ext}\} = [E].\{F_{ij}\}$$

La forma de la matriz del sistema (**matriz de equilibrio**) se deduce del hecho de que cada barra (columna) sólo contribuye al equilibrio de los nudos en que se unen sus extremos, siendo su colaboración $-H'.F'_{ij}$ en el extremo dorsal (i) y F'_{ij} en el extremo frontal (j); nótese que los vectores y matrices han de estar referidos a unos ejes generales. La dimensión de la matriz será, en el caso de estructuras de nudos rígidos planas, de $3n \times 3b$, aunque habrá **a** filas (las correspondientes a apoyos) con una incógnita adicional (la reacción); habrá que resolver pues un sistema de $(3n-a) \times 3b$.

Nótese que, al margen de las ecuaciones de equilibrio de nudos planteadas, es posible expresar otras muchas ecuaciones de equilibrio: del conjunto de la estructura o de una parte cualquiera de la misma. Cualquier ecuación que se plantee será combinación lineal de las anteriores, de modo que el número máximo de ecuaciones independientes, cuando las incógnitas son los esfuerzos frontales de las barras, será $3n-a$. En muchas ocasiones interesa expresar el equilibrio de forma alternativa al sistema antes indicado, pero no conviene olvidar lo indicado en este párrafo respecto a la independencia de estas ecuaciones.

Por otra parte, las **ecuaciones constitutivas** de la estructura relacionarán el campo de los esfuerzos (hemos visto que se pueden reducir a los frontales en cada barra) con el campo de las deformaciones (e). Las deformaciones congruentes con estos esfuerzos son lo que se define como deformación pura de la barra, y que si el comportamiento de la barra es conocido se puede poner en función de los esfuerzos frontales mediante una matriz que llamamos K_{22} .

$$\{N\} = [K_2].\{e\}$$

Es obvio que la deformación pura de una barra sólo dependerá de los esfuerzos de la misma y no de los de otras barras, por lo que para la estructura, el sistema será "diagonal" (con un ancho de banda igual al número de incógnitas por barra).

Por último, las **ecuaciones cinemáticas** se pueden obtener a través de la definición de deformación pura, como diferencia entre los movimientos del extremo frontal de una barra y la parte de los mismos debida a un movimiento de conjunto inducido por el movimiento del extremo dorsal. Este movimiento de sólido rígido se puede expresar por medio de la traspuesta de la matriz de equilibrio de la barra. Puesto en forma de ecuaciones:

$$\{e_{ij}\} = \{d_j\} - [H_{ij}]^t . \{d_i\}$$

Si expresamos esta ecuación matricial para cada barra y las ordenamos, llegamos al sistema de ecuaciones cinemáticas de la estructura, como relación entre las deformaciones de las barras y los desplazamientos de los nudos.

$$\{e\} = [C].\{d\}$$

La forma de la matriz del sistema (**matriz de conexión**) se deduce del hecho de que en cada barra (fila) sólo intervienen los desplazamientos de los nudos extremos en que se une, siendo sus coeficientes $-H' \cdot d'_i$ en el extremo dorsal (i) y d'_j en el extremo frontal (j); nótese que los vectores y matrices han de estar referidos también a unos ejes generales.

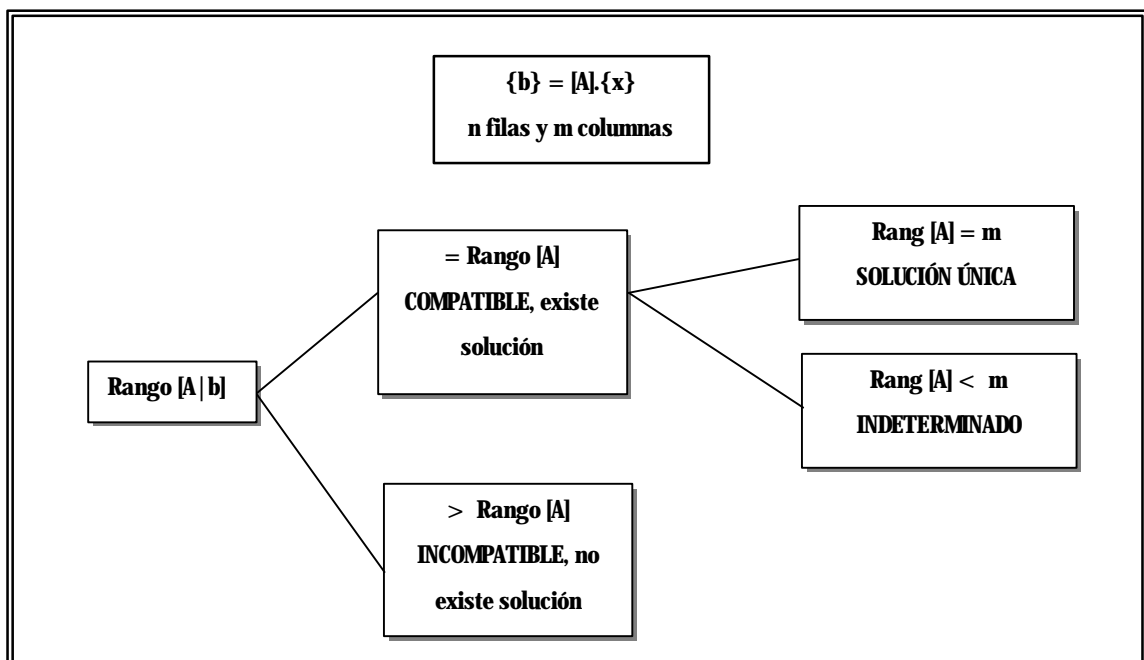
Si comparamos esta matriz de conexión con la de equilibrio, llegamos a la conclusión de que una es la traspuesta de la otra. A esta conclusión se puede llegar también por aplicación de principios energéticos (trabajos virtuales).

El sistema de ecuaciones cinemáticas, en un sistema plano de barras, es de $3b$ ecuaciones por $3n$ columnas, de las que sólo son incógnitas $3n-a$, pues los movimientos de los apoyos son conocidos (generalmente nulos).

4. Algoritmos de clasificación estática

Es conocido que el estudio de un sistema lineal de ecuaciones no se puede reducir al recuento de ecuaciones e incógnitas, y para ser rigurosos hay que analizar los rangos de las diversas matrices que intervienen, de acuerdo con el teorema de Rouché. Así pues, estructuras con el mismo o mayor número de incógnitas que ecuaciones en las ecuaciones de equilibrio (aparentemente isostáticas o hiperestáticas), si no están bien condicionadas, pueden resultar inestables; en ese caso reciben el nombre de críticas.

Para la aplicación del teorema de Rouché al análisis de un sistema lineal de ecuaciones se han de considerar los rangos de la matriz de los coeficientes del sistema y de esa matriz ampliada con la columna correspondiente a los términos independientes.



El análisis de la estabilidad se puede realizar desde un punto de vista estático o cinemático, aplicando el teorema de Rouché al sistema de ecuaciones de equilibrio o al sistema de ecuaciones cinemáticas. Como ya se ha visto, las matrices de ambos sistemas son

traspuestas una de la otra, y sus rangos son iguales. Las conclusiones del análisis estático coinciden lógicamente desde ambos puntos de vista.

Análisis estático

Estudiaremos la matriz de equilibrio reducida, en la que eliminaremos las filas correspondientes a apoyos, por tener una incógnita adicional. El sistema correspondiente será de $g.n-a$ ecuaciones por $t.b$ incógnitas, siendo n el número de nudos, g el número de grados de libertad por nudo en el problema en estudio (3 en el caso plano), a el número de componentes de apoyo individuales, t el número de esfuerzos por barra (3 en el caso plano), y b el número de barras.

$$\{F^{\text{ext}}\} = [E].\{N\}$$

Haremos una primera clasificación comparando el número de ecuaciones y de incógnitas. Se pueden dar tres casos:

◆ $t.b < g.n - a$

En este caso, al haber más ecuaciones que incógnitas, siempre puede existir un vector de términos independientes (fuerzas exteriores) que me aumente el rango de la matriz, y por tanto el sistema será incompatible, no habrá equilibrio. Corresponde con lo que llamamos un **mecanismo**.

Puede ocurrir que las fuerzas aplicadas al mecanismo no aumenten el rango, es decir, rango $[E] = \text{rango}[E|F]$, y en ese caso habría solución: corresponde a un mecanismo en equilibrio con esas fuerzas. En este caso puede a su vez ocurrir que el rango $[E]$ sea igual o menor que $t.b$, con lo que el mecanismo será de determinación isostática o hiperestática; en este último caso el número de grados de libertad del mecanismo será superior a la diferencia entre el número de ecuaciones y de incógnitas.

◆ $t.b = g.n - a$

Este caso corresponde a una estructura aparentemente isostática. Si el rango $[E]$ es igual a $t.b$, lo que ocurre cuando el determinante de E es distinto de cero, siempre será igual al rango de la matriz ampliada; el sistema será siempre compatible para cualquier estado de carga, y la solución será única. La estructura en este caso es **isostática**.

Si el rango $[E]$ es menor que $t.b$, siempre puede existir un vector F que me aumente el rango, en cuyo caso no habría solución para el equilibrio. Corresponde este caso a una estructura inestable, que llamamos **crítica**. Como ocurría con los mecanismos, la estructura crítica puede estar en equilibrio con determinados estados de carga, aquellos en que rango $[E] = \text{rango}[E|F]$; como además será menor este rango que el número de incógnitas $t.b$, los esfuerzos serán de determinación hiperestática (indeterminados).

◆ $t.b > g.n - a$

Si el rango $[E]$ es igual a $g.n - a$, siempre será igual al rango de la matriz ampliada; el sistema será siempre compatible para cualquier estado de carga. Como este rango es menor que el número de incógnitas $t.b$, la estructura es estable pero indeterminada, es decir, **hiperestática**.

Si el rango $[E]$ es menor que $g.n - a$, siempre puede existir un vector F que me aumente el rango, en cuyo caso no habría solución para el equilibrio. Corresponde este caso a una estructura inestable, que llamamos **crítica** como en el caso de las aparentemente isostáticas. Otra vez puede ocurrir que se alcance el equilibrio con determinadas cargas, y los

esfuerzos serán de determinación hiperestática; ocurrirá cuando $\text{rango } [E] = \text{rango } [E|F]$, y siempre serán menores estos rangos que $t.b$.

Análisis cinemático

Estudiaremos la matriz de conexión reducida, en la que eliminaremos las columnas correspondientes a apoyos, por ser conocido el desplazamiento del mismo. El sistema correspondiente será de $t.b$ ecuaciones por $g.n-a$ incógnitas. La matriz será la traspuesta de la matriz de equilibrio reducida que se ha estudiado anteriormente.

$$\{e\} = [C] \cdot \{d\}$$

Los casos que se pueden presentar ahora comparando el número de ecuaciones y de incógnitas son los siguientes:

◆ $t.b > g.n - a$

En este caso al haber más ecuaciones que incógnitas siempre se puede encontrar un conjunto de deformaciones $\{e\}$ que me aumente el rango de $[C]$, con lo que en general el sistema será incompatible, no puede haber deformaciones cualesquiera. Si consideramos unas deformaciones compatibles, por ejemplo nulas, el sistema tendrá solución, que será única si $\text{rango } [C] = g.n - a$. Corresponde este caso a una estructura **hiperestática**, que es estable y en la que las deformaciones no pueden ser arbitrarias; acciones indirectas como los incrementos térmicos y movimientos de apoyos pueden no ser compatibles y provocar esfuerzos en la estructura para compatibilizarse.

Si el $\text{rango } [C] < g.n - a$ el sistema es indeterminado y hay infinitas soluciones; es decir, hay un movimiento indeterminado y la estructura es inestable. Corresponde a una estructura **crítica**.

◆ $t.b = g.n - a$

Si el $\text{rango } [C] = g.n - a$, siempre serán iguales los rangos de la matriz C y de la ampliada, por lo que cualquier deformación o movimiento de apoyo es compatible y la solución es única. La estructura es **isostática**.

Si el $\text{rango } [C] < g.n - a$, con deformaciones nulas el sistema es compatible pero indeterminado, es decir, tiene grados de libertad de movimiento y por tanto es inestable. Algún otro estado de deformaciones puede resultar incompatible. Se trata de una estructura aparentemente isostática pero **crítica**.

◆ $t.b < g.n - a$

Un vector nulo de deformaciones siempre hace compatible el sistema, y como en este caso el $\text{rango } [C]$ es menor que $g.n - a$ el sistema es indeterminado y la estructura se puede mover sin que haya deformaciones. Corresponde a un **mecanismo**.

Si el $\text{rango } [C] = t.b$ el sistema siempre es compatible para cualquier deformación; no hay hiperestatismos y las acciones indirectas no provocan esfuerzos. Si por el contrario el $\text{rango } [C] < t.b$, pueden existir deformaciones que incompatibilicen el sistema al hacer el $\text{rango } [C] < \text{rango } [C|e]$. Es un mecanismo con partes hiperestáticas.

5. Núcleos hiperestáticos

La clasificación estática de una estructura realizada en el punto anterior admite un análisis más profundo. Algún esfuerzo o reacción de la estructura puede tener un carácter estático diferente del determinado para la estructura en su conjunto.

En una estructura inestable (mecanismo), algún esfuerzo puede ser de determinación hiperestática; en ese caso, si el mecanismo está en equilibrio con las fuerzas exteriores, será posible el equilibrio pero no se podrá determinar el esfuerzo correspondiente.

Si la estructura es isostática, todos los esfuerzos y reacciones lo son, como justificaremos a continuación. El caso de mayor interés corresponde a los esfuerzos y reacciones de determinación isostática en estructuras hiperestáticas. Definimos a éstas como aquellas que sólo necesitan para su determinación las ecuaciones de equilibrio, o que su eliminación convierte a la estructura en inestable.

Su determinación es importante cuando se resuelve la estructura por el método de flexibilidad, pues estos esfuerzos no podrán ser tomados como incógnitas hiperestáticas, al ser determinados estáticamente; su eliminación de la estructura dejaría la misma convertida en una forma crítica. Por otra parte, si en estos valores de determinación isostática se producen acciones indirectas (deformaciones impuestas o movimientos de apoyo), podemos asegurar que son compatibles y no van a introducir esfuerzos en la estructura.

Cada columna de la matriz de equilibrio está asociada a un esfuerzo; es lo que podemos llamar *vector equilibrio* de ese esfuerzo. Los vectores equilibrio de los esfuerzos isostáticos son linealmente independientes del resto, lo que permite la obtención de la incógnita asociada.

Podemos definir un *núcleo hiperestático* como un conjunto de esfuerzos o reacciones cuyos vectores equilibrio son linealmente dependientes entre sí. Los elementos de ese núcleo pueden constituir un *estado de autotensión*, en el que puede haber equilibrio con valores de esos elementos distintos de cero y siendo nulos el resto de esfuerzos y reacciones, y las fuerzas exteriores.

Si el grado de hiperestatismo de la estructura es uno, sólo existe un núcleo hiperestático, constituido por todas las barras y esfuerzos que no son isostáticos. Sólo existe un estado de autotensión, que corresponde a la solución para el estado homogéneo de cargas; como ésta es indeterminada, los valores de los esfuerzos vendrán en función de un escalar arbitrario.

Para la resolución por el método de flexibilidad se puede tomar como incógnita hiperestática cualquiera de los elementos del núcleo hiperestático.

Si el grado de hiperestatismo es mayor que uno, el número de núcleos hiperestáticos es variable. Como mínimo este número será el grado de hiperestatismo de la estructura.

Puede ocurrir que los núcleos sean independientes entre sí, sin ningún esfuerzo o reacción que pertenezca a más de un núcleo, con lo que el número de núcleos posibles será el grado de hiperestatismo de la estructura. Para la resolución por el método de flexibilidad se pueden tomar como incógnitas hiperestáticas un elemento cualquiera de cada núcleo hiperestático.

Si algún elemento (esfuerzo o reacción) pertenece a más de un núcleo hiperestático, se pueden obtener núcleos (estados de autotensión) adicionales como combinaciones lineales de los anteriores. Para la resolución por el método de flexibilidad se pueden tomar como

incógnitas hiperestáticas aquellas cuyos vectores equilibrio sean linealmente dependientes, de modo que las que resten sean linealmente independientes y formen una base a la que referir cualquier otro vector equilibrio.

6. Aplicación informática para la clasificación estática de estructuras articuladas

Se ha desarrollado una aplicación informática para el análisis estático de una estructura articulada plana. El análisis se realiza construyendo la matriz de equilibrio de la estructura y determinando en primer lugar el grado de hiperestatismo aparente, H . A partir de éste, y mediante un algoritmo se van eliminando todas las posibles combinaciones de H esfuerzos o reacciones y analizando si la estructura resultante es o no estable.

Esta estabilidad se comprueba resolviendo el sistema de ecuaciones por reducción, considerando como cargas exteriores cada una de las incógnitas eliminadas con un valor unidad. Si el sistema no admite la reducción, alguna de las incógnitas es isostática.

Si el sistema admite solución se obtienen H estados de autotensión correspondientes a la solución para cada uno de los estados de carga, es decir para cada incógnita (barra o reacción) que hemos eliminado. Las barras o reacciones que trabajan (que tienen un resultado distinto de cero) en cada estado forman el núcleo hiperestático correspondiente junto con la incógnita eliminada a la que le hemos dado el valor unidad. Las que no trabajan en ninguno de los estados son de determinación isostática.

The screenshot displays a software interface for structural analysis. On the left, a window titled "ESQUEMA DE LA ESTRUCTURA" shows a trapezoidal truss with 10 members and 4 nodes. The members are numbered 1 through 10. The right window, titled "Matriz de EQUILIBRIO", shows a 10x10 matrix of equilibrium coefficients. Below the matrix, a dialog box titled "ESTRUCTURAS ARTICULADAS" provides the following information:

ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA DE GRADO 2
 Núcleo hiperestático 1: Barra 1,
 Reacciones 1, 3.
 Núcleo hiperestático 2: Barra 5, 6, 7, 8, 9, 10,
 Reacciones

At the bottom of the interface, there are radio buttons for "Matriz General" and "Matriz con apoyos", a button for "Análisis de estabilidad", and a "Seguir" button.

Si ninguna incógnita hiperestática pertenece a más de un estado de autotensión, éstos son linealmente independientes entre sí y no existen más núcleos hiperestáticos. Si por el

contrario existen incógnitas comunes a más de un estado de autotensión, pueden existir otros núcleos hiperestáticos que impliquen a barras diferentes.

