

# ANÁLISIS POR MACROELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN A LÁMINAS DE REVOLUCIÓN

*Federico Bonet Zapater*

*Profesor Titular de la Universidad Politécnica de Valencia (España)*

## **Agradecimientos**

*La presentación de este trabajo al 3er Simposio Internacional de Estructuras, Geotecnia y Materiales de Construcción ha contado con el patrocinio de la Consellería de Cultura, Educación y Ciencia de la Generalitat Valenciana.*

---

## **1.- Introducción**

En numerosas ocasiones el análisis de determinadas estructuras puede reducirse a un problema unidimensional, por ejemplo la flexión y torsión de las vigas, la deformación axisimétrica de láminas de revolución, etc. En estos casos, la facilidad o dificultad de obtención de una solución analítica depende de la geometría, la carga y las condiciones de contorno.

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen en el planteamiento de estos problemas se han empleado diferentes métodos numéricos: elementos finitos, integración numérica, diferencias finitas.

En la resolución por el método de los elementos finitos se introducen unas funciones de forma arbitrarias para representar el campo de desplazamientos en el interior de cada elemento, en función de los valores que adopta este campo de desplazamientos en los nodos del elemento. Se han desarrollado diversas técnicas para mejorar la precisión obtenida, como la utilización de variables anodales, el empleo de polinomios de Legendre, etc.

Entre los trabajos que pretenden afinar la descripción del campo de desplazamientos en el interior del elemento, con el objetivo de poder ampliar el tamaño del mismo, manteniendo un nivel de precisión, se encuentra el estudio que se presenta a continuación.

Una formulación alternativa consiste en el empleo de las funciones de forma "exactas", correspondientes a la resolución por integración del sistema diferencial homogéneo que rige el problema. Estas funciones de forma ya contienen la información constitutiva sobre el material, a diferencia de las funciones de forma impuestas arbitrariamente.

Si se relacionan los esfuerzos y desplazamientos en los puntos nodales, obtenidos en la integración, se puede deducir la matriz de rigidez del elemento. Ésta proviene de la solución del sistema diferencial, y por tanto no introduce aproximación, pudiendo considerar el elemento como el mejor posible, dentro de las hipótesis de partida para el comportamiento del mismo. Ello permite, con la misma precisión, el empleo de elementos de mayor tamaño, a los que denominamos **macroelementos finitos**.

## 2.- Esquema de trabajo

Como ya se ha comentado, la introducción de determinadas hipótesis cinemáticas permite en muchos casos reducir el comportamiento de ciertas estructuras tridimensionales al análisis de la deformación lineal de un medio unidimensional. Aunque la metodología propuesta se puede aplicar a cualquier problema, la complejidad de obtener soluciones analíticas a la mayor parte de problemas en derivadas parciales, hace que nos centremos en el planteamiento unidimensional.

Las ecuaciones que rigen el problema son de los siguientes tipos:

- a) **Ecuaciones cinemáticas**, que relacionan el vector desplazamiento  $\mathbf{u}(x)$  de cada punto del medio con un vector de deformaciones  $\mathbf{e}$  apropiado al problema en cuestión, mediante un operador diferencial lineal de orden  $n$ :

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

- b) **Ecuaciones constitutivas**, que relacionan las deformaciones empleadas  $\mathbf{e}$  con los esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  asociados mediante un operador lineal:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$$

- c) **Ecuaciones de equilibrio**, que nos relacionan los esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  definidos con las fuerzas exteriores aplicadas  $\mathbf{b}$ , a través de un operador diferencial lineal de orden  $n$ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{s}$$

El conjunto de estas ecuaciones conduce a una ecuación diferencial de orden  $2n$  en la incógnita  $\mathbf{u}$ , definida por:

$$\mathbf{b} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$$

La cual puede expresarse, mediante la apropiada identificación de los parámetros, en un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución de este sistema puede obtenerse como la solución completa de la homogénea más una solución particular. Para la obtención de un elemento finito (de su matriz de rigidez), sólo interesa el estado homogéneo, es decir, libre de cargas en el interior del elemento. El efecto de acciones sobre el elemento se obtendrá como en el procedimiento general de rigidez, a través de las fuerzas de empotramiento o fuerzas nodales equivalentes.

La solución completa de la ecuación homogénea

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

puede expresarse mediante combinaciones lineales de  $2n$  funciones linealmente independientes, donde intervienen  $2n$  constantes de integración, sin un significado físico claro. Para dotarlas de este significado, introducimos unas nuevas constantes que serán precisamente los  $n$  valores de los desplazamientos en un extremo y en el otro del elemento (recordemos que es unidimensional).

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{P}(x) \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{u}_E = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(L) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{PE} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{PE}^{-1} \cdot \mathbf{u}_E$$

Cada fila de la matriz **PE** es la función de forma del desplazamiento correspondiente particularizada en un extremo del elemento (1 ó 2), y **C** es un vector que engloba las  $2n$  constantes de integración.

La matriz **PE** es no singular, pues no hay ninguna relación cinemática impuesta entre los desplazamientos nodales, y éstos se pueden fijar arbitrariamente. Por inversión de la misma se puede expresar la solución en desplazamientos en función de los desplazamientos nodales, con lo que se obtienen las funciones de forma **N(x)** de los desplazamientos, en la forma clásica del método de los elementos finitos. La diferencia estriba en que estas funciones de forma no son arbitrarias, sino que responden a todas las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema.

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{P}(x) \cdot \mathbf{PE}^{-1} \cdot \mathbf{u}_E = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{u}_E$$

Al conocer el campo de desplazamientos podíamos seguir el método clásico de los elementos finitos para obtener la matriz de rigidez, lo que conduce a expresiones complejas y normalmente a integración numérica; en nuestro caso, las funciones de forma son aún más complejas que los polinomios que se utilizan habitualmente como funciones de forma impuestas.

Pero al tener integrado el sistema diferencial, podemos expresar cualquier variable en función de las  $2n$  constantes de integración, y por tanto de los desplazamientos nodales.

Si expresamos las  $n$  componentes de esfuerzos, en el contorno se habrán de equilibrar con las fuerzas aplicadas en el mismo. El vector de cargas en el contorno englobará los esfuerzos en el extremo dorsal, cambiados de signo, y los esfuerzos en el extremo frontal. Si se emplean las expresiones adecuadas para los esfuerzos, la matriz de rigidez resultará simétrica.

$$\mathbf{s}(x) = \mathbf{Q}(x) \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{q}_E = \begin{Bmatrix} -\mathbf{s}(0) \\ \mathbf{s}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{Q}(L) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{QE} \cdot \mathbf{C}$$

La matriz **QE**, al igual que la **PE**, es de  $2n$  por  $2n$  elementos. Pero a diferencia de aquélla, es singular, pues hay unas relaciones de equilibrio de conjunto entre las fuerzas en el contorno.

La matriz de rigidez se define como la relación entre fuerzas y desplazamientos en el contorno:

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_E$$

Si sustituimos las expresiones anteriores e identificamos con la definición de matriz de rigidez, se obtiene ésta:

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{QE} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{QE} \cdot \mathbf{PE}^{-1} \cdot \mathbf{u}_E$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{QE} \cdot \mathbf{PE}^{-1}$$

Al ser singular **QE**, como ya se ha indicado, no es posible obtener una matriz de flexibilidad que fuera inversa de **K**, característica común a cualquier elemento. Dicho de otro modo, dadas  $2n$  fuerzas generalizadas aplicadas en el contorno, no es posible hallar de forma unívoca los desplazamientos, pues tenemos grados de libertad superabundantes, que habrá que fijar con las ligaduras de los apoyos.

Con estas consideraciones, la matriz de rigidez que se obtenga habrá de cumplir una serie de relaciones entre sus coeficientes:

- Simetría, por aplicación del principio de reciprocidad. A diferencia de lo que ocurre en el método de los elementos finitos, donde la simetría de la matriz de rigidez va implícita en la forma de obtenerla, en nuestro caso sólo se cumplirá si el proceso seguido en la integración de las ecuaciones diferenciales ha sido correcto.
- Equilibrio del elemento, que impondrá unas relaciones entre las fuerzas nodales, y por tanto entre las filas correspondientes de la matriz de rigidez, para que se cumpla el equilibrio en el estado homogéneo de cargas.
- Compatibilidad de movimiento de conjunto, obligando a que movimientos que no produzcan deformación (movimientos de conjunto), no produzcan fuerzas nodales. Ello impone relaciones entre determinadas columnas de la matriz de rigidez.

La expresión concreta de las condiciones anteriores depende del tipo de problema que estemos estudiando, ya que no son las mismas condiciones de equilibrio de conjunto en un elemento viga o en un elemento de lámina axisimétrica, por ejemplo.

En resumen, el proceso a seguir para la obtención de lo que hemos denominado un **macroelemento finito** es el siguiente:

1. Planteamiento del sistema diferencial que rige el problema en estado homogéneo de cargas, en la forma más conveniente para su integración posterior.
2. Integración del sistema, que quedará en función de  $2n$  constantes de integración.
3. Expresión de los corrimientos en función de las constantes de integración.
4. Particularización en los extremos del elemento y formación de la matriz PE.
5. Expresión de los esfuerzos en función de las constantes de integración.
6. Particularización en los extremos del elemento, cambio de signo en el dorsal, y formación de la matriz QE.
7. Definición de la matriz de rigidez del elemento, por multiplicación de QE y la inversa de PE.

### **3.- Láminas de revolución**

Son conocidas las propiedades de ligereza y resistencia que presentan las estructuras laminares; la existencia de numerosos ejemplos de este tipo de forma estructural en la naturaleza (cáscara de un huevo, huesos de las aves, etc.) confirma esta afirmación.

El hombre ha utilizado desde la antigüedad las formas laminares (cúpulas y bóvedas, vasijas, globos de aerostación, tuberías, misiles, etc.). De estas tipologías, las de mayor interés práctico presentan simetría de revolución, tanto en su forma, como en sus acciones preponderantes (peso propio, presión interior).

Una de las ventajas de la forma laminar es que presenta una solución al equilibrio con esfuerzos contenidos en su superficie media (solución de membrana), que deja de ser preponderante cuando acciones locales o de borde vulneran las condiciones

de deformación impuestas por la solución de membrana. En este caso aparece la flexión de la lámina.

Los primeros estudios teóricos sobre las láminas, con el establecimiento de un modelo bidimensional que permita predecir su resistencia y el nivel de sus corrimientos, no se desarrollaron hasta la segunda mitad del siglo XIX. En 1888 Love presentó por vez primera una teoría completa de la flexión lineal de láminas, con hipótesis similares a las utilizadas treinta y ocho años antes por Kirchoff para la flexión de las placas delgadas.

En la segunda década del siglo XX se desarrolló una gran actividad investigadora en el campo de la flexión de las láminas de revolución. La introducción por Reissner de una formulación mixta del problema, con el empleo de incógnitas cinemáticas y estáticas, permitía la simplificación del sistema diferencial, que Meissner generalizó y aplicó a la solución de diversas geometrías [2]. En 1917, Dubois aplicó la formulación a la resolución de la lámina cónica sometida a flexión.

Las complejas soluciones analíticas obtenidas carecían de aplicación práctica por la pobreza de medios de cálculo de la época. El gran desarrollo de los métodos numéricos a partir de la segunda mitad del siglo XX, fundamentalmente con el método de los elementos finitos, alcanzó también a la flexión de las láminas. El primer trabajo sobre la flexión lineal de las láminas de revolución fue presentado por Grafton y Strome en 1963; se trata de un elemento finito troncocónico, donde las funciones de forma para los desplazamientos son polinomios de segundo y cuarto grado. La aproximación que esto introduce es aceptable siempre que la discretización de la superficie laminar sea suficientemente fina, apareciendo distorsiones en cuanto los elementos adoptados adoptan un tamaño algo mayor, especialmente en el cálculo de las tensiones.

La mejora de este elemento se ha intentado por diversos medios, como el empleo de coordenadas curvilíneas o variables anodales. La solución que proponemos es la mejora del elemento por el empleo de soluciones analíticas ya conocidas o que hemos obtenido [7], adaptándolas a la formulación del método de rigidez.

Así pues el objetivo es la elaboración de un elemento finito de revolución, con comportamiento geométrico lineal y material hookiano, con posibilidad de ortotropía cilíndrica, a partir de las funciones de forma que corresponden a la solución analítica del sistema diferencial que gobierna la flexión de la lámina.

### *3.1.- Elemento troncocónico*

El elemento a estudiar es una estructura laminar de generatriz recta, en régimen axisimétrico lineal, sin cargas aplicadas en su interior. Las hipótesis sobre el comportamiento de la lámina son las siguientes:

- Generatriz recta de la lámina de revolución.
- Simetría axial en la forma y en la deformación (por tanto en las acciones).
- Estado de cargas nulo sobre la lámina (acciones sólo en el contorno)
- Regularidad de la normal (hipótesis de Love-Kirchoff). La normal a la superficie media se mantiene normal a la superficie deformada y es inextensible; ello implica que no hay deformación transversal, y el cortante es un factor puramente estático.

Los únicos desplazamientos a considerar son los correspondientes a la dirección del meridiano y de la normal a la lámina,  $u$  y  $w$ .

El problema así planteado resulta unidimensional, pudiendo adoptar como variable coordenada la posición según el meridiano,  $s$ , o cualquier otra relacionada geoméricamente con ella.

Los corrimientos se expresan en los ejes locales del elemento ( $u$  y  $w$ ), o en los ejes generales ( $U'$  y  $W'$ ), así como el resto de variables.

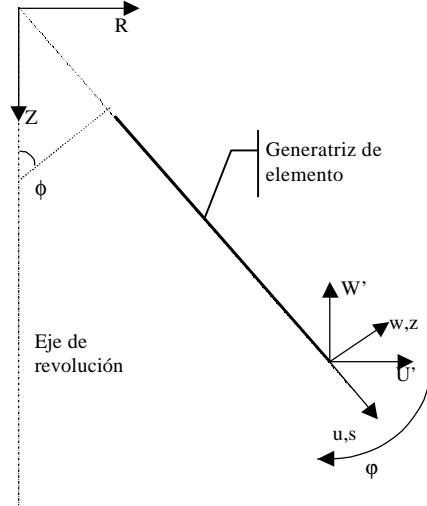
Las **ecuaciones cinemáticas** para la lámina cónica con deformación axisimétrica, en la hipótesis de Love-Kirchoff, serán de la forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \{u, w\}^t$$

$$\mathbf{e} = \{e_s, e_q, c_s, c_q\}^t$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \operatorname{tg} f \\ 0 & -\frac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \end{bmatrix}$$



El vector de deformaciones generalizadas  $\mathbf{\varepsilon}$  contiene las extensiones linealizadas  $e_s$ ,  $e_\theta$  y los cambios de curvatura linealizados  $\chi_s$ ,  $\chi_\theta$ .

Las **ecuaciones constitutivas** correspondientes a un material linealmente elástico y homogéneo, con ortotropía cilíndrica, adoptan la forma:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{s} = \{N_s, N_q, M_s, M_q\}^t$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C & nC & 0 & 0 \\ nC & rC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & nD \\ 0 & 0 & nD & rD \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{E_s h}{1 - n_s n_q}$$

$$D = C \frac{h^2}{12}$$

$$n = n_q$$

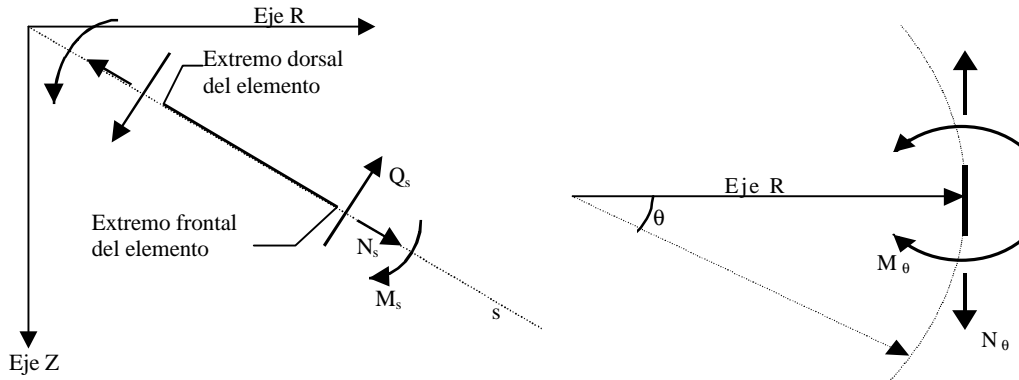
$$r = \frac{E_q}{E_s} = \frac{n_q}{n_s}$$

El vector de esfuerzos generalizados  $\boldsymbol{\sigma}$  contiene los esfuerzos de membrana  $N_s$ ,  $N_\theta$  y los momentos flectores  $M_s$ ,  $M_\theta$ , únicas componentes no nulas bajo cargas axisimétricas, además del esfuerzo cortante  $Q_s$ , que es un factor puramente estático y no interviene en la energía de deformación.

Las **ecuaciones de equilibrio** correspondientes al estado homogéneo, con acciones únicamente en el contorno, son:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos f (1 + s \frac{d}{ds}) & -\cos f & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} f & \cos f (2 \frac{d}{ds} + s \frac{d^2}{ds^2}) & \cos f \frac{d}{ds} \end{bmatrix}$$



Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado, haremos uso de las variables de Meissner:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = -\frac{dw}{ds} \\ \mathbf{y} = Q_s \cdot s \cdot \cot f \end{cases}$$

Si expresamos las diversas incógnitas en función de éstas, se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/D \\ -Eh & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{rEh \cot f}{s} C_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{L}() = s \cdot \cot f \left[ s \frac{d^2()}{ds^2} + \frac{d()}{ds} - r \frac{()}{s} \right]$$

$C_6$  es una constante directamente relacionada con la resultante de esfuerzos según el eje de simetría (constante por equilibrio). El sistema se puede diagonalizar fácilmente premultiplicando por el operador  $\mathbf{L}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = -\frac{Eh}{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} + \frac{rEh \cot f}{sD} C_6 \begin{Bmatrix} 1 \\ \cot f D \frac{r-1}{s} \end{Bmatrix}$$

Resolveremos la segunda de las ecuaciones. Al ser  $\mathbf{L}$  un operador lineal, la solución general será la suma de la solución completa de la homogénea más una solución particular. Extendiendo la función al campo complejo y con el cambio de variable adecuado, se puede expresar la ecuación homogénea como:

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dh^2} + \frac{1}{h} \frac{d\mathbf{y}}{dh} + \left(1 - \frac{4r}{h^2}\right) \mathbf{y} = 0$$

$$h = 2l \sqrt{is}$$

$$l^2 = \sqrt{\frac{Eh}{D}} \operatorname{tg} f$$

Esta ecuación es de tipo Bessel de orden  $p=2\sqrt{r}$  [5]. La solución se puede expresar como combinaciones lineales de funciones de Bessel de orden  $\pm p$  y tercera especie (funciones de Hankel) y cuatro constantes reales, que coincide con la solución completa si admitimos que la solución de membrana se puede adoptar como solución particular, en cuyo caso  $Q_s=0$ , luego  $\psi_p=0$ . Esta solución particular es exacta para material isótropo ( $r=1$ ) o para  $C_6=0$  (fuerza nula según el eje).

$$\mathbf{y}(s) = \overline{C}_1 \cdot \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h}) + \overline{C}_2 \cdot \mathbf{H}_p^2(\mathbf{h})$$

$$\begin{cases} \overline{C}_1 = Eh(C_1 - iC_2) \\ \overline{C}_2 = Eh(C_3 - iC_4) \end{cases}$$

$$p = 2\sqrt{r}$$

A partir de la solución obtenida se pueden expresar el campo de desplazamientos y de esfuerzos en función de seis constantes de integración, lo que en el apartado anterior se han definido como matrices P(x) y Q(x):

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\langle A_1(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle A_1(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle B_1(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle B_1(\mathbf{h}) \rangle & 0 & -\mathbf{n} \cos \mathbf{f} \\ \operatorname{Re}\langle A_2(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle A_2(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle B_2(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle B_2(\mathbf{h}) \rangle & 1 & -\frac{p^2 \ln(2I\sqrt{s})}{2 \operatorname{sen} \mathbf{f}} \\ -\operatorname{Im}\langle A_3(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle A_3(\mathbf{h}) \rangle & -\operatorname{Im}\langle B_3(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle B_3(\mathbf{h}) \rangle & 0 & \frac{p^2}{4s \operatorname{tg} \mathbf{f}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix}$$

$$A_1(\mathbf{h}) = \cos \mathbf{f} \left[ \frac{h}{2} \mathbf{H}_{p-1}^1(\mathbf{h}) - \left( \frac{p}{2} + \mathbf{n} \right) \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h}) \right]$$

$$A_2(\mathbf{h}) = \operatorname{sen} \mathbf{f} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h}) + \frac{p^2 \operatorname{sen} \mathbf{f}}{2} \left[ \frac{\mathbf{H}_{p-1}^1(\mathbf{h})}{h} + \frac{p-2}{h^2} \mathbf{H}_{p-2}^1(\mathbf{h}) - (p-2)(p-4) \int \mathbf{h}^{-3} \mathbf{H}_{p-2}^1 d\mathbf{h} \right] +$$

$$+ \frac{\cos^2 \mathbf{f}}{2 \operatorname{sen} \mathbf{f}} \left[ h \mathbf{H}_{p-1}^1(\mathbf{h}) + p \mathbf{H}_{p-2}^1(\mathbf{h}) + p(p-2) \frac{\mathbf{H}_{p-3}^1(\mathbf{h})}{h} + p(p-2)(p-4) \int \mathbf{h}^{-2} \mathbf{H}_{p-3}^1 d\mathbf{h} \right]$$

$$A_3(\mathbf{h}) = \sqrt{\frac{Eh}{D}} \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h})$$

$\operatorname{Re}\langle \rangle$  e  $\operatorname{Im}\langle \rangle$  son la parte real e imaginaria de las funciones correspondientes. Las funciones B( $\eta$ ) son como las A( $\eta$ ) pero sustituyendo las funciones  $\mathbf{H}^1$  por las  $\mathbf{H}^2$ . Los desplazamientos están expresados en los ejes generales.

Los esfuerzos, también en ejes generales, resultan:

$$\begin{Bmatrix} X' \\ M \cdot \frac{Z'}{\sqrt{\frac{Eh}{D}} / \cos \mathbf{f}} \end{Bmatrix} = 2pEh \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\langle \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle \mathbf{H}_p^2(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Im}\langle \mathbf{H}_p^2(\mathbf{h}) \rangle & 0 & \cos^2 \mathbf{f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\operatorname{sen} 2\mathbf{f}}{2} \\ -\operatorname{Im}\langle A_4(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle A_4(\mathbf{h}) \rangle & -\operatorname{Im}\langle B_4(\mathbf{h}) \rangle & \operatorname{Re}\langle B_4(\mathbf{h}) \rangle & 0 & \frac{p^2(\mathbf{n}-1)}{4I^2s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix}$$

$$A_4(\mathbf{h}) = \frac{h}{2} \mathbf{H}_{p-1}^1(\mathbf{h}) - \left( \frac{p}{2} - \mathbf{n} \right) \mathbf{H}_p^1(\mathbf{h})$$

Estos esfuerzos o fuerzas generalizadas están multiplicados por la longitud del paralelo correspondiente; de esta forma la matriz de rigidez resulta simétrica, ya que el trabajo de deformación es esa fuerza total multiplicada por el corrimiento correspondiente, constante en el paralelo. Se comprueba que la función Z' es constante y directamente relacionada con C<sub>6</sub>. A partir de estas fuerzas se pueden obtener los cinco esfuerzos significativos en ejes locales.

Las matrices obtenidas son las que hemos llamado P y Q en el procedimiento general expresado en el apartado anterior; a partir de ellas se obtiene la matriz de rigidez del elemento troncocónico como allí se indica.

### 3.2.- Análisis de estructuras laminares de revolución

Para completar el elemento, hemos de incluir los casos extremos del tronco de cono, es decir, la placa anular y el cilindro, con lo que se podrá discretizar en elementos rectos cualquier lámina de revolución.

Para ello se han adaptado también a la formulación anterior las soluciones analíticas ya conocidas de placa con simetría de revolución y cilindro, completando el macroelemento.

Con este macroelemento (su matriz de rigidez) se puede resolver cualquier estructura laminar con simetría de revolución mediante su discretización en elementos de directriz recta, con la única aproximación de su geometría, siendo exacta la respuesta del elemento recto asimilado. La resolución se puede hacer por el método de rigidez.

En el caso de que las cargas no estén aplicadas únicamente en los nodos (estado homogéneo en los elementos), se pueden obtener las fuerzas nodales equivalentes por aplicación de principios variacionales, a partir de las funciones de forma de los desplazamientos ya obtenidas:

$$\mathbf{q}^e = -\int \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{b} \cdot dV$$

$$-\mathbf{q}^e = 2p \cos f \cdot \mathbf{P} \mathbf{E}^{-1,t} \int_{s1}^{s2} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{b} \cdot s \cdot ds$$

La integral depende de las cargas actuantes,  $\mathbf{b}$ . Para algunas leyes de cargas sencillas, se puede hacer una integración analítica; en casos más complejos se puede recurrir a integración numérica, teniendo cuidado con la cuadratura que se adopta, dado el carácter exponencial de las funciones englobadas en la matriz  $\mathbf{P}$ .

Para conocer la solución en el interior del elemento se necesita una solución particular del sistema no homogéneo para añadir a la solución obtenida anteriormente. Esta solución puede ser la de membrana correspondiente al estado de cargas actuante.

### 4.- Aplicación informática para láminas de revolución

Hemos desarrollado una aplicación informática capaz de resolver el estado tensional y de deformaciones de una estructura laminar, de forma cualquiera y con simetría de revolución, a partir de los desarrollos teóricos expresados anteriormente.

La aplicación se desarrolló con el paquete Visual Basic, funcionando en el entorno Windows. Esto hace que el programa sea agradable en su presentación y entrada de datos y salida de resultados, lo que le confiere una utilidad didáctica y docente.

Tuvo la dificultad añadida de que el lenguaje no está orientado a aplicaciones científicas, lo que requirió la elaboración de numerosas rutinas para el manejo de las diversas funciones que aparecen en el desarrollo que hemos apuntado; entre otras muchas, fue preciso definir un tipo de variables que reflejara un número complejo y desarrollar todas las operaciones básicas en el campo complejo.

La aplicación comienza con una pantalla principal desde la que se puede acceder a las diversas opciones de entrada de datos y definición de la lámina, cálculo de la misma y presentación de los resultados. Todas las opciones tienen un importante apoyo

gráfico. Se dispone también de un sistema de ayuda interactiva que orienta sobre el propio programa y sobre los aspectos teóricos más destacables de la aplicación.

### 5.- Ejemplo

Se ha utilizado el elemento desarrollado y su aplicación informática resolviendo numerosos ejemplos y comparándolos con la solución teórica, o la numérica ofrecida en diversos trabajos. Se ha comprobado la coincidencia de resultados y la mayor precisión alcanzada en los resultados utilizando discretizaciones más groseras que con otro tipo de elementos con funciones de forma supuestas, como era de esperar.

Se presentan a continuación los resultados para uno de los ejemplos desarrollados en el trabajo clásico de Grafton y Strome [1]. Se trata de una esfera con la clave abierta y empotrada en la base, solicitada por un momento en el extremo libre. Se ha analizado con diversas discretizaciones, procurando mantener la densidad relativa de elementos por zonas. Se presentan los resultados para el desplazamiento horizontal del extremo libre y el momento flector meridional  $M_s$  en el punto  $z=15$ .

	División en elementos				Resultados			
	7°	7°	6°	40°	$u'_1$	D%	$M_s(15)$	D%
28 elementos	14	7	3	4	1.631390	0	-0.854100	0
14 elementos	7	3	2	2	1.629877	-0.09	-0.854059	-0.005
7 elementos	3	2	1	1	1.637416	0.37	-0.855425	0.16
2 elementos	1 elemento de 15° y otro de 45°				1.677113	2.80	-0.873175	2.23

La discretización en 28 elementos, adoptada en el trabajo de Grafton y Strome, coincide con el valor teórico. Las diferencias con el caso extremo de sólo dos elementos no alcanzan el 3%. La precisión obtenida es muy aceptable, incluso para el momento flector en el interior del elemento, no presentando los problemas que surgen con el empleo de funciones de forma impuestas en el cálculo de la distribución de los esfuerzos.

### Bibliografía

1. P.E. Grafton, D.R. Strome, "Analysys of axisymmetrical shells by the direct stiffness method" – A.I.A.A. Journal, vol 1, n° 10
2. H. Mollman, "Theory of thin shells" – John Wiley, U.K.
3. V.G. Rekach, "Problemas de la teoría de la elasticidad" – Ed. Mir, Moscú
4. S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells" – McGraw-Hill, New York
5. Courant-Hilbert, "Methods of mathematical physics" – Interscience P., New York
6. Abramowitz, Stegun eds., "Handbook of mathematical functions" – New York
7. F. Bonet, "Generación de macroelementos finitos en el análisis de láminas de revolución" – Tesis Doctoral, Valencia