DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA E.U.I. EXAMEN DE TEORÍA DE F.F.I.	18 de diciembre de 1999

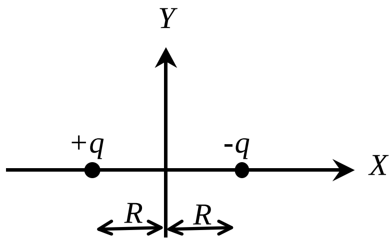
1. Dado el campo escalar $U = 3xy^2 + 2zx - 2y^2 z$.
   a) Calcula el gradiente de U en el punto (1,1,0).
   b) ¿Es el campo $\vec{\nabla} U$ conservativo? ¿Por qué?

a) $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (3y^2 + 2z)\vec{i} + (6xy - 4yz)\vec{j} + (2x - 2y^2)\vec{k}$

$\vec{\nabla} U\Big|_{(1,1,0)} = (3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0)\vec{i} + (6 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0)\vec{j} + (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2)\vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$

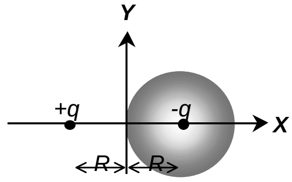
b) Sí. Porque $\vec{\nabla} U$ se puede escribir como el gradiente de una función escalar.

2. Dadas dos cargas puntuales, una positiva $+q$ y otra negativa $-q$, situadas como muestra la figura, determina el flujo de campo eléctrico a través de:
   a) Una superficie esférica de radio R centrada en $(R,0,0)$.
   b) Una superficie esférica de radio $2R$ centrada en $(0,0,0)$.
   c) Una superficie esférica de radio $R/2$ centrada en $(0,0,0)$.



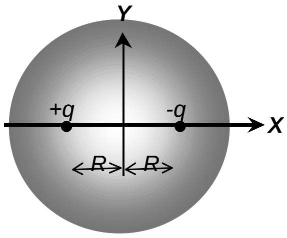
a) Como se observa en la figura, solamente la carga $-q$ está en el interior de la superficie gaussiana. Por tanto,

$$\Phi = \frac{-q}{e_0} \quad \text{(Wb)}$$



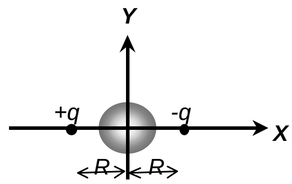
b) Para el caso de una esfera de radio $2R$, centrada en el origen, tenemos que las dos carga de la figura se encuentran en el interior de la superficie, por lo que la carga total encerrada en el interior de la superficie es cero, y por tanto, el flujo a través de la superficie es cero:

$$\Phi = \frac{q - q}{e_0} = 0 \quad \text{(Wb)}$$

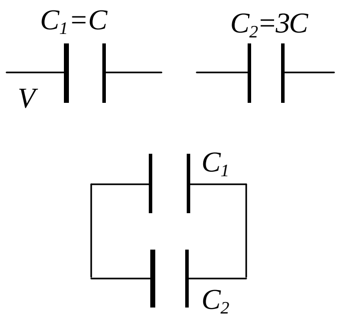


c) En esta ocasión, no hay carga encerrada en el interior de la superficie de Gauss, por lo tanto, el flujo neto es cero:

$$\Phi = \frac{0}{e_0} = 0 \quad \text{(Wb)}$$



3. Dados dos condensadores, C_1 de capacidad C y C_2 de capacidad $3C$, el primero se carga a una d.d.p. V y el segundo se mantiene aislado.
   A continuación se conectan como se indica en la figura inferior. Calcula la carga de cada condensador.



La carga del condensador 2 es cero y la del condensador 1, es:

$$Q_1 = C_1 V = CV$$

Esta carga al conectar los dos condensadores se reparte entre ellos, de modo que:

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 = CV$$

Teniendo en cuenta esta relación entre las cargas y que los dos condensadores los conectamos en paralelo y por lo tanto a la misma d.d.p., obtenemos los valores de las cargas pedidos:

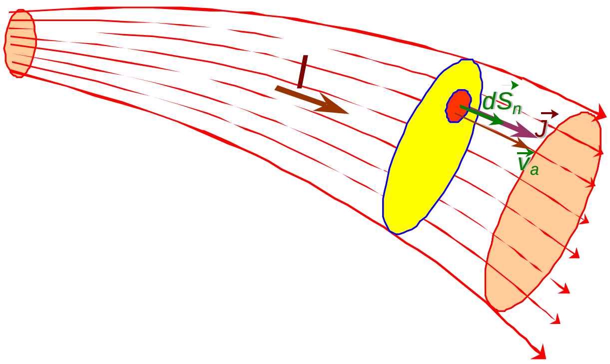
$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{C} = \frac{Q_2'}{3C} \rightarrow Q_1' = \frac{Q_2'}{3}$$

$$CV = \frac{Q_2'}{3} + Q_2' = \frac{4}{3}Q_2' \Rightarrow Q_2' = \frac{3}{4}CV \Rightarrow Q_1' = \frac{1}{4}CV$$

4. Define la intensidad de corriente y la densidad de corriente.

La intensidad de corriente es la cantidad de carga que atraviesa una sección transversal del conductor por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dq}{dt}$$



La densidad de corriente es un vector que en cada punto del conductor tiene la dirección y sentido del movimiento de las cargas positivas (v_a) y cuyo módulo es igual a la cantidad de carga que por unidad de tiempo atraviesa la unidad de superficie normal a v_a:

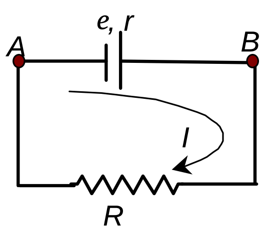
$$\vec{J} = \frac{dI}{dS_n}\vec{u}_n \qquad \vec{u}_n = \frac{\vec{v}_a}{|\vec{v}_a|}$$

5. Una batería tiene una fem e y una resistencia interna r. Cuando se conecta una resistencia de 10 Ω entre los terminales de la misma, la corriente es de 1 A. Cuando se sustituye esta resistencia por otra de 3 Ω, la corriente es de 3 A. Calcula la fem e y la resistencia interna r.

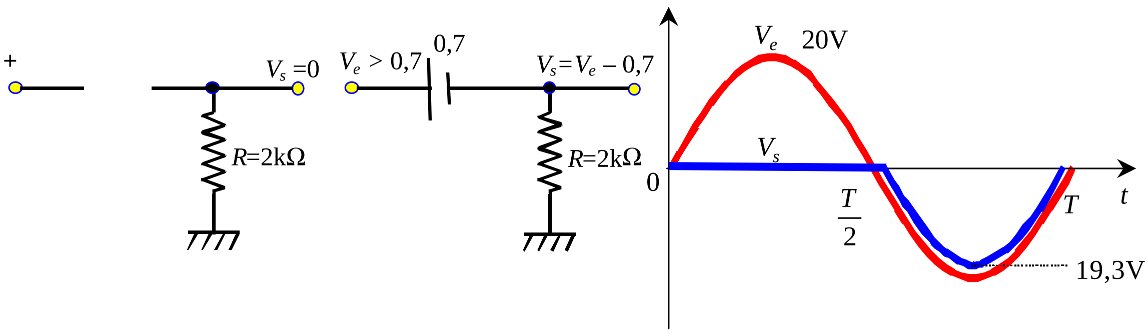
R=10 Ω ⇒ $V_{AB} = e - Ir = e - 1 \cdot r = R\,I = 10 \cdot 1 = 10$ V

R=3 Ω ⇒ $V_{AB} = e - Ir = e - 3 \cdot r = R\,I = 3 \cdot 3 = 9$ V

$$\left.\begin{array}{l} e - r = 10 \\ e - 3r = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 1/2\ \Omega \\ e = 21/2\ V \end{array}\right.$$



6. Dado el circuito de la figura, calcula la tensión de salida, V_s, para la tensión de entrada, V_e, indicada en la figura. El diodo es de silicio, con una tensión umbral de 0,7 V.



7. Indica tres diferencias entre materiales conductores y semiconductores.

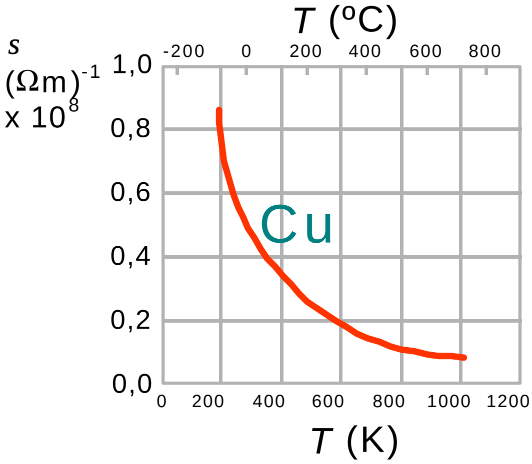
1. Conductividad eléctrica.

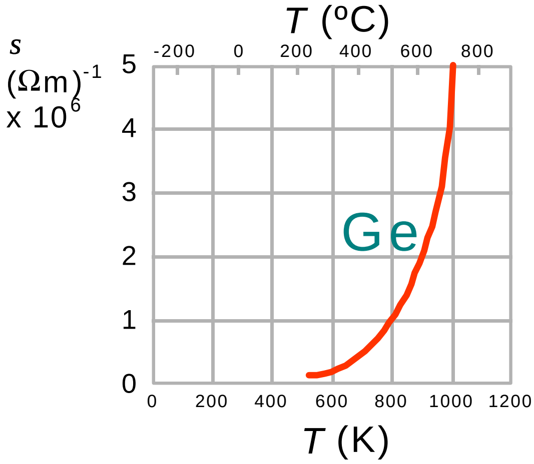
Una diferencia fundamental entre conductores, semiconductores y aislantes es la mayor o menor facilidad que encuentren las cargas para moverse en su interior, es decir, la conductividad que presentan los materiales:

CONDUCTIVIDAD $(\Omega m)^{-1}$

$< 10^{-8}$	AISLANTES	cuarzo, plástico
10^{-8}	SEMICONDUCTORES PUROS	silicio, germanio
10^{-8} - 10^{6}	SEMICONDUCTORES CON IMPUREZAS	Si, Ge dopados
10^{6} - 10^{8}	CONDUCTORES	plata, cobre

2. Variación de la conductividad con la temperatura.





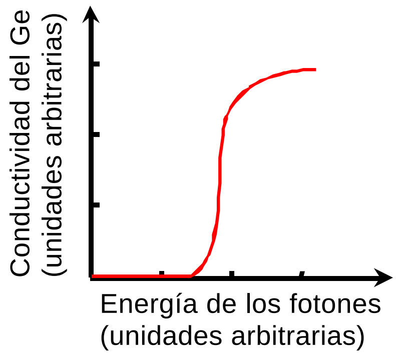
En las gráficas podemos ver como para el cobre, como en todos los conductores, al aumentar la temperatura la conductividad disminuye. Sin embargo, en el germanio, como en todos los semiconductores, al aumentar la temperatura la conductividad aumenta considerablemente.

3. Variación de la conductividad con la iluminación del material.

Cuando se ilumina un semiconductor con una radiación luminosa de energía variable se observa que la conductividad del material varía tal y como muestra la gráfica adjunta. En dicha gráfica observamos dos aspectos destacables:

1. Es necesario un valor mínimo de energía de los fotones para que la conductividad del material iluminado varíe, observado además en esa energía de los fotones un salto brusco en la conductividad.
2. Una variación en la energía de los fotones proporciona una variación en la conductividad del material.

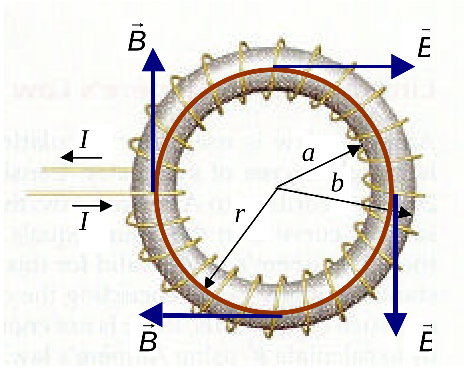
Si realizáramos la misma experiencia con un material conductor, no se observa variación de la conductividad en función de la energía de los fotones.

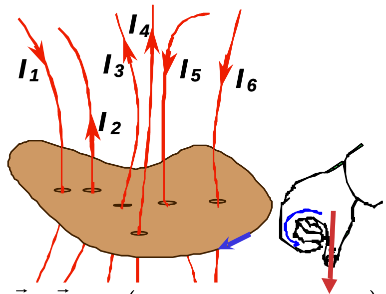


4. Efecto Hall.

El efecto Hall (que será estudiado con detalle en el tema de *campo magnético*) permite distinguir el signo de los portadores de carga en un material. Mediante dicho efecto se observa que en los materiales conductores los portadores de carga tienen signo negativo, mientras que en los semiconductores los portadores de carga pueden tener signo negativo o signo positivo.

8. **a)** Enuncia el teorema de Ampère.
b) Aplica el teorema de Ampère para calcular el campo magnético creado por un solenoide toroidal de N espiras por el que circula una intensidad de corriente I, en un punto situado a una distancia r del centro ($a < r < b$).





$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = m_0(I_1+I_5+I_6-I_2-I_3-I_4)$$

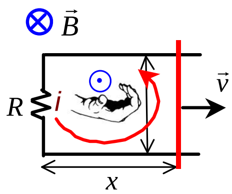
a) La circulación del vector campo magnético a lo largo de una curva cerrada es igual a $m_0 I$, donde I es la corriente estable total que pasa a través de cualquier superficie limitada por la curva:

$$C = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = m_0 I$$

En el cálculo de dicha corriente total hay que tener en cuenta que la dirección positiva de la corriente que atraviesa la superficie está determinada por la dirección en que se recorre la curva, según la regla de la mano derecha.

b) $C = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B\, dl = B\oint dl = B2pr = m_0 N I \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{m_0 N I}{2pr}$

9. Una barra conductora de resistencia despreciable y longitud L desliza sin rozamiento, con velocidad constante $\vec{v}$ sobre un conductor en forma de horquilla con resistencia R situado en un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular como se muestra en la figura. Determina el valor y el sentido de la intensidad inducida.



La ley de Faraday indica que la fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual a la derivada del flujo magnético respecto del tiempo,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

El flujo que atraviesa la espira es,

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

en este caso, el vector superficie y el campo magnético son paralelos, por lo que tenemos,

$$\Phi = \int_S B dS$$

y como el campo magnético es uniforme (es constante) puede salir fuera de la integral, con lo cual,

$$\Phi = \int_S B dS = B\int_S dS = BS \quad \text{(Wb)}$$

Derivando ahora esta expresión respecto del tiempo obtenemos la *f.e.m.*,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B\,S)}{dt} = -\frac{d(B\,L\,x)}{dt} = -B\,L\frac{dx}{dt} \quad \text{(V)}$$

y como la derivada de x respecto a t es la velocidad, tenemos,

$$e = -BLv$$

La intensidad inducida es el módulo de la *f.e.m.* dividido por la resistencia,

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{B\,L\,v}{R} \quad \text{(A)}$$

El sentido de la intensidad viene dado por la ley de Lenz: como el flujo aumenta, la corriente inducida debe ser tal que compense el aumento de flujo, por tanto el campo magnético debe ser saliente del papel, y la corriente inducida será en el sentido contrario a las agujas del reloj, tal y como indica la figura.

10. Por un circuito con una autoinducción circula una intensidad de corriente $i(t)=I_m \cos wt$. Obtén la expresión de la caída de tensión en la autoinducción, y el desfase producido entre la tensión y la intensidad.

La tensión en una inducción viene dada por,

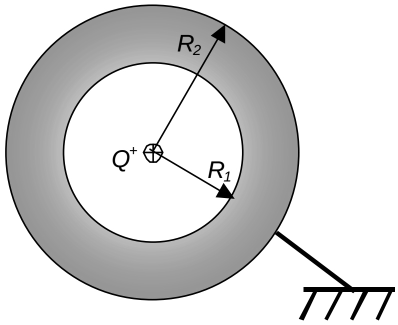
$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_m \cos wt\right) = -LI_m w\ sen wt = LI_m w\ \cos(wt + p\ /2)$$

con lo cual el desfase entre la tensión y la intensidad es de $\pi/2$

$$f = f_u - f_i = p\ /2$$

es decir, la tensión está adelantada $\pi/2$ respecto de la intensidad.

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA E.U.I. EXAMEN DE PROBLEMAS DE F.F.I.	18 de diciembre de 1999
APELLIDOS:	NOMBRE:

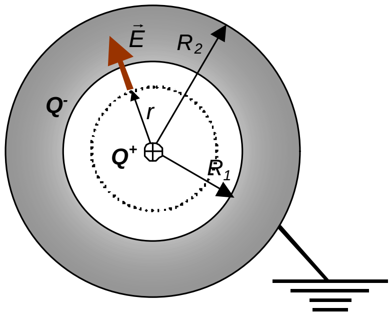


1. La figura muestra una esfera metálica hueca de radios interior y exterior R_1 y R_2, respectivamente. Dicha esfera se encuentra conectada a tierra. Se coloca una carga puntual positiva Q, en el centro de la esfera.

a) Indica cuál es la distribución de cargas en las superficies interior y exterior de la esfera.

b) Obtén la expresión del campo eléctrico $\vec{E}(r)$ para $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r < R_2$.

c) Obtén la expresión del potencial electrostático $V(r)$ para $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r < R_2$.



a) En la superficie interior de la esfera metálica hueca (radio R_1) aparece por influencia total una carga $-Q$. En la superficie exterior (radio R_2) no hay carga al estar conectada a tierra dicha superficie.

b) $\underline{r < R_1}$

El campo eléctrico lo calculamos utilizando el teorema de Gauss. Para ello tomamos una superficie de Gauss esférica, centrada en la carga Q^+, y de radio r. En dicha superficie el campo eléctrico es en la dirección radial, y constante en toda la superficie, con lo cual

$$\Phi_S = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4pr^2 = \frac{Q}{e_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4pe_0 r^2}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

Al tratarse del interior de un conductor, el campo eléctrico es cero. $E = 0$.

$\underline{r > R_2}$

El campo eléctrico es cero al no haber cargas en el exterior del conductor hueco conectado a tierra, que actúa como una pantalla eléctrica. $E = 0$.

c) $\underline{r > R_2}$

El potencial electrostático es cero al no haber cargas en el exterior del conductor hueco conectado a tierra, que actúa como una pantalla eléctrica. $V = 0$.

$\underline{R_1 < r < R_2}$

Al tratarse de un conductor, el potencial es constante, y al estar conectado a tierra su valor es 0. $V = 0$.

$\underline{r < R_1}$

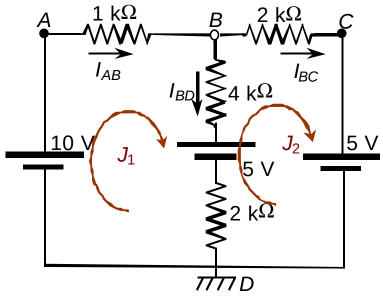
$$V(r) = \frac{Q}{4pe_0 r} + K$$

Aplicando continuidad en el punto $r = R_1$,

$$V(r = R_1) = \frac{Q}{4pe_0 R_1} + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{Q}{4pe_0 R_1}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4pe_0 r} + \frac{-Q}{4pe_0 R_1}$$

2. Dado el circuito de la figura:



a) Determina las intensidades de rama I_1, I_2, e I_3 mediante las leyes de Kirchhoff.

b) Determina las intensidades de rama I_1, I_2, e I_3 mediante el método de las mallas.

c) Calcula el potencial en el punto *B*.

d) Calcula la resistencia equivalente entre los puntos *B* y *C*.

e) Dibuja el equivalente de Thevenin entre los puntos *B* y *C*, indicando claramente su polaridad.

f) Entre los puntos *B* y *C* se añade un diodo de tensión umbral 0,7 V en polarización directa. Calcula la intensidad de corriente que circula por él, indicando claramente su sentido.

a) La ley de los nudos, aplicado al nudo *B*, nos dice que la suma de las intensidades que convergen al nudo *B* es igual a cero, es decir,

$$I_{AB} - I_{BD} - I_{BC} = 0$$

Si calculamos ahora la diferencia de potencial entre *A* y *D*, y la diferencia de potencial entre *C* y *D*, obtenemos:

$$V_{AD} = 10 = I_{AB} + I_{BD} \cdot 6 + 5 \quad \Rightarrow \quad I_{AB} = 5 - I_{BD} \cdot 6$$

$$V_{CD} = 5 = -2 \cdot I_{BC} + I_{BD} \cdot 6 + 5 \quad \Rightarrow \quad I_{BC} = 3 \cdot I_{BD}$$

De este modo obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Observa que en estas expresiones que los voltajes vienen dados en V, las resistencias en kΩ, por lo que las intensidades vendrán dadas en mA. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene,

$$I_{AB} = 2\ mA \quad I_{BC} = 3/2\ mA \quad I_{BD} = 1/2\ mA$$

b) Definiendo las intensidades de malla tal y como indica la figura, la ecuación matricial de mallas quedará:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

De donde,

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{40}{20} = 2 \text{ mA}$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{30}{20} \text{ mA} = \frac{3}{2} \text{ mA}$$

Las intensidades de rama vienen dadas por:

$$I_{AB} = J_1 = 2 \text{ mA}$$

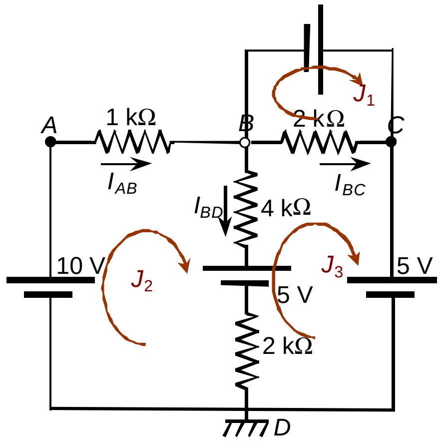
$$I_{BC} = J_2 = \frac{3}{2} \text{ mA}$$

$$I_{BD} = J_1 - J_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

c) El potencial en el punto *B* lo podemos obtener a partir de la diferencia de potencial entre el punto el *B* y el *D* (puesto que conocemos el potencial en *D*, que es igual a cero):

$$V_{BD} = V_B - V_D = V_B - 0 = V_B = 6 \cdot I_{BD} + 5 = 8 \text{ V}$$

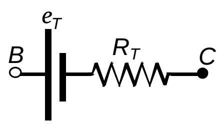
d) Para obtener la resistencia equivalente conectamos entre los puntos *B* y *C* un generador, y numerando las mallas de modo que la que contiene éste nuevo generador sea la número 1. Entonces, la resistencia equivalente viene dada por:



$$Z_{eq} = \frac{D}{D_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -6 \\ -2 & -6 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}\, k\Omega$$

donde D es el determinante de la matriz de resistencias definida en el método de las corrientes de malla, y D_{11} el adjunto del elemento (1,1) de la matriz de resistencias.

e) La resistencia del generador equivalente de Thevenin viene dada por la resistencia equivalente del circuito:

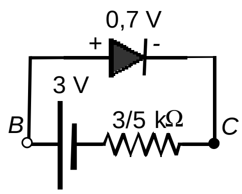


$$R_T = R_{eq} = \frac{3}{5}\, k\Omega$$

La *fem* del generador equivalente de Thevenin es la diferencia de potencial entre los puntos *B* y *C*:

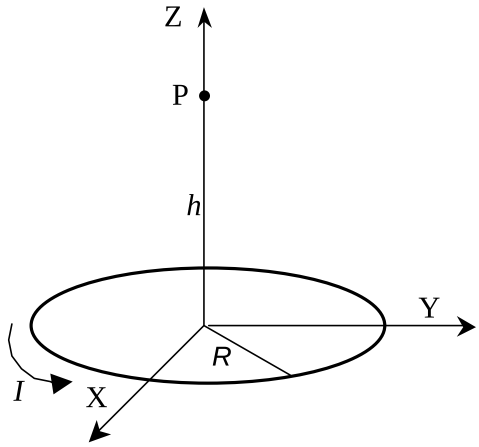
$$å_T = V_{BC} = V_B - V_C = 8 - 5 = 3\, V$$

f) Para determinar la intensidad que circula por el diodo hacemos uso del generador equivalente de Thevenin calculado en el apartado anterior:



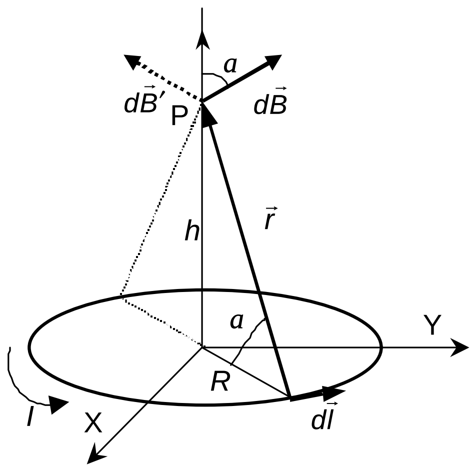
$$I = \frac{3 - 0{,}7}{3/5} = 3{,}83\ mA$$

3. Determina la expresión del campo magnético creado por una espira circular de radio *R*, por la que circula una intensidad *I*, en un punto de su eje situado a una distancia *h* de la espira.



Un elemento de corriente $d\vec{l}$ crea en el punto P un diferencial de campo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



Vemos en la figura que $d\vec{l}$ y $\vec{r}$ son perpendiculares para cualquier punto de la espira circular, luego el módulo de $d\vec{B}$, nos queda:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

y su dirección es normal al plano determinado por $d\vec{l}$ y $\vec{r}$.

La resolución de la integral vectorialmente plantea dificultades, pues $d\vec{l}$ y $\vec{r}$ varían de dirección. Podemos simplificar el problema considerando las simetrías del mismo.

La componente de $d\vec{B}$ sobre la normal al eje se anula con la componente, también sobre la normal al eje, del vector $d\vec{B}'$ creado por un elemento de corriente $d\vec{l}\,'$, simétrico del $d\vec{l}$. Así, el campo en el punto P del eje de la espira circular tiene la dirección del propio eje y su módulo es:

$$B = \int_C dB_z = \int_C dB \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\cos\alpha \, dl}{r^2}$$

y sustituyendo en la anterior expresión la relación: $\cos\alpha = \frac{R}{r}$, resulta:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\cos\alpha \, dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{R\,dl}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_C dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

ésta expresión la podemos escribir en función de la distancia *h* del punto P al centro de la espira, $r^2 = h^2 + R^2$ y nos queda:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

4. En un circuito RL serie, con L=0,05H, circula una intensidad de corriente $i = 2\sqrt{2}\cos 500t(\text{A})$. Con un voltímetro se mide la d.d.p. en bornes de la resistencia, siendo $V_R = 50\text{V}$, Determina:

a) El valor de R.
b) La expresión compleja de la tensión en bornes del generador.
c) La expresión del valor instantáneo *v(t)*.
d) A continuación se conecta un condensador en serie con R y L. Calcula su capacidad para que el desfase entre la tensión e en bornes del generador y la intensidad i_1 que circula en este caso sea 30º.
e) Determina la expresión compleja de la nueva intensidad.

a) Las medidas realizadas con voltímetro y amperímetro son valores eficaces de las magnitudes correspondientes.

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$$

La tensión en bornes de la resistencia es:

$$V_{Rm} = I_m R \quad \vee \quad V_{\text{Re}f} = I_{ef} R$$

de donde obtenemos el valor de la resistencia:

$$V_{\text{Re}f} = I_{ef} R \Rightarrow 50 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} R \quad \Rightarrow \quad R = 25\Omega$$

b) A partir de la expresión simbólica de la Ley de Ohm, sabiendo que la impedancia del circuito *RL*, es:

$$\overline{Z} = R + jX = 25 + 25j = 25\sqrt{2}\underline{|45°}\Omega$$
$$\overline{V} = \overline{ZI} = 25\sqrt{2}\underline{|45°} \cdot 2\underline{|0°} = 50\sqrt{2}\underline{|45°}\text{V}$$

c) De la expresión compleja de la tensión obtenemos de forma inmediata la expresión del valor instantáneo:

$$v(t) = 100\cos(wt + 45°)\text{V}$$

donde,

$$V_m = V_{ef}\sqrt{2} = 50\sqrt{2}\sqrt{2} = 100\,\text{V}$$

d) Si el desfase tensión-intensidad en el dipolo *RLC* serie es de 30º, entonces,

$$\text{tg}\,j = \frac{Lw - \dfrac{1}{Cw}}{R} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}30° = \frac{25 - \dfrac{1}{500C}}{25} \quad \Rightarrow \quad C = 189{,}4\text{ì}\text{F}$$

e) Para obtener la intensidad que circula en estas condiciones por el dipolo *RLC*, volvemos a aplicar la Ley de Ohm en forma compleja, conocido ya el desfase del dipolo, hallando previamente el valor de la impedancia del circuito con el condensador. Así, resulta:
Del triángulo de impedancias,

$$Z = \frac{R}{\cos j} = \frac{50\sqrt{3}}{3}\Omega$$
$$\overline{Z} = \frac{50\sqrt{3}}{3}\underline{|30°}\Omega$$

quedando para la expresión compleja de la intensidad,

$$\bar{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{50\sqrt{2}\underline{|45°}}{\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\underline{|30°}} = \sqrt{6}\underline{|15°}\text{A}$$