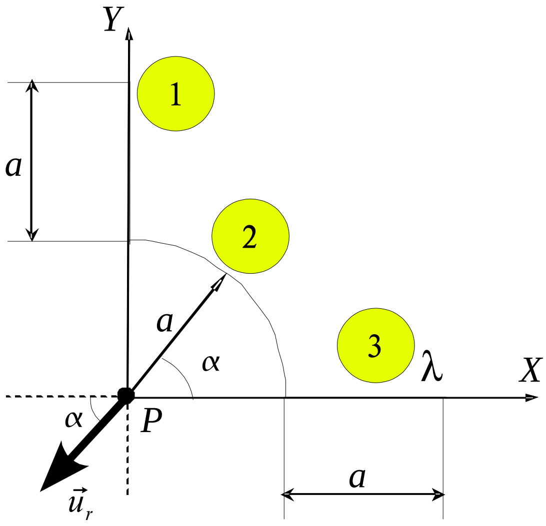
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA EXAMEN DE PROBLEMAS DE F.F.I.	6 de febrero de 2004

1. Sea una distribución lineal de carga uniforme con densidad de carga λ positiva, con la forma indicada en la figura.

a) Determina el campo eléctrico en el punto *P* de la figura.

b) Determina el potencial electrostático en el punto *P*.

c) Calcula la carga total *Q* de la distribución lineal de carga. ¿En qué posición habría que situar otra carga puntual *Q* positiva para que el campo total en el punto *P* sea nulo? Determina el potencial electrostático en el punto *P* en este caso



a) Para calcular el campo eléctrico dividimos la distribución lineal de carga en tres partes, numeradas de 1 a 3 en la figura.

El campo creado por el segmento 1 viene dado por:

$$\vec{E}_1 = E_1(-\vec{j})$$

Dode el módulo del campo es:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^{2a}\frac{\lambda\, dy}{y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{y}\right]_a^{2a} = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{a}\right) = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{-\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}\vec{j}$$

El campo creado por el segmento 3 tiene el mismo módulo que el creado por 1, pero dirección $-\vec{i}$

$$\vec{E}_3 = \frac{-\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}\vec{i}$$

Para el segmento 2:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$$

Siendo

$$r = a$$
$$dq = \lambda\, dl = \lambda\, a\, d\alpha$$
$$\vec{u}_r = (-\cos\alpha\,\vec{i} - sen\,\alpha\,\vec{j})$$

Con lo cual:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\int_0^{\pi/2} d\alpha(-\cos\alpha\,\vec{i} - sen\,\alpha\,\vec{j}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}[-sen\,\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}]_0^{\pi/2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}(-sen\,\pi/2\,\vec{i} + \cos\pi/2\,\vec{j} + sen\,0\,\vec{i} - \cos 0\,\vec{j}) = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}(-2\vec{i} - 2\vec{j})$$

Y el campo total:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}(\vec{j}/2 + \vec{i} + \vec{j} + \vec{i}/2) = \frac{-3\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}(\vec{i} + \vec{j})$$

b)

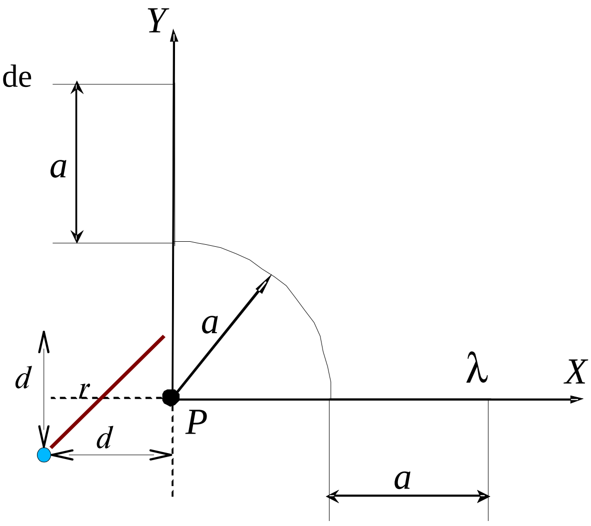
$$V_1 = V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_a^{2a}\frac{dy}{y} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}[\ln y]_a^{2a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln 2$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\int_L dl = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\frac{\pi}{2}a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi}{2}$$

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(\ln 2+\frac{\pi}{2}+\ln 2)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(2\ln 2+\frac{\pi}{2})$$

c)

$$Q=\lambda L=\lambda(a+\frac{\pi}{2}a+a)=\lambda a(2+\frac{\pi}{2})$$



Evidentemente habría que colocar dicha carga en un punto de cordenadas (-*d*,-*d*)

El campo creado por dicha carga puntual será:

$$\vec{E}_Q=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}=\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 d^2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}$$

Para que el campo se anule

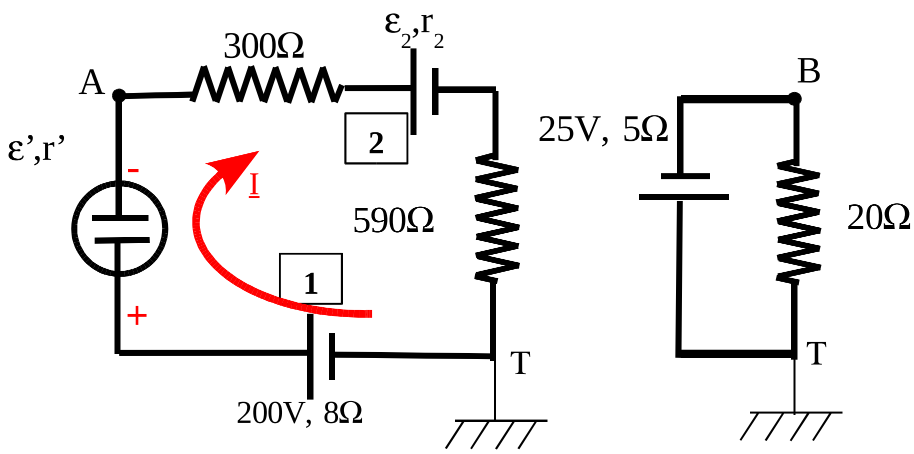
$$\frac{\lambda a(2+\frac{\pi}{2})}{8\pi\epsilon_0 d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\lambda}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\frac{a(2+\frac{\pi}{2})}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{a}$$

$$d^2=\frac{a^2(2+\frac{\pi}{2})}{3\sqrt{2}}$$

$$d=a\sqrt{\frac{(2+\frac{\pi}{2})}{3\sqrt{2}}}$$

2. En el sistema de la figura, conocemos los siguientes datos:
- La pérdidas por efecto Joule en el generador 1 es de 0,08 W.
- El receptor transforma una potencia de 10 W.
- La energía total disipada enforma de calor en el circuito de la izquierda es de 9W
- El generador 2 es ideal (rendimiento unidad) y trabaja como receptor



Determina:
En el circuito de la izquierda:
a) Intensidad que circula por él indicando su sentido.
b) Valores de los parámetros (ε', r') y polaridad del receptor.
c) Valores de los parámetros (ε_2, r_2) del generador 2
Para ambos circuitos:
d) d.d.p. entre el punto A y el punto B (V_A-V_B)

a) La pérdidas por efecto Joule en el generador 1 es de 0,08 W

$$\Rightarrow 8I^2=0{,}08 \Rightarrow I^2=0{,}01 \Rightarrow i=0{,}1\,A$$

b) El receptor transforma una potencia de 10 W

$$\Rightarrow \varepsilon' I=10\,W \Rightarrow \varepsilon=10/0{,}1=100\,V$$

La energía total disipada enforma de calor en el circuito de la izquierda es de 9W

$$\Rightarrow P_J=(590+8+r'+300)*(0{,}1)^2=9$$
$$898+r'=900$$
$$r'=2\,\Omega$$

El generador 2 trabaja como receptor ⇒ el sentido de la intensidad es dextrógiro (sentido de las agujas del reloj), y la polaridad del motor es la indicada en la figura.

c) Conocida la intensidad:

$$I=\frac{\sum \varepsilon}{R}=\frac{200-100-\varepsilon_2}{900}=0{,}1$$
$$100-\varepsilon_2=90 \Rightarrow \varepsilon_2=10\,V$$

El generador 2 es ideal ⇒ $r_2=0$

d) La intensidad en el circuito 2 es:

$$I_2=\frac{\sum \varepsilon}{\sum R}=\frac{25}{25}=1\,A$$

La diferencia de potencial entre el punto B y tierra en el circuito de la derecha es:

$$V_B-V_T=-20I=-20\,V$$

La diferencia de potencial entre el punto A y tierra en el circuito de la izquierda es:

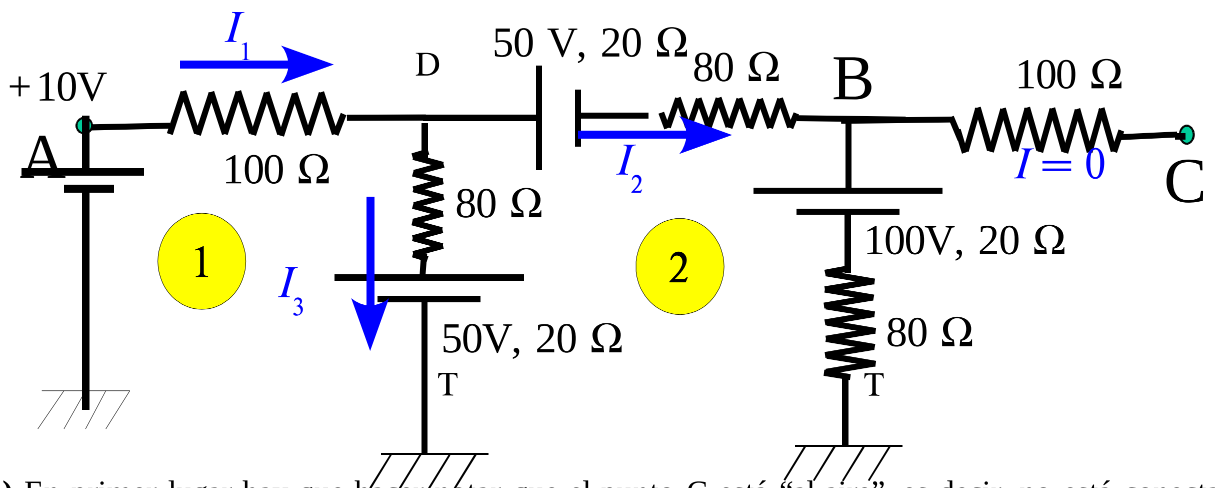
$$V_A-V_T=(300+590)0{,}1+10=99\,V$$

De esta forma la diferencia de potencial entre A y B es:

$$V_A-V_B=(V_A-V_T)-(V_B-V_T)=99+20=119\,V$$

3. Dado el circuito de la figura, determina:

a) Intensidades de rama haciendo uso de las leyes de Kirchhoff.
b) Intensidades de rama haciendo uso del método de la mallas
c) d.d.p entre A y C
d) Thevenin entre C y tierra.
e) Intensidad que circularía por un receptor de f.e.m 10V y resistencia interna de 1 Ω, conectado entre C y tierra. Indica claramente la polaridad del receptor.



a) En primer lugar hay que hacer notar que el punto C está "al aire", es decir, no está conectado a ningún otro punto del circuito, por lo que la intensidad entre B y C es cero, y el potencial en C será el mismo que en B. De esta manera, se observa claramente que el circuito tiene dos mallas.
Aplicando la ley de los nudos al nudo de tierra:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

Calculando la diferencia de potencial entre A y tierra,

$$V_A - V_T = 10 = 100 I_1 + 100 I_3 + 50$$
$$-2 = 5 I_1 + 5 I_3 \qquad (2)$$

Aplicando la ley de las mallas a la malla TDB:

$$0 = 200 I_2 + 50 + 100 - 100 I_3 - 50$$
$$-1 = 2 I_2 - I_3$$
$$I_3 = 2 I_2 + 1 \qquad (3)$$

De esta forma tengo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.
Sustituyendo (1) en (2)

$$(2) \Rightarrow -2 = 5 I_2 + 5 I_3 + 5 I_3 = 5 I_2 + 10 I_3$$

Y sustituyendo ahora I_3 de la ecuación (3)

$$-2 = 5 I_2 + 20 I_2 + 10$$
$$-12 = 25 I_2$$
$$I_2 = \frac{-12}{25} \mathrm{A}$$

Sustituyendo en (3)

$$I_3 = 2 I_2 + 1 = \frac{-24}{25} + 1 = \frac{1}{25} \mathrm{A}$$

Y sustituyendo en (1)

$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{-12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{-11}{25} \mathrm{A}$$

b) Numerando las mallas tal y como indica la figura, y siendo I_1 e I_2 las intensidades de malla:

$$\begin{pmatrix} 10-50 \\ 50-50-100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100+80+20 & -(80+20) \\ -(80+20) & 20+80+20+80+20+80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$20 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de Kramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6-5}{5(6-1)} = \frac{-11}{25} \mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{25} = \frac{-10-2}{25} = \frac{-12}{25} \mathrm{A}$$

La intensidad I_3 viene dada por:

$$I_3 = I_1 - I_2 = \frac{-11}{25} - \frac{-12}{25} = \frac{1}{25} \mathrm{A}$$

c)

$$V_A - V_C = 100 I_1 + 100 I_2 + 50 = \frac{-1100}{25} + \frac{-1200}{25} + 50 = \frac{-1050}{25} = -42\,\mathrm{V}$$

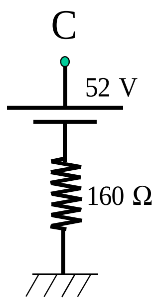
d)

$$\varepsilon_T = V_C - V_T = (V_A - V_T) - (V_A - V_C) = 10 - (-42) = 52\,\mathrm{V}$$

Calculando la resistencia equivalente por el método de las mallas, se añade una malla adicional entre el punto C y tierra, y número esta malla como la número 3. De esta forma, la resistencia equivalente entre C y tierra:

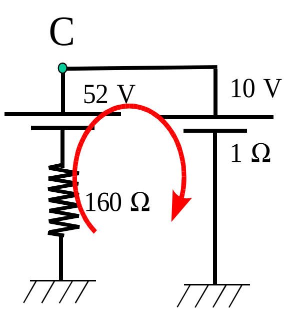
$$R_T = \frac{D}{D_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 200 & -100 & 0 \\ -100 & 300 & -100 \\ 0 & -100 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 300 & -100 \\ -100 & 200 \end{vmatrix}} = 100 \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = 100 \frac{2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{5}$$

$$R_T = 20(2 \cdot 5 - 2) = 20 \cdot 8 = 160\,\Omega$$



De esta forma, el equivalente de Thevenin del circuito es el que se muestra en la figura, con el borne positivo en el punto C.

e) Para que el receptor de 10 V y 1 actúe como tal, hay que colocarlo con el borne positivo en el punto C y el negativo a tierra, tal y como indica la figura. La intensidad será entonces:



$$I = \frac{\sum \epsilon}{\sum R} = \frac{52-10}{160+1} = \frac{42}{161} = 0{,}26\,A$$

en el sentido indicado.