DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA EXAMEN DE PROBLEMAS DE F.F.I.	8 de junio de 2001
APELLIDOS:..	NOMBRE:..

1. Sea una distribución esférica de carga, de radio R, homogénea, con densidad de carga positiva ρ. Calcula:

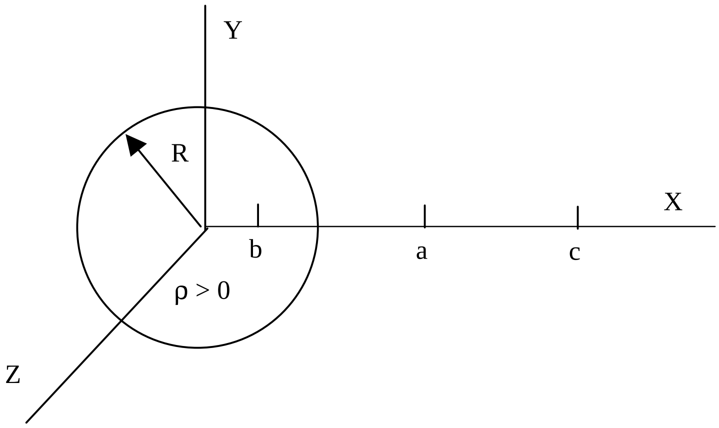
a) Campo eléctrico y potencial en el punto a, de coordenadas (2R,0,0).

Si a continuación colocamos una carga q>0 en el punto c, de coordenadas (3R,0,0), calcula:

b) Campo eléctrico y potencial en el punto a, de coordenadas (2R,0,0).

c) Fuerza ejercida sobre q por la distribución esférica de carga.

d) Campo eléctrico el centro de la esfera.



a) Aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica S centrada en el origen y de radio r,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \frac{q}{e_0} \quad \Rightarrow \quad E4pr^2 = \frac{r\,4pR^3}{3e_0}$$

se obtiene el campo eléctrico a una distancia r del origen

$$\mathbf{E} = \frac{rR^3}{3e_0 r^2}\mathbf{u_r}$$

En el punto a, *r=2R* y el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{rR}{12e_0}\mathbf{i}$$

El potencial eléctrico en el punto a es

$$V = -\int \frac{rR^3}{3e_0 r^2}dr = \frac{rR^3}{3e_0 r} = \frac{rR^2}{6e_0}$$

donde se ha utilizado *V(r®`)=0* y *r=2R*. Utilizando unidades del SI, el campo se medirá en N/C y el potencial en V.

b) Aplicando el principio de superposición, en el punto a se tiene

$$\mathbf{E}(a) = \mathbf{E}_1(a) + \mathbf{E}_2(a) = \frac{rR}{12e_0}\mathbf{i} + \frac{q}{4pe_0R^2}(-\mathbf{i}) = \frac{1}{4e_0}\left(\frac{rR}{3} - \frac{q}{pR^2}\right)\mathbf{i}$$

$$V(a) = V_1(a) + V_2(a) = \frac{rR^2}{6e_0} + \frac{q}{4pe_0R} = \frac{1}{2e_0}\left(\frac{rR^2}{3} + \frac{q}{2pR}\right)$$

c) La fuerza ejercida sobre la carga q en $r=3R$ se calcula a partir del campo

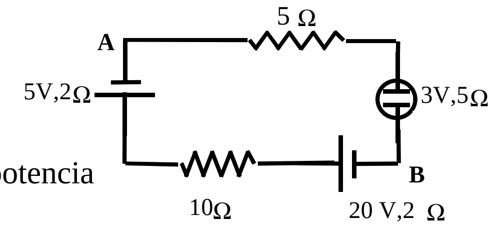
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(3R) = q\frac{rR^3}{3e_0(3R)^2}\mathbf{i} = q\frac{rR}{27e_0}\mathbf{i}$$

y vendrá dada en N usando unidades del SI.

d) En el origen de coordenadas, el campo creado por la distribución esférica de carga es nulo, quedando sólo el campo creado en ese punto por la carga puntual q

$$\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_1(0) + \mathbf{E}_2(0) = 0 + \frac{q}{4pe_0(3R)^2}(-\mathbf{i}) = -\frac{q}{36pe_0R^2}\mathbf{i}$$

2. Calcula, en el circuito de la figura:
a) la intensidad que circula por el circuito (valor y sentido).
b) la diferencia de potencial $V = V_A - V_B$
c) la potencia generada, indicando qué elementos la generan.
d) la potencia disipada o consumida por cada elemento y la potencia total consumida en el circuito.



a) Utilizando la ecuación del circuito: $i = \frac{20-5-3}{24} = 0{,}5$ A en sentido horario.

b) $V_{AB} = \Sigma iR - \Sigma\varepsilon = -0{,}5\cdot 14 - (5-20) = 8$ V

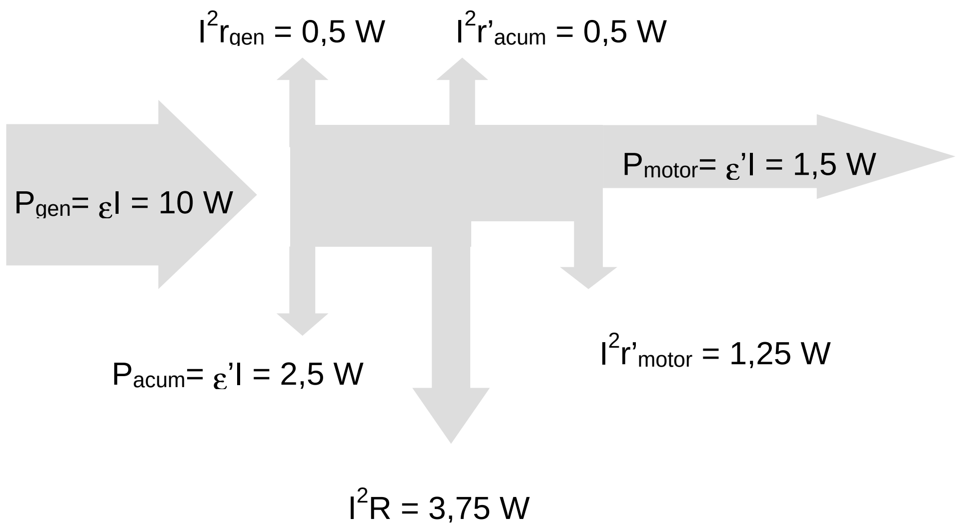
c) la potencia generada es por el elemento de 20 V, y vale:

$$P_{gen} = \varepsilon I = 20\cdot 0{,}5 = 10 \text{ W}$$

d)
Potencia disipada en las resistencias: $P = i^2R = 0{,}25(10+5) =$ 3,75 W
Potencia disipada en la resistencia interna del generador: : $P = i^2r =$ 0,5 W
Potencia disipada en la resistencia interna del acumulador (5 V): $P = i^2r' =$ 0,5 W
Potencia disipada en la resistencia interna del motor (3 V): $P = i^2r' =$ 1,25 W
Potencia acumulada (5 V): $P = \varepsilon' I =$ 2,5 W
Potencia transformada en el motor (3 V): $P = \varepsilon' I =$ 1,5 W

Total: **10 W**

El siguiente esquema proporciona un balance de potencias:

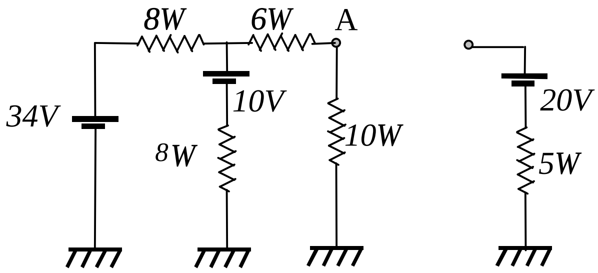


3. En el circuito de la figura, calcula:

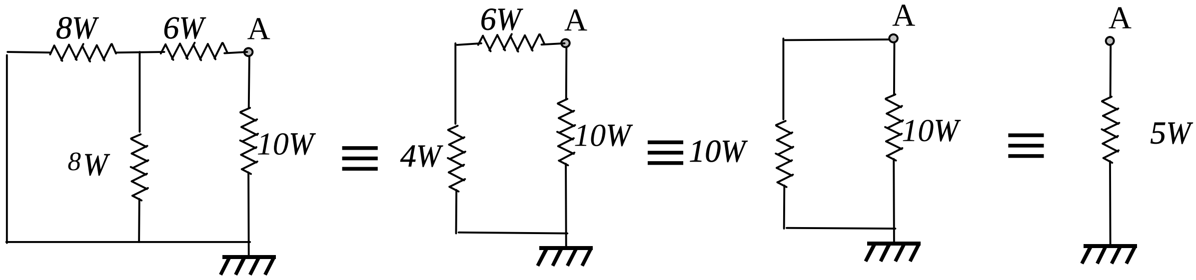
a) la resistencia equivalente del circuito entre los puntos **A** y tierra.

b) la tensión en el punto **A** y el equivalente Thevenin del circuito entre los puntos **A** y tierra.

c) La intensidad que circularía por la rama del generador de *20V* si se conectara al punto **A.**

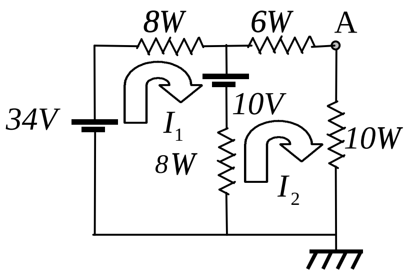


a)



$R_{eq} = 5\Omega$

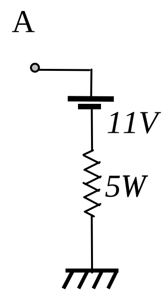
b)



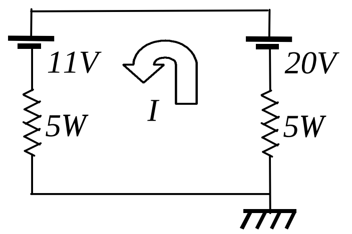
$$\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow I_2 = 1'1\ A$$

$$V_A = V_A - V_{Tierra} = I_2 \cdot 10 = 11 V$$

Generador equivalente de Thevenin=

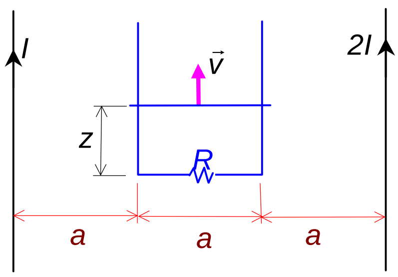


c)



$$I = \frac{20 - 11}{10} = 0'9\ A$$

4. La espira rectangular de la figura, de lados *a* y *z*, se encuentra en el mismo plano que dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos, situados a una distancia *a*, por los cuales circulan intensidades *I* y 2*I* en el mismo sentido. El lado superior de la espira se mueve con velocidad constante *v* en el sentido indicado en la figura. Determina en función de *z* (medida del lado de longitud variable):



a) Flujo del campo magnético $\vec{B}_1$ creado por el hilo de intensidad *I* a través de la espira.

b) Flujo del campo magnético $\vec{B}_2$ creado por el hilo de intensidad 2*I* a través de la espira.

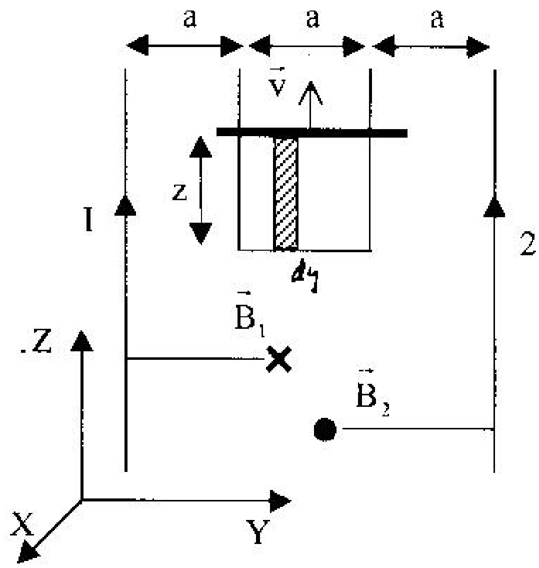
c) Flujo magnético total.

d) Fuerza electromotriz inducida en la espira.

e) Intensidad de corriente en la espira, indicando su sentido, si la resistencia eléctrica es *R*.

f) Fuerza magnética sobre el lado móvil de la espira.

Problema 4.-



En primer lugar situamos los ejes coordenados tal como se muestra en la figura.
De esta forma en campo magnético creado por el conductor de la izquierda es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\left(-\vec{i}\right)$$

y el creado por el conductor de la derecha:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2I}{y}\vec{i} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{y}\vec{i}$$

donde, en ambos casos, y es la distancia del punto considerado al conductor.

a) Dado que ambos campos magnéticos son función de la coordenada y, para el cálculo del flujo, definimos un diferencial de superficie, como un rectángulo de anchura dy y altura z (ver dibujo). El sentido del vector $d\vec{s}$ definirá el signo positivo del flujo: adoptamos como vector de superficie:

$$d\vec{s} = z\,dy\,\vec{i}$$

luego el flujo creado por el conductor de la izquierda:

$$\phi_1 = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \int_a^{2a} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\left(-\vec{i}\right)\cdot z\,dy\,\vec{i} = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\left(\ln(2a) - \ln a\right) = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\ln\left(\frac{2a}{a}\right)$$

luego:

$$\phi = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\ln 2$$

b) De forma análoga, el flujo creado por el conductor de la derecha

$$\phi_2 = \int_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \int_a^{2a} \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{y}\vec{i}\cdot z\,dy\,\vec{i} = \frac{\mu_0 I z}{\pi}\int_a^{2a}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I z}{\pi}\left(\ln(2a) - \ln a\right) = \frac{\mu_0 I z}{\pi}\ln\left(\frac{2a}{a}\right) = \frac{\mu_0 I z}{\pi}\ln 2$$

c) El flujo total será la suma de ambos flujos, cada uno con su signo correspondiente:

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\ln 2 + \frac{\mu_0 I z}{\pi}\ln 2 = \frac{\mu_0 I z}{2\pi}\ln 2$$

siendo positivo el flujo creado por campos magnéticos con la componente en el eje X positiva.

d) La fuerza electromotriz inducida vendrá dada por la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_T}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I z}{2\pi}\ln 2\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{dz}{dt}\ln 2 = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln 2$$

e) Para el cálculo de la intensidad inducida, tomamos el valor absoluto de la f.e.m., sustituyendo el signo negativo por la aplicación de la ley de Lenz:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R}\ln 2$$

Dado que la superficie aumenta, el flujo tiende a aumentar, luego la intensidad inducida debe crear un campo magnético que se oponga a este incremento, lo que implica que debe llevar el sentido $\left(-\vec{i}\right)$. Luego la intensidad inducida lleva sentido horario en la figura.

f) Para el cálculo de la fuerza magnética ejercida sobre el conductor en movimiento, aplicaremos superposición a la acción de cada uno de los campos magnéticos, calculadas por separado.

En el cálculo hemos de tener en cuenta que el vector $\vec{dl}$ lleva el sentido de la intensidad inducida i y por lo tanto es el vector: $\vec{dl} = dy\,\vec{j}$

Acción ejercida por el conductor de la izquierda:

$$\vec{F}_1 = i\int_L d\vec{l} \times \vec{B}_1 = i\int_a^{da} dy\,\vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\left(-\vec{i}\right) = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dy}{y}\,\vec{k} = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\pi}\ln 2\,\vec{k}$$

Acción ejercida por el conductor de la derecha:

$$\vec{F}_2 = i\int_I d\vec{l} \times \vec{B}_2 = i\int_a^{da} dy\,\vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{\pi y}\left(\vec{i}\right) = \frac{\mu_0\, I\, i}{\pi}\int_a^{2a}\frac{dy}{y}\left(-\vec{k}\right) = \frac{\mu_0\, I\, i}{\pi}\ln 2\left(-\vec{k}\right)$$

La acción conjunta de ambos conductores:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\pi}\ln 2\,\vec{k} - \frac{\mu_0\, I\, i}{\pi}\ln 2\,\vec{k} = -\frac{\mu_0\, I\, i}{2\pi}\ln 2\,\vec{k}$$

donde sustituyendo i por su valor, calculado en el apartado anterior:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left(\frac{\mu_0\, Iv}{2\pi R}\ln 2\right)\ln 2\,\vec{k} = \left(\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\ln 2\right)^2\frac{v}{R}\,\vec{k}$$

Lo que nos da una acción que se opone al movimiento de la barra conductora y que, por lo tanto, está de acuerdo con la ley de Lenz.