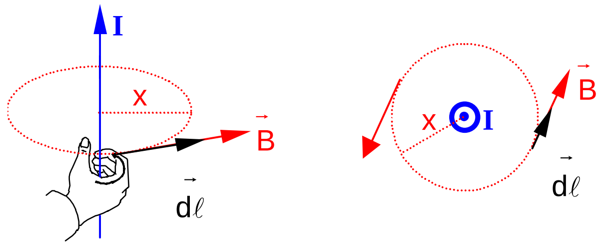
FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA
TERCER EJERCICIO GRUPO 1PV
22 de Mayo de 2002

Cuestiones

1. a) Enuncia el teorema de Ampère.
b) Aplica el teorema de Ampère para calcular el campo magnético creado por un conductor rectilíneo indefinido, en un punto situado a una distancia *x* del mismo.

a) La circulación del vector campo magnético a lo largo de una curva cerrada que rodea a un conductor por el que circula una corriente de intensidad *I*, es igual al producto de la constante μ_o (permeabilidad magnética del vacío) por la intensidad que penetra en el área limitada por la curva.

b) Para aplicar el teorema de Ampère, elegimos una curva cerrada que nos permita calcular fácilmente la circulación. Esta va a ser una circunferencia de radio *x*, ya que es una curva en la que el campo magnético es en todo momento paralelo a la longitud, y



por otra parte en todos los puntos de la circunferencia el campo magnético es el mismo. De este modo la circulación a lo largo de la circunferencia es:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B2\pi x = \mu_0 I$$

y despejando obtenemos:

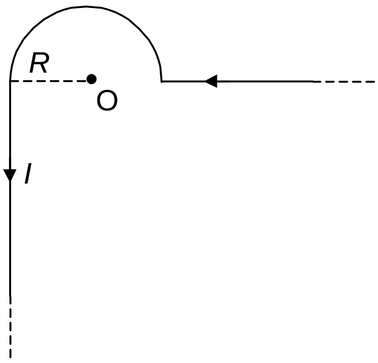
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

2. En cierta región del espacio existe un campo magnético variable con el tiempo en la forma $\vec{\mathbf{B}} = 6t^2\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}$ T. Calcula el flujo que atraviesa una espira cuadrada de 3 cm de lado situada en el plano XY, y la fuerza electromotriz inducida en ella.

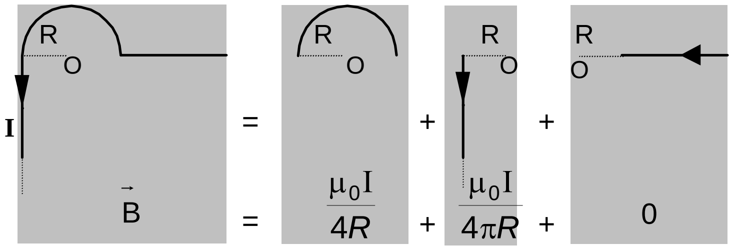
El flujo a través de la espira es: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = (6t^2\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}) \cdot 9 \cdot 10^{-4}\vec{\mathbf{k}} = 27t \cdot 10^{-4}$ Wb, y como depende del tiempo, el valor absoluto de la fuerza electromotriz valdrá:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = 2{,}7 \text{ mV}$$

3. Un conductor, de longitud indefinida, se curva con la forma de la figura. Sabiendo que por el hilo circula una intensidad *I*, calcula y dibuja el campo magnético en el punto *O*, centro de la parte semicircular.



Descomponiendo el conductor en tres tramos, sumaremos los efectos de cada uno de ellos: un conductor rectilíneo e infinito por un solo extremo, un conductor semicircular y un conductor con la dirección del punto problema igual al de la corriente (cero).



$$B = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

4. Un circuito tiene una resistencia de 10 Ω, una bobina de 40 mH y un condensador de 50 μF conectados en serie. Si la tensión en los extremos de la resistencia es de 2 cos (500*t* - 30º) V, halla la expresión instantánea de la intensidad, la caída de tensión en el resto de los elementos y la caída de tensión total. Representa las magnitudes en un diagrama fasorial.

Comenzamos hallando las reactancias:

$X_L = L\omega = 40{\cdot}500\ \text{m}\Omega = 20\ \Omega$ $\qquad\qquad$ $X_C = 1/C\omega = 10^6/(50{\cdot}500) = 40\ \Omega$

La intensidad máxima que circula por los tres elementos es:
$i_m = V_{Rm}/R = 2/10 = 0{,}2$ A, que está en fase con V_R por lo que:

$$i = 0{,}2 \cos(500t - 30^o)\ \text{A}$$

La tensión máxima en la bobina es $V_{Lm} = i_m{\cdot}X_L = 0{,}2{\cdot}20 = 4$ V, por lo que su expresión instantánea es:

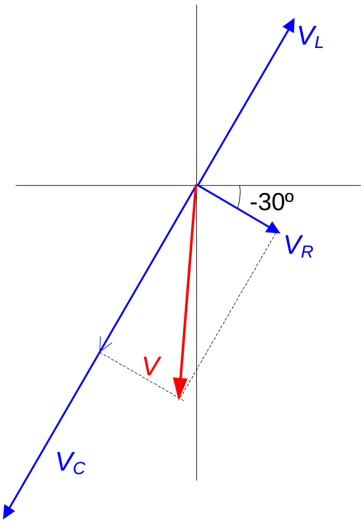
$$V_L = 4 \cos(500t + 60^o)\ \text{V}$$

ya que la tensión en la bobina va 90º adelantada respecto de la intensidad.

La tensión máxima en el condensador es $V_{Cm} = i_m \cdot X_C = 0{,}2 \cdot 40 = 8$ V, por lo que su expresión instantánea es:

$$V_C = 8 \cos(500t - 120^o) \text{ V}$$

ya que la tensión en el condensador va 90º retrasada respecto de la intensidad.
Finalmente la tensión en los extremos de la asociación es:



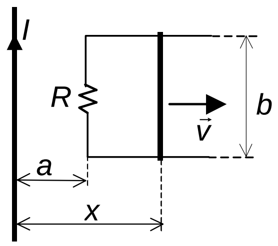
$$V_m = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2} = \sqrt{4 + 16} = 4{,}47 \text{ V}$$

Con una fase respecto de V_R de $\arctan \dfrac{V_{Lm} - V_{Cm}}{V_{Rm}} = \arctan(-2) = -63{,}4^o$, por lo que su expresión temporal será:

$$V = 4{,}47 \cos(500t - 93{,}4^o) \text{ V}$$

Problema

Por el conductor rectilíneo de la figura, de longitud infinita, circula una intensidad de corriente I en el sentido indicado. En el mismo plano, y en la posición mostrada, hay una espira de resistencia R, uno de los lados de la misma se mueve con una velocidad constante v en el sentido indicado. Calcula:



a) El flujo magnético que atraviesa la espira, en función de x, a causa de la corriente I.
b) La fuerza electromotriz inducida en esta espira.
c) La intensidad inducida en la espira, indicando su sentido.
d) La fuerza que actúa sobre el lado móvil de la espira.

a) El flujo magnético en la espira debido al campo magnético del conductor es igual a,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{(Wb)}$$

b) El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida es igual a la derivada del flujo respecto del tiempo:

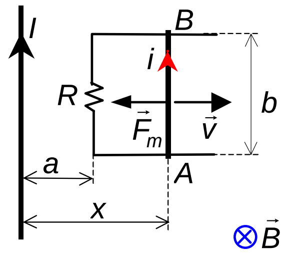
$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi x} \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi x} v \quad \text{(V)}$$

c) Dividiendo la fuerza electromotriz inducida por la resistencia, obtenemos la intensidad inducida,

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi x R} v \quad \text{(A)}$$

cuyo sentido es antihorario.

d) Puesto que el campo magnético es uniforme a lo largo del lado AB, la fuerza magnética que actúa sobre dicho lado viene dada por,



$$\vec{F}_m = i\left(\vec{b} \times \vec{B}\right)$$

donde i es la intensidad que circula por el lado móvil, $\vec{b}$ es un vector de longitud b, cuya dirección está definida por el segmento $\overline{AB}$, y cuyo sentido está definido por el sentido de la intensidad i, y $\vec{B}$ es el campo magnético producido por el conductor indefinido.

Observa que el producto vectorial $\vec{b} \times \vec{B}$ tiene dirección y sentido contrario al vector $\vec{v}$, es decir, definiendo el vector $\vec{u}_v$ como un vector unitario en la dirección de la velocidad,

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

podemos escribir,

$$\vec{b} \times \vec{B} = \left|\vec{b}\right| \left|\vec{B}\right| \left(-\vec{u}_v\right)$$

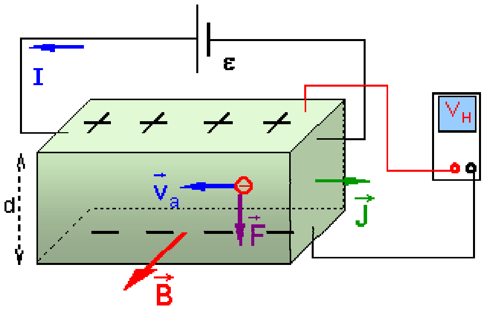
con lo cual obtenemos para la fuerza,

$$\vec{F}_m = i\left(\vec{b} \times \vec{B}\right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi x R} v b \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(-\vec{u}_v\right) = -\left(\frac{\mu_0 I b}{2\pi x}\right)^2 \frac{v}{R} \vec{u}_v \quad \text{(N)}$$

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA
TERCER EJERCICIO GRUPO 1PV
22 de Mayo de 2002

Cuestiones

1. Describe el efecto Hall y deduce la expresión de la tensión Hall.



En un conductor por el que circula una corriente, en presencia de un campo magnético perpendicular al movimiento de las cargas, aparece una separación de cargas que da lugar a un campo eléctrico en el interior del conductor perpendicular al movimiento de las cargas y al campo magnético aplicado.

La fuerza magnética que actúa sobre las cargas es $\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B})$ que provoca una separación de las cargas y por lo tanto a un campo eléctrico. De este modo igualando ambas fuerzas obtenemos $q(\vec{v} \times \vec{B}) = -q\vec{E}$, y el campo eléctrico de Hall y la diferencia de potencial de Hall:

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B} \qquad V_H = E_H d = vBd$$

2. En cierta región del espacio existe un campo magnético representado por el vector $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}04\vec{\mathbf{k}}$ T y una espira de superficie fija pero que gira en el espacio de acuerdo con la expresión $\vec{\mathbf{S}} = 10\cos 100t\vec{\mathbf{j}} + 10\,\mathrm{sen}\,100t\vec{\mathbf{k}}$ m^2. Calcula el flujo que atraviesa la espira y la fuerza electromotriz inducida en ella.

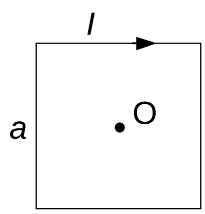
El flujo a través de la espira vale:

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = 0{,}04\vec{\mathbf{k}}\cdot(10\cos 100t\vec{\mathbf{j}} + 10\,\mathrm{sen}\,100t\vec{\mathbf{k}}) = 0{,}4\,\mathrm{sen}\,100t \text{ Wb},$$

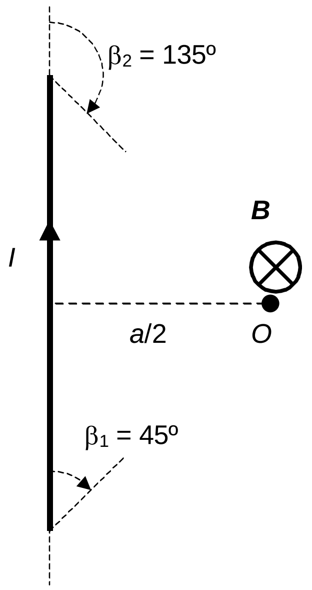
y como depende del tiempo, el valor absoluto de la fuerza electromotriz valdrá:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = 40\cos 100t \text{ V}$$

3. Calcula y dibuja el campo magnético creado por una espira cuadrada de lado *a*, en su centro, siendo *I* la intensidad que circula por ella.



El campo magnético en O es cuatro veces el producido por un segmento de longitud a a una distancia $a/2$ del conductor. Los ángulos que forma la dirección de la corriente con la dirección del vector de posición del punto problema son 45º y 135º respectivamente.



$$B = 4\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) = 4\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}}(\cos 135º - \cos 45º)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi \frac{a}{2}}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

La dirección del campo magnético es perpendicular al plano del papel y el sentido lo obtenemos con la regla de la mano derecha, siendo éste entrante.

4. Un circuito tiene una resistencia de 50 Ω, una bobina de 50 mH y un condensador de 50 μF conectados en serie. Si la tensión en los extremos de la bobina es de 2 cos (400t + 30º) V, halla la expresión instantánea de la intensidad, la caída de tensión en el resto de los elementos y la caída de tensión total. Representa las magnitudes en un diagrama fasorial.

Comenzamos hallando las reactancias:

$X_L = L\omega = 50\cdot 400 \text{ m}\Omega = 20\ \Omega$ $\quad\quad$ $X_C = 1/C\omega = 10^6/(50\cdot 400) = 50\ \Omega$

La intensidad máxima que circula por los tres elementos es:
$i_m = V_{Lm}/X_L = 2/20 = 0{,}1$ A, que está retrasada 90º respecto de V_L por lo que:

$$i = 0{,}1 \cos(400t - 60º) \text{ A}$$

La tensión máxima en la resistencia es $V_{Rm} = i_m\cdot R = 0{,}1\cdot 50 = 5$ V, por lo que su expresión instantánea es:

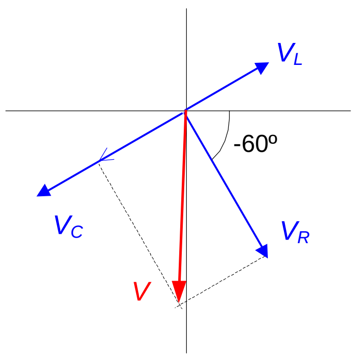
$$V_R = 5 \cos(400t - 60º)$$

ya que la tensión en la resistencia está en fase respecto de la intensidad.

La tensión máxima en el condensador es $V_{Cm} = i_m\cdot X_C = 0{,}1\cdot 50 = 5$ V, por lo que su expresión instantánea es:

$$V_C = 5 \cos(400t - 150º) \text{ V}$$

ya que la tensión en el condensador va 90º retrasada respecto de la intensidad.
Finalmente la tensión en los extremos de la asociación es:



$$V = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2} = \sqrt{25 + 9} = 5{,}83 \text{ V}$$

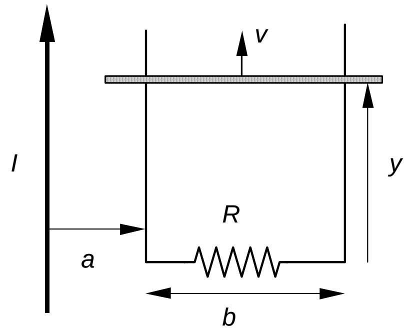
Con una fase respecto de V_R de $\arctan \dfrac{V_{Lm} - V_{Cm}}{V_{Rm}} = \arctan(-0{,}6) = -31^{\circ}$, por lo que su expresión temporal será:

$$V = 5{,}83 \cos(400t - 91^{\circ}) \text{ V}$$

Problema

Sea un conductor rectilíneo de longitud indefinida por el que circula una corriente ***I***, y un circuito de resistencia ***R*** por el que se desliza una barra conductora con velocidad constante ***v***. Calcula:

a) Flujo magnético que atraviesa el circuito, en función de ***y***.
b) Fuerza electromotriz inducida en el circuito.
c) Intensidad inducida en el circuito, indicando su sentido.
d) Fuerza que actúa sobre la barra conductora (módulo, dirección y sentido).



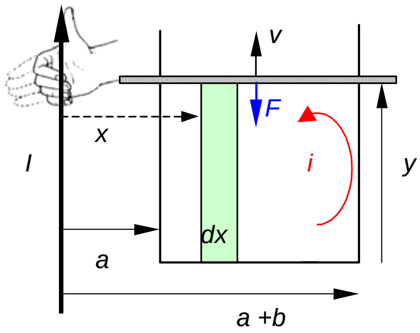
a) El campo magnético creado por el conductor tendrá dirección normal al plano del dibujo, y sentido entrante tal y como indica la regla de la mano derecha. El módulo vendrá dado por,

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}$$

siendo x la distancia al conductor.
Al calcular el flujo deberemos tomar una superficie elemental en la que el campo sea uniforme: una superficie rectangular de altura y y amplitud dx en la que el valor de B es constante, y que podremos desplazar sobre la espira desde una distancia a del conductor hasta una distancia a+b. De este modo, el elemento de superficie viene dado por $dS = ydx$. La dirección y el sentido del vector superficie elemental coinciden con el del campo, con lo cual,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \quad \text{(Wb)}$$

b) La fuerza electromotriz inducida la calculamos utilizando la ley de Faraday. Primero aplicamos la regla de Lenz para obtener el sentido de la corriente inducida: al mover el lado superior y aumenta, y el flujo, que es proporcional a y, aumentará también. La corriente se opondrá a esta variación creando con la espira un campo en sentido contrario al del conductor. Aplicando la regla de la mano derecha a la espira, el sentido de la corriente inducida es antihorario, como se indica en el dibujo.



Teniendo en cuenta que la única variable que depende del tiempo es y, el valor absoluto de la fuerza electromotriz será:

$$\left|\varepsilon_i\right| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{a}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{a}\right) \quad \text{(V)}$$

y por tanto la intensidad de corriente inducida será igual a,

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi R}\ln\left(\frac{b+a}{a}\right) \quad \text{(A)}$$

c) Por último, la fuerza sobre el lado que se desplaza la calcularemos a partir de la expresión general, ya que el campo no es uniforme

$$\vec{F} = i\int_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

Hemos de tener en cuenta que la intensidad que aparece en esta expresión es la intensidad que circula por el lado móvil, mientras que la que produce el campo es la que circula por el conductor rectilíneo. Por otro lado, el conductor y el campo son normales, con lo que el módulo del producto vectorial será el producto de los módulos, y, conocido ya el sentido de la intensidad de corriente inducida, el producto vectorial dará el sentido a las fuerzas indicada en el dibujo, es decir, frenando el movimiento del lado móvil, de acuerdo a la regla de Lenz. Por último, los límites del conductor están situados a distancias *a* y *b*+*a* del conductor, que serán los límites de integración. Con todo ello, el módulo de la fuerza es:

$$F = i\int_C B dx = i\int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{dx}{x} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\right)^2 \frac{v}{R} \quad \text{(N)}$$