

DEPARTAMENT DE FÍSICA APLICADA FI
FFI. EXAMEN DE QÜESTIONS (final)

25 juny 2003

Cognoms:
APELLIDOS:

Nom:
NOMBRE:

1.- Completa la taula següent (Completa la tabla siguiente):

	Caràcter (escalar o vectorial) Carácter (escalar o vectorial)	Dimensions Dimensiones	Unitats SI Unidades SI
Càrrega elèctrica Carga eléctrica	escalar	IT	C
Camp elèctric Campo eléctrico	vectorial	$MLT^{-3}I^{-1}$	N/C ó V/m
Potència Joule Potencia Joule	escalar	ML^2T^{-3}	W
Resistivitat elèctrica Resistividad eléctrica	escalar	$ML^3T^{-3}I^{-2}$	Ωm

2.- Què és un camp vectorial conservatiu? Quines condicions ha de complir una funció vectorial de punt \vec{F} per ser conservativa? Comprova si $\vec{F} = 2y^2\vec{i} + 4xy\vec{j}$ es conservativa.

¿Qué es un campo vectorial conservativo? ¿Qué condiciones debe cumplir una función vectorial de punto \vec{F} para ser conservativa? Comproba si $\vec{F} = 2y^2\vec{i} + 4xy\vec{j}$ es conservativa.

Un campo vectorial F es conservativo si deriva de un potencial, es decir, si F se puede escribir como el gradiente de una función escalar de punto. En ese caso, la circulación del campo F a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es nula.

Si se cumple que las derivadas parciales cruzadas se igualan, es decir

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

entonces el campo $F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ es conservativo.

En este caso

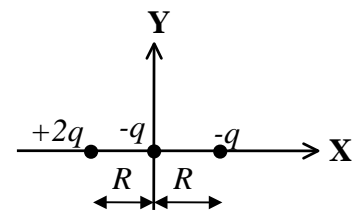
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4y$$

luego dicho campo sí es conservativo.

3.- Donades tres càrregues puntuals una positiva $+2q$, q i l'altra negativa $-q$, situades com s'assenyala en la figura, determina el flux de camp elèctric a través de les següents superfícies esfèriques:

- Superfície esfèrica amb radi $3R/2$ centrada en $(-R, 0)$.
- Superfície esfèrica amb radi $R/2$ centrada en $(R, 0)$.
- Superfície esfèrica amb radi $3R$ centrada en $(0, 0)$.

Justifica la resposta.



Dadas tres cargas puntuales una positiva $+2q$, q y otra negativa $-q$, situadas como se muestra la figura, determina el flujo de campo eléctrico a través de las siguientes superficies esféricas:

- Superficie esférica de radio $3R/2$ centrada en $(-R, 0)$.
- Superficie esférica de radio $R/2$ centrada en $(R, 0)$.
- Superficie esférica de radio $3R$ centrada en $(0, 0)$.

Justifica la respuesta.

Aplicando el teorema de Gauss, el flujo del campo eléctrico que atraviesa a una superficie cerrada depende de la carga encerrada en dicha superficie

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las cargas que quedan encerradas en cada una de las superficies esféricas descritas, se tiene

$$\Phi_a = \frac{q}{\epsilon_0} ; \quad \Phi_b = \frac{q}{\epsilon_0} ; \quad \Phi_c = \frac{2q}{\epsilon_0}$$

(Nota: Se ha tenido en cuenta la corrección del signo de la carga situada más a la derecha)

4.- Donats dos condensadors, C_1 i C_2 de capacitat C , es connecten com s'indica en la figura.

- Calcula la capacitat equivalent.
- Calcula la càrrega de cada condensador i del conjunt si es connecta a una diferència de potencial V .

Una vegada aïllat el conjunt, es redueix la distància entre les armadures del primer condensador a la meitat, i s'introdueix un dielèctric de permitivitat relativa $\epsilon_r=2$ en el segon condensador.

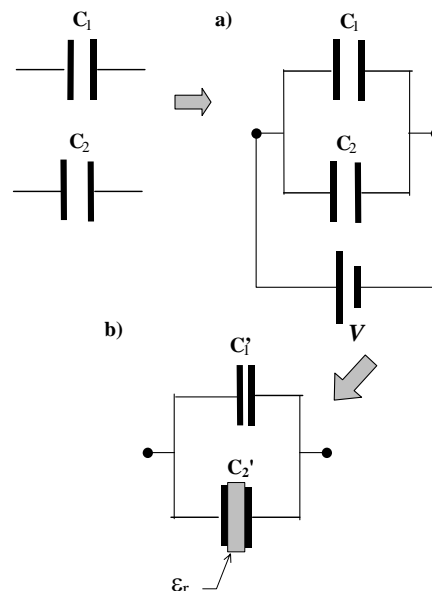
- Calcula la nova capacitat equivalent.
- Calcula la càrrega de cada condensador i la del conjunt.

Dados dos condensadores, C_1 y C_2 de capacidad C , se conectan como se indica en la figura.

- Calcula la capacidad equivalente.
- Calcula la carga de cada condensador y del conjunto si se conecta a una diferencia de potencial V .

Una vez aislado el conjunto, se reduce la distancia entre las armaduras del primer condensador a la mitad, y se introduce un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r=2$ en el segundo condensador.

- Calcula la nueva capacidad equivalente.
- Calcula la carga de cada condensador y la del conjunto.



- La capacidad equivalente de la asociación en paralelo es $C_{eq} = C_1 + C_2 = 2C$
- Las cargas $Q_1 = CV$; $Q_2 = CV$; $Q_t = 2CV$
- Suponiendo que se trata de condensadores plano-paralelos, la capacidad depende de la distancia d entre las armaduras y de la permitividad del medio entre ellas como

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

y por lo tanto las nuevas capacidades son $C'_1 = 2C$; $C'_2 = 2C$; $C'_t = 4C$

- La carga total no ha variado por ser el sistema aislado (conservación de la carga), la nueva tensión entre las armaduras de cada condensador es

$$V' = \frac{Q_t}{4C} = V/2$$

luego la carga de cada condensador es $Q'_1 = Q'_2 = CV$

5.- Per un conductor de 1 m de longitud, 1 mm^2 de secció i una resistència de 5Ω , circula un corrent de 500 mA.

- Quina és la ddp entre els extrems del conductor?
- Quin és el valor del camp elèctric en aquest conductor?
- Quin valor tenen la densitat de corrent i la conductivitat?
- Quina potència dissipa per efecte Joule?

(Heu d'expressar totes les quantitats amb les seues unitats en el SI)

Por un conductor de 1 m de longitud, 1 mm^2 de sección y una resistencia de 5Ω , circula una corriente de 500 mA.

- ¿Cuál es la ddp entre los extremos del conductor?
- ¿Cuál es el valor del campo eléctrico en este conductor?
- ¿Qué valor tienen la densidad de corriente y la conductividad?
- ¿Qué potencia disipa por efecto Joule?

(Se debe expresar todas las cantidades con sus unidades en el SI)

- $V = IR = 2.5 \text{ V}$
- Si el campo eléctrico es uniforme en el conductor

$$E = \frac{dV}{dl} = \frac{\Delta V}{\Delta l} = 2.5 \text{ V/m}$$

en el sentido del potencial decreciente.

- La densidad de corriente y la conductividad son

$$J = \frac{I}{S} = 5 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2 \quad ; \quad \sigma = \frac{J}{E} = 2 \cdot 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

- La potencia disipada es $p = I^2 R = 1.25 \text{ W}$

6.- Determina la concentración de electrones y huecos en silicio a 300 K, dopado con impurezas aceptoras con una concentración de $2,5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$. La concentración intrínseca del silicio a 300 K es $1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.

Un material semiconductor homogéneo y en equilibrio debe cumplir en todos los puntos de su interior la ley de acción de masas y la ley de neutralidad eléctrica:

$$\left. \begin{aligned} n \cdot p &= n_i^2 \\ n + N_A &= p + N_D \end{aligned} \right\}$$

Dado que en este caso no existen impurezas donadoras y que la cantidad de impurezas aceptoras es muy superior a la concentración intrínseca, podemos aproximar el valor de la concentración de huecos al de la concentración de impurezas aceptoras, luego la ley de neutralidad eléctrica quedaría:

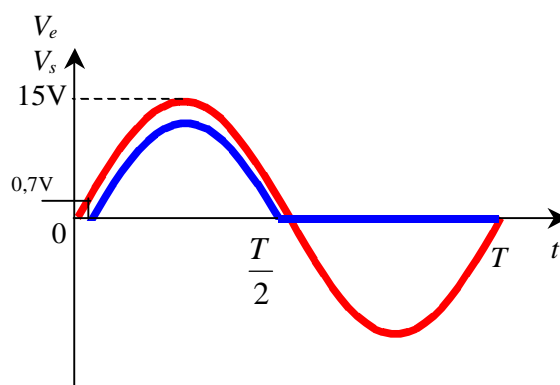
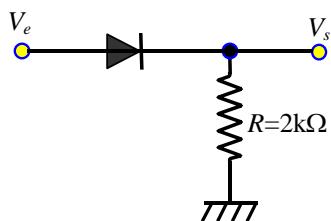
$$p \approx N_A = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

Sustituyendo este valor en la ley de acción de masas:

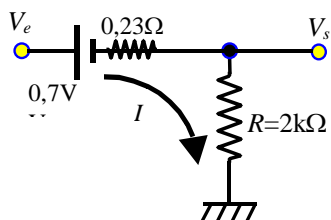
$$n = \frac{n_i^2}{p} \approx \frac{(1,5 \cdot 10^{16})^2}{2,5 \cdot 10^{22}} \approx 8,6 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$$

7.- Dado el circuito de la figura, calcula la tensión de salida, V_s , para la tensión de entrada, V_e , indicada en la figura.

Determina el valor máximo de la intensidad que circula por la resistencia. El diodo es de silicio, con una tensión umbral de 0,7 V y una resistencia interna de $0,23 \Omega$.



Cuando la tensión de entrada es inferior a la tensión umbral del diodo ($V_e < V_u = 0,7\text{V}$), el diodo se comporta como un circuito abierto, siendo nulas la intensidad y la tensión de salida (V_s). Si la tensión de entrada es mayor a 0,7V, el diodo se comporta como una f.e.m y una resistencia puestas en serie, tal como se indica en la figura:



La intensidad que circula es:

$$I = \frac{V_e - 0,7}{2000 + 0,23};$$

cuando V_e es máxima (15V), la intensidad será máxima y valdrá, $I_{\text{máx}} \approx 7,15 \text{ mA}$

La tensión de salida será: $V_s = V_e - 0,7 - 0,23 \cdot I \approx V_e - 0,7 \text{ (V)}$

En la figura, junto a la tensión de entrada se ha representado la tensión de salida.

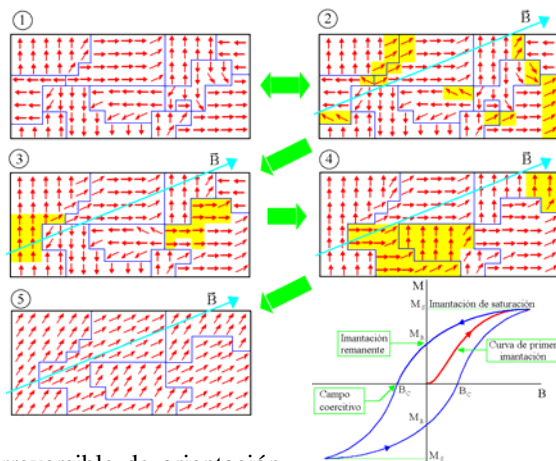
8.- Describe el ciclo de histéresis de un material ferromagnético, mediante el modelo de los dominios magnéticos.

Los átomos de un material ferromagnético forman una estructura cristalina ordenada en la que existe una acción magnética muy fuerte de la red cristalina sobre cada átomo del cristal. Como consecuencia de ello la dirección de los momentos dipolares de los átomos no es aleatoria sino que debe seguir unas *direcciones preferentes de imantación*.

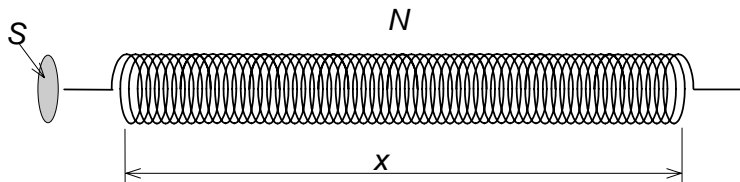
En un material virgen, que no ha sufrido ninguna acción magnética, estos dipolos se orientan por grupos y según las direcciones principales, formando una estructura de celdas, llamadas dominios, tal como se muestra en la figura (1). Si aplicamos progresivamente un campo magnético externo, observamos que a valores pequeños de \vec{B} , solo los momentos dipolares de las fronteras entre dominios sufren alguna variación de carácter reversible (2), debido a la presencia en sus proximidades de momentos de diferente orientación que facilita su posición fuera de las direcciones principales.

Al incrementar el valor de \vec{B} , algunos dominios cambian de manera irreversible de orientación incrementándose el tamaño de los dominios cuyas direcciones de orientación preferente están favorecidas por B (3). De esta forma llegaríamos al punto en el que todos los dominios están orientados en direcciones principales favorecidas por la acción del campo exterior (4). Si se aumenta el valor de \vec{B} , se forzará la orientación de los dipolos fuera de las direcciones principales hasta llegar a la *saturación* , donde todos los dipolos están orientados en la dirección del campo magnético aplicado (5)

Al eliminar el campo magnético incidente, los momentos magnético volverán a sus direcciones principales de imantación, pero permanecerá la estructura de dominios que teníamos en 4. Por lo tanto la imantación del material permanece en ausencia del campo externo, *imantación remanente* , y solo será nula cuando apliquemos un campo magnético opuesto al anterior, *campo coercitivo* , que invierta la orientación de algunos dominios. Si seguimos aumentando $-\vec{B}$ llegaremos de nuevo a la saturación. Al disminuir $-\vec{B}$ e invertir su sentido nos aproximaremos de nuevo a la saturación obtenida en la fig 5.4 desde valores de la imantación menores. Al llegar a la saturación habremos descrito *el ciclo de histéresis* mostrado en la figura 6.



9. Determina la expresión del coeficiente de autoinducción del solenoide de la figura, suponiendo que es muy largo comparado con su radio, que el número de espiras N es grande, y conociendo que al circular por él una corriente I la expresión del campo magnético en su interior es: $B = \mu_0 NI/x$. Aplícalo al caso concreto de un solenoide de 500 espiras de 5 cm de radio, y una longitud de 50 cm.



El coeficiente de autoinducción L del solenoide viene determinado por la relación entre el flujo magnético Φ que lo atraviesa y la intensidad de corriente I que por él circula y crea el campo magnético B , luego

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{x} = 5mH$$

10.- En un circuito RL en serie, con $R = 5 \Omega$ y $L = 0,06 H$, la tensión entre los bornes de la bobina es $u_L = 15\cos 200t V$. Calcula:

- a) La intensidad de corriente.
- b) El ángulo de desfase y el módulo de la impedancia.
- c) La diferencia de potencial total.

a) La amplitud de la tensión en la bobina $V_L = I X_L = I L \omega$, luego la amplitud de la intensidad en el circuito es

$$I = \frac{15}{0.06 \cdot 200} = 1.25 A$$

y como la intensidad está retrasada 90° respecto de la tensión en la bobina, entonces

$$i(t) = 1.25 \cos(200t - \pi/2)$$

b) Conociendo la resistencia y la reactancia del circuito, la impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 13 \Omega$$

y el desfase $\phi = \arccos(5/13) = 1.18 \text{ rad} = 67^\circ$

c) La diferencia de potencial total es, en voltios,

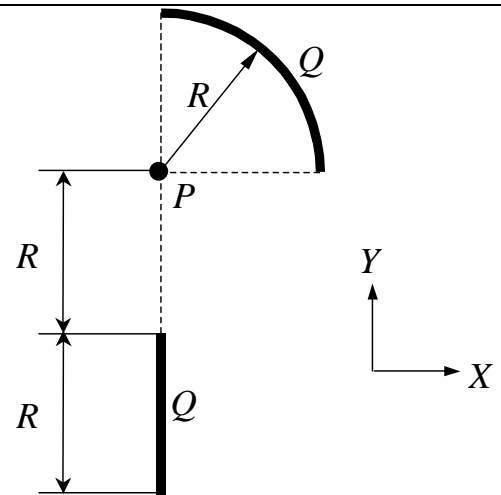
$$u(t) = I Z \cos(200t - \pi/2 + 1.18) = 16 \cos(200t - 0.4)$$

1.- Siga una distribuci3 de càrrega uniforme amb forma de quart de circumferència de radi R , amb càrrega total Q , i altra rectilínia de longitud R i càrrega total Q , disposades com s'assenyala en la figura.

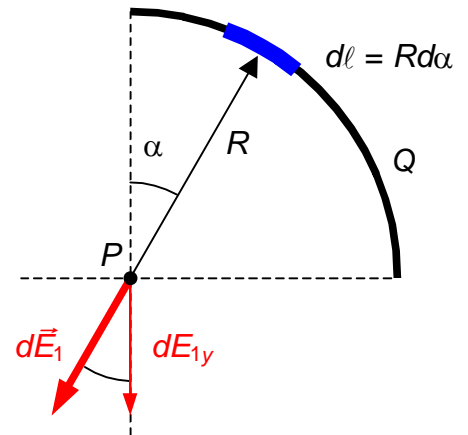
- a) Determina el camp elèctric creat per cada distribuci3 i el camp elèctric total en el punt P de la figura.
b) Determina el potencial electrostàtic creat per cada distribuci3 i el total en el punt P .

Sea una distribuci3 de carga uniforme en forma de cuarto de circunferencia de radio R , con carga total Q , y otra rectilínea de longitud R y carga total Q , dispuestas como se indica en la figura.

- a) Determina el campo eléctrico creado por cada distribuci3 y el campo eléctrico total en el punto P de la figura.
b) Determina el potencial electrostático creado por cada distribuci3 y el total en el punto P .



a) En primer lugar se calcula el campo eléctrico creado por el arco en P , \vec{E}_1 . Para ello, se descompone el arco en segmentos infinitesimales $d\ell$ que producen en P un campo $d\vec{E}_1$. Llamando $\lambda_1 = \frac{Q}{\pi R/2}$ a la densidad lineal de carga, la componente y de este campo será dE_{1y} :

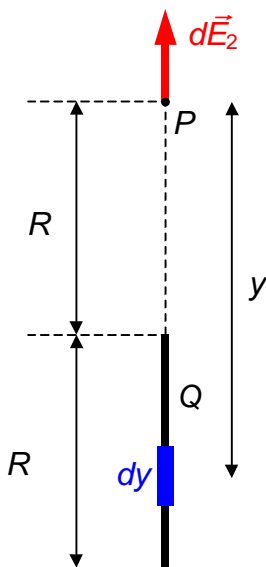


$$dE_{1y} = dE_1 \cos \alpha = k \frac{\lambda_1 d\ell}{r^2} \cos \alpha = \frac{k\lambda_1 R d\alpha}{R^2} \cos \alpha = \frac{k\lambda_1}{R} \cos \alpha d\alpha$$

$$E_{1y} = \int_0^{90^\circ} \frac{k\lambda_1}{R} \cos \alpha d\alpha = \frac{k\lambda_1}{R}$$

La componente x valdrá lo mismo por ser un arco de 90° , por lo que el campo en forma vectorial queda:

$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda_1}{R} (-\vec{i} - \vec{j}) = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} (-\vec{i} - \vec{j})$$



En segundo lugar, el campo creado por el segmento recto \vec{E}_2 , se puede calcular también integrando el campo $d\vec{E}_2$ que crean los diferentes elementos de longitud dy . Llamando $\lambda_2 = \frac{Q}{R}$ a la densidad lineal de carga,

$$E_2 = \int_R^{2R} \frac{k\lambda_2 dy}{y^2} = k\lambda_2 \left[-\frac{1}{y} \right]_R^{2R} = k\lambda_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = k\lambda_2 \frac{1}{2R} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

Quedando en forma vectorial:

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \vec{j}$$

Finalmente, el campo total es:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}(-\vec{i} - \vec{j}) + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}\vec{j} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{-1}{\pi}\vec{i} - \left(\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{4}\right)\vec{j}\right)$$

b) Para el cálculo del potencial, procedemos de manera similar. En primer lugar, se calcula el potencial que crea el arco en P :

$$V_1 = \int k \frac{\lambda_1 dl}{r} = \frac{k\lambda_1}{R} L = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Y en segundo lugar, el originado por el segmento recto:

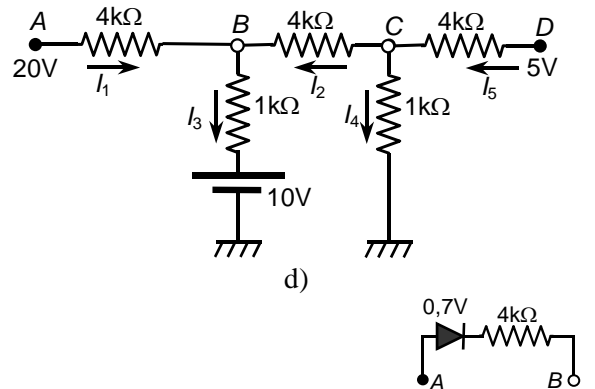
$$V_2 = \int_R^{2R} \frac{k\lambda_2 dy}{y} = k\lambda_2 [\ln y]_R^{2R} = k\lambda_2 \ln 2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \ln 2$$

Y el potencial total:

$$V_1 + V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \ln 2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} (1 + \ln 2)$$

2. Donat el circuit de la figura,

- Determina la intensitat de branca I_1 mitjançant les regles de Kirchhoff.
- Determina la intensitat de branca I_1 mitjançant el mètode de les malles.
- Calcula el generador equivalent de Thevenin entre els punts A i B . Assenyala la seua polaritat.
- En paral·lel als punts A i B del circuit s'afegeix la branca de la figura, amb un diode de tensió llindar $0,7$ V i una resistència de 4 k Ω . Calcula la intensitat que circula per la branca, assenyalant el seu sentit.



Dado el circuito de la figura,

- Determina la intensidad de rama I_1 mediante las reglas de Kirchhoff.
- Determina la intensidad de rama I_1 mediante el método de las mallas.
- Calcula el generador equivalente de Thevenin entre los puntos A y B . Indica su polaridad.
- En paralelo a los puntos A y B del circuito se añade la rama de la figura, con un diodo de tensión umbral $0,7$ V y una resistencia de 4 k Ω . Calcula la intensidad que circula por dicha rama, indicando su sentido.

2)

a) I_1 por Kirchhoff

$$\text{nudos: } \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_5 = I_2 + I_4 \end{cases}$$

$$\text{mallas: } \begin{cases} 20 = 4I_1 + I_3 + 10 \\ 0 = I_3 + 10 - I_4 + 4I_2 \\ 5 = 4I_5 + I_4 \end{cases}$$

$$I_1 = 2,39 \text{ mA}$$

b) Método de las mallas

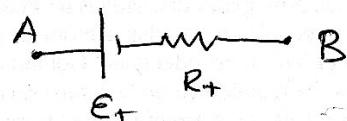
$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 10 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = 2,39 \text{ mA}$$

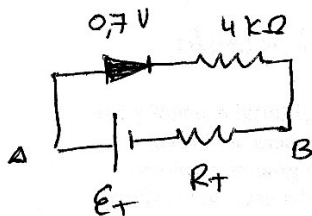
c) Thévenin entre A y B.

$$E_T = V_A - V_B = I_1 \cdot 4 = 9,56 \text{ V.}$$

$$R_T = \frac{24}{35} \text{ k}\Omega = 0,68 \text{ k}\Omega$$



d)

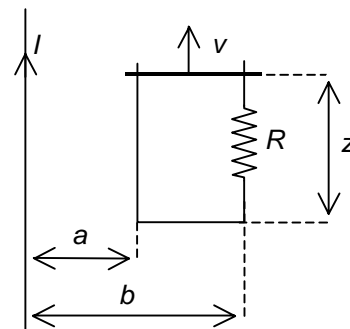


$$i = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{9,56 - 0,7}{4 + 0,68} = 1,89 \text{ mA}$$

3.- Por el conductor rectilíneo de la figura, de longitud infinita, circula una intensidad de corriente I en el sentido indicado.

En el mismo plano, y en la posición mostrada en la figura, se encuentra una espira de resistencia R , uno de cuyos lados se mueve con velocidad constante v en el sentido indicado. Calcula:

- El flujo magnético que atraviesa la espira, en función de z , debido a la corriente I .
- La f.e.m. inducida en dicha espira.
- Intensidad inducida en la espira, indicando su sentido.
- Coefficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira.
- Fuerza que actúa sobre el lado móvil de la espira.



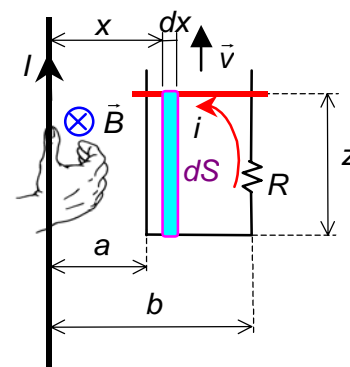
a) El campo magnético creado por el conductor en la zona de la espira tendrá dirección normal al plano del dibujo, y sentido entrante tal y como indica la regla de la mano derecha. El módulo vendrá dado por,

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}$$

siendo x la distancia de cada punto al conductor.

Al calcular el flujo deberemos tomar una superficie elemental en la que el campo sea uniforme: una superficie rectangular de altura z y amplitud dx en la que el valor de B es constante, y que podremos desplazar sobre la espira desde una distancia a del conductor hasta una distancia b . De este modo, el elemento de superficie viene dado por $dS = zdx$. La dirección y el sentido del vector superficie elemental coinciden con el del campo, con lo cual,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_a^b \frac{\mu_0 I z}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



b) y c) La fuerza electromotriz inducida la calculamos utilizando la ley de Faraday. Primero aplicamos la regla de Lenz para obtener el sentido de la corriente inducida: al mover el lado superior z aumenta, y el flujo, que es proporcional a z , aumentará también. La corriente se opondrá a esta variación creando con la espira un campo en sentido contrario al del conductor. Aplicando la regla de la mano derecha a la espira, el sentido de la corriente inducida es contrario a las agujas del reloj, como se indica en el dibujo anterior. Teniendo en cuenta que la única variable que depende del tiempo es z , el valor absoluto de la fem será:

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dz}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) v$$

la intensidad de corriente inducida será igual a,

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \ln\left(\frac{b}{a}\right) v$$

con el sentido mostrado en la figura.

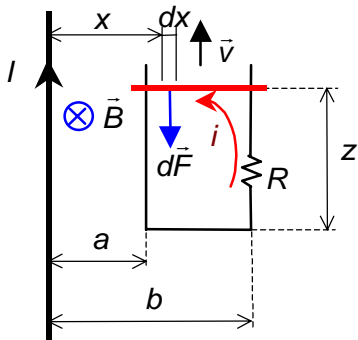
d) el coeficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira es la relación entre el flujo que atraviesa la espira y la corriente que circula por el conductor:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e) la fuerza magnética sobre el lado que se desplaza la calcularemos a partir de la expresión general, ya que el campo no es uniforme:

$$\vec{F} = i \int_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

Hemos de tener en cuenta que la intensidad que aparece en esta expresión es la intensidad inducida que circula por el lado móvil, mientras que la que produce el campo es la que circula por el conductor rectilíneo.



Por otro lado, el conductor y el campo son normales, con lo que el módulo del producto vectorial será el producto de los módulos, y, conocido ya el sentido de la intensidad de corriente inducida, el producto vectorial dará el sentido a las fuerzas indicada en el dibujo, es decir, frenando el movimiento del lado móvil, de acuerdo a la regla de Lenz. Por último, los límites del conductor están situados a distancias a y b del conductor, que serán los límites de integración. Con todo ello, el módulo de la fuerza es:

$$F = i \int_C B dx = i \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dx}{x} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2 \frac{v}{R}$$