DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA E.U.I **EXAMEN DE TEORÍA DE F.F.I.**	**17-Junio-1998**
APELLIDOS:	**NOMBRE:**

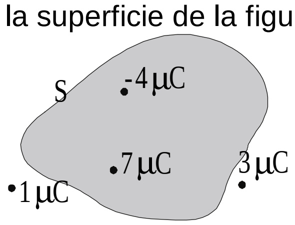
1. Dado el campo escalar U = $6x^2yz + 4x$, calcular:
a) Gradiente de U en P(1,0,0).
b) Circulación de grad U entre P(1,0,0) y Q(0,0,0).

a) $$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (12xyz + 4)\,\vec{i} + 6x^2 z\,\vec{j} + 6x^2 y\,\vec{k}$$

$$\nabla U_P = 4\vec{i}$$

b) $$\int_P^Q \nabla U \cdot d\vec{r} = \nabla U = U_Q - U_P = 0 - 4 = -4$$

2. Enuncia el teorema de Gauss y aplícalo para calcular el flujo del campo eléctrico que atraviesa la superficie de la figura.



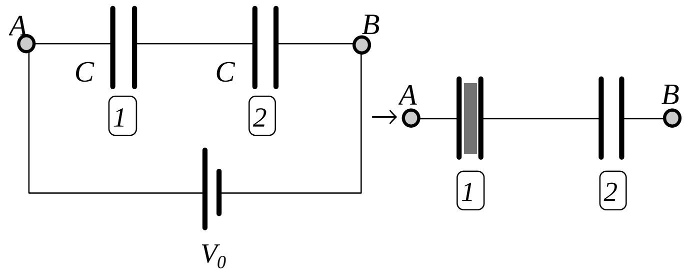
El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada depende sólo de las cargas eléctricas encerradas por la superficie cerrada y vale $\sum Q_{encerradas}/\varepsilon_o$

$$\phi_s = (7-4)/\varepsilon_o = (3\mu C)/\varepsilon_o$$

3. Indica la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

	verdadero	falso
a) La diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor cargado en equilibrio depende de la capacidad del conductor		X
b) La capacidad equivalente de dos condensadores unidos en serie es mayor que la de menor capacidad.		X
c) La resistividad del cobre aumenta con la temperatura.	X	
d) La circulación del gradiente de un escalar U a lo largo de una circunferencia completa depende del radio y vale $\nabla U \cdot 2\pi R$		X

4. Dos condensadores iguales de capacidad C unidos en serie se conectan a una fuente de tensión V_0. Tras desconectar la fuente, a uno de los dos condensadores se le introduce un dieléctrico de $\varepsilon_r = 4$ que llena todo el espacio del condensador. Completa la tabla siguiente:

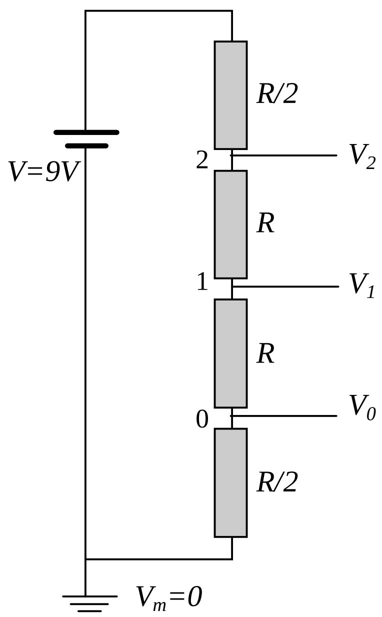


	C_{eq}	Q_{TOTAL}	V_{AB}	Energía almacenada
Antes de introducir el dieléctrico en el condensador 1	C/2	$CV_o/2$	V_o	$1/4CV_o^2$
Después de introducir el dieléctrico en el condensador 1	4/5C	$CV_o/2$	$5/8V_o$	$5/32CV_o^2$

$\frac{1}{2} C_{eq}V_o^2=1/4\ CV_o^2$; $(1/4C+1/C)^{-1}=4/5C$

$V'_{AB}=Q_T/C'_{eq}=(CV_o/2)/(4/5C)=5V_o/8$; $W'_f=1/2\ 4/5\ C\ 25/64\ V_o^2=5/32\ CV_o^2$

5. El esquema de la figura representa el divisor resistivo de un convertidor analógico - digital. Calcula las tensiones intermedias V_0, V_1, V_2.



En una resistencia equivalente de 3R hay una caída de tensión de 9V, por lo que la tensión cae 3V por cada R.

$V_2=9-1.5=7.5V$
$V_1=7.5-3=4.5V$
$V_o=4.5-3=1.5V$

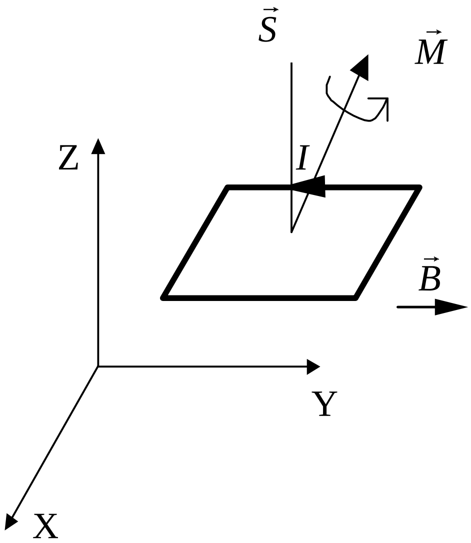
O de otra forma, hallando previamente la intensidad $i=9/3R=3/R$;
$V_o=i\ R/2=3/2\ V$; $V_1=V_o+i\ R=3/2 + 3=9/2\ V$
$V_2= V_1+i\ R= 9/2 + 3= 15/2\ V$

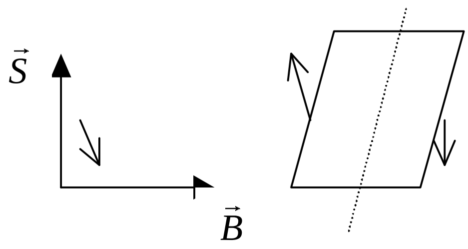
6. Sea una espira paralela al plano *XY*, de superficie *S* y recorrida por una intensidad de corriente *I* en el sentido indicado en la figura, situada en un campo magnético $\vec{B} = B_0\vec{j}$. Hallar el momento de las fuerzas magnéticas $\vec{M}$ que actúa sobre la espira. Indicar si la espira girará, y si lo hace indicar el sentido.

$\vec{S} = S\vec{k}$

$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} = I\vec{S}\times\vec{B} = IS\vec{k}\times B_o\vec{j} = ISB_o(-\vec{i})$

La espira girará, según indica el vector giratorio $\vec{M}$, es decir, de tal forma que el vector $\vec{S}$ vaya a coincidir con $\vec{B}$





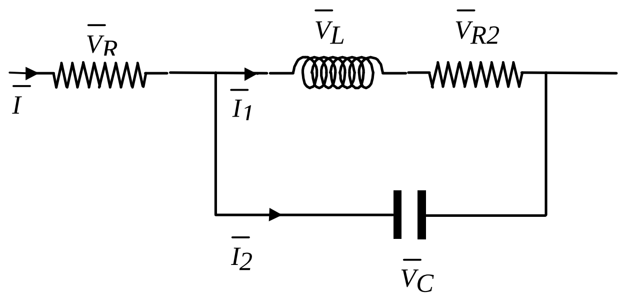
7.- Enunciar la Ley de Faraday de la inducción electromagnética (no se considerará válida sólo la fórmula sin una explicación correcta). Pon un ejemplo en el que aparezcan corrientes de inducción electromagnética.

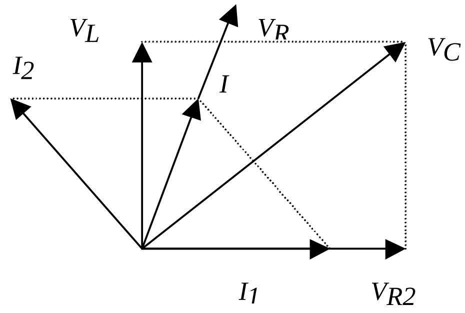
Si el flujo del campo magnético varia por cualquier medio a través de un circuito, se induce una fuerza electromotriz que es igual a variación por unidad de tiempo del flujo magnético en el circuito.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Ejemplo: Una espira situada en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al papel y hacia adentro (x), si la superficie de la espira aumenta, al desplazarse uno de los lados, entonces se induce en ella una f.e.m. y una intensidad i, en el sentido indicado en la figura.

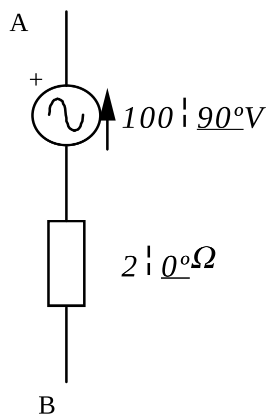
8. Representar el diagrama fasorial del circuito de la figura tomando como origen de fases I_1.



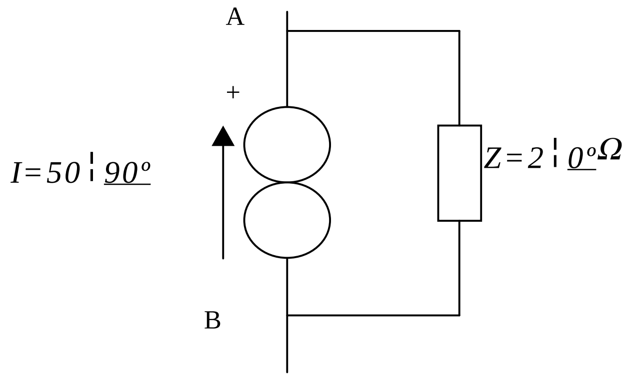


$$\bar{V}_C = \bar{V}_L + \bar{V}_{R2}$$

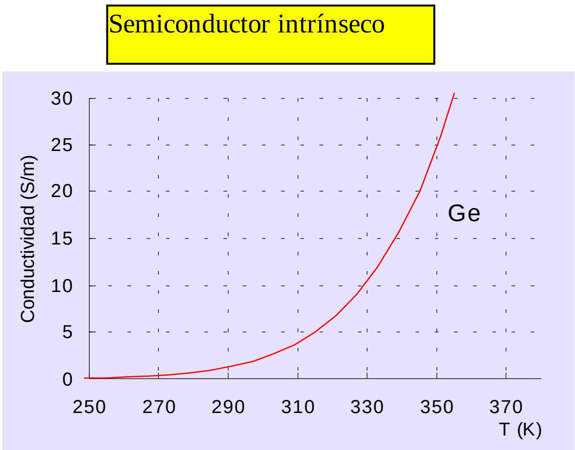
9. Dado el generador de tensión de la figura, transformarlo en su generador equivalente de intensidad.

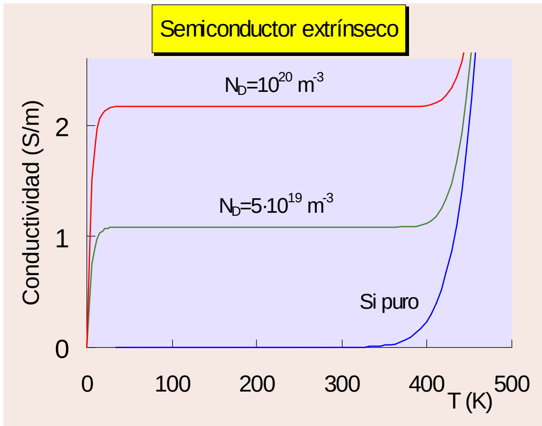


$$\vec{I} = \frac{\vec{\varepsilon}}{\vec{\bar{Z}}} = \frac{100_{90}}{2_0} = 50_{90}$$



10. Representar las gráficas de la variación de la conductividad con la temperatura para semiconductores intrínsecos y extrínsecos, y explicar dichas variaciones.





En la gráfica de la izquierda se representa la variación de la conductividad con la temperatura de un semiconductor intrínseco como el Germanio y en la de la derecha, abajo la variación de la conductividad del Silicio puro, como otro semiconductor intrínseco y la de Silicio dopado con impurezas como semiconductor extrínseco en las dos curvas superiores.

En los semiconductores intrínsecos la conductividad aumenta al aumentar la temperatura debido a que la energía térmica es capaz de liberar electrones de los enlaces covalentes, así, al aumentar la temperatura aumenta el número de pares electrón-hueco, y a la haber mayor numero de estos portadores de corriente aumenta la conductividad.

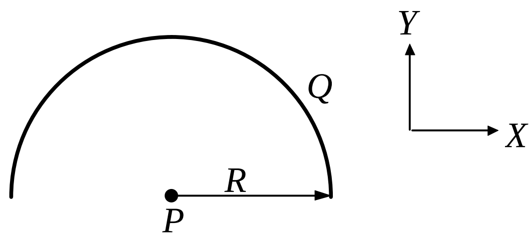
En los semiconductores extrínsecos, tanto los huecos de las impurezas aceptoras en los semiconductores de tipo p como los electrones de las impurezas donadoras en los de tipo n, se quedan libres para la conducción eléctrica con muy poca temperatura, así, cuando la temperatura alcanza unos pocos kelvin ya se han liberado todos los portadores correspondientes a las impurezas aumentando bruscamente la conductividad alcanzando valores superiores que en los intrínsecos, luego para aumentar más la conductividad hay que aumentar bastante la temperatura y el otro aumento que se produce ya es debido a la rotura de enlaces covelentes correspondiente al comportamiento del material intrínseco.

¡Error! Marcador no definido.DEPARTAMENT DE FÍSICA APLICADA E.U.I FFI. EXAMEN DE PROBLEMES	17-Juny-1998

1.- Sea una semicircunferencia de radio R, cargada con una carga Q positiva uniforme.

a) Determina el campo eléctrico $\vec{E}$ en punto P, situado en el centro de la línea que une los extremos de la semicircunferencia.

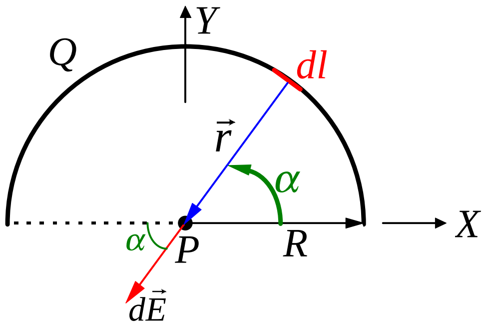
b) Determina el potencial electrostático en el punto P.



El campo eléctrico creado por el elemento de longitud dl en el punto P viene dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cancel{R} d\alpha}{R^{\cancel{2}}}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} dl &= R d\alpha \\ r &= R \end{aligned}}$$



$$\vec{u}_r = -\cos\alpha\,\vec{i} - \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$$

Integrando para toda la semicircunferencia cargada, obtenemos el campo eléctrico total en el punto P:

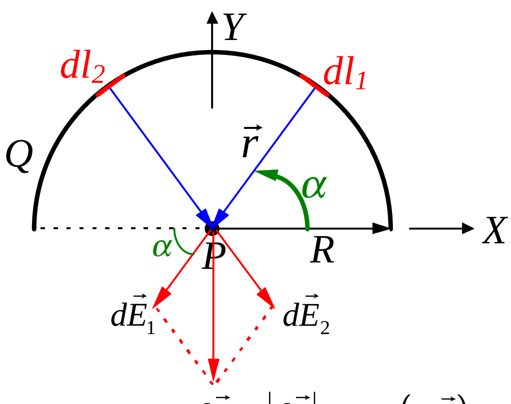
$$\vec{E} = \int_0^\pi d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^\pi\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right)_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}(-2)\vec{j} = \frac{-Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

$$\boxed{\lambda = Q/\pi R}$$

El campo eléctrico tiene dirección $-\vec{j}$. Este resultado se podía haber obtenido directamente por consideraciones de simetría: observa en la figura como la componente x del campo creado por el elemento dl_1 se anula con la componente x creada por el elemento dl_2. Esto sucede para cualquier par de elementos diferenciales que tomemos, dando como resultante un campo eléctrico en la dirección $-\vec{j}$. De este modo podemos calcular simplemente el módulo del campo:



$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2} \qquad \left|\vec{E}\right| = \int_0^\pi\left|d\vec{E}\right|\operatorname{sen}\alpha = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$d\vec{E} = \left|d\vec{E}\right|\operatorname{sen}\alpha\left(-\vec{j}\right)$$

$$\vec{E} = \left|\vec{E}\right|(-\vec{j})$$

b)El potencial creado en el punto P por el elemento de longitud dl viene dado por:

$$dV = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} + K = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda \cancel{R} d\alpha}{\cancel{R}} + K$$

Integrando para toda la semicircunferencia cargada, obtenemos el potencial total en el punto P:

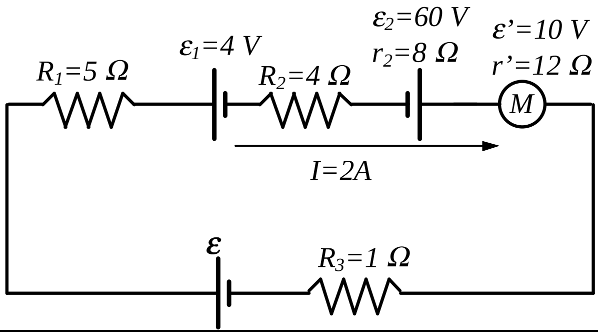
$$V = \int_0^{\pi} dV = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\alpha + cte = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0} + cte = \frac{Q}{4\pi R\varepsilon_0} + cte$$

2.- Dado el circuito de la figura:

a) Determina el valor de la fuerza electromotriz ε para que la intensidad que circula por el circuito sea de *2A* en el sentido indicado.

b) Calcula la potencia generada y/o consumida por cada uno de los elementos del circuito.

c) Calcula el rendimiento de cada uno de los generadores y motores del circuito.



a) Para el cálculo de la f.e.m. de la fuente bastará con aplicar la ecuación de circuito, que relaciona esta intensidad con el conjunto de elementos que lo componen (f.e.m., f.c.e.m. y resistencias)

$$I=\frac{\sum\varepsilon-\sum\varepsilon'}{\sum R}\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{\varepsilon\text{ - }4+60\text{ - }10}{5+4+8+12+1}=\frac{\varepsilon+46}{30}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon=30\text{x}2\text{ - }46=14\text{ V}$$

Donde cada f.e.m. se ha introducido en la ecuación, con signo positivo o negativo, según su polaridad y en relación al sentido de la intensidad que lo atraviesa.

b) Todas las resistencia consumen potencia y este valor viene dado por la ley de Joule:

$$P=RI^2\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}\mathrm{P}_1=R_1I^2=5x4=20\ W\\ \mathrm{P}_2=R_2I^2=4x4=16\ W\\ \mathrm{P}_3=R_3I^2=1x40=4\ W\end{array}\right.$$

El receptor consume potencia tanto por efecto Joule, debido a su resistencia interna, como al transformar la energía eléctrica a otra forma de energía distinta al calor.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Potencia}\text{ Transformada: }\ \mathrm{P_T}=\varepsilon' I=10x2=20\text{ W}\\ \textit{Potencia}\text{ consumida en r}'\text{: }\ \mathrm{P_{r'}}=r'\,I^2=12x4=48\text{ W}\end{array}\right|\ \Rightarrow\ \mathrm{P_C}=P_T+P_{r'}=68\text{ W}$$

El generador 1 actúa como receptor. Al ser ideal no tiene pérdidas por efecto Joule, luego la potencia consumida coincide con la transformada:

$$\text{Potencia Consumida: }\ \mathrm{P_C}=\ \mathrm{P_T}=\varepsilon\mathrm{I}=4\text{x}2=8\text{ W}$$

El generado 2 suministra energía al circuito, si bien consume algo de energía por efecto Joule en su resistencia interna:

$$\left.\begin{array}{l}P.\text{ Generada: }\ \mathrm{P_G}=\varepsilon I=60x2=120\text{ W}\\ P.\text{ consumida en r: }\ \mathrm{P_r}=rI^2=8x4=32\text{ W}\end{array}\right|\ \Rightarrow\ \text{P. Suministrada }\mathrm{P_S}=P_G-P_r=88\text{ W}$$

El generador incógnita suministra energía al circuito. No tiene pérdidas por efecto Joule al carecer de resistencia interna:

$$\text{Potencia Generada: }\ \mathrm{P_G}=\varepsilon\mathrm{I}=14\text{x}2=28\text{ W}\ \Rightarrow\ \mathrm{P_S}=\mathrm{P_G}=28\text{ W}$$

Cómo forma de verificar el resultado hacemos un balance de potencias: potencias generadas=potencias consumidas

$$\sum\mathrm{P_G}=\sum\mathrm{P_C}\quad 120+28=20+16+4+20+48+8+32=148\text{ W}$$

Luego el balance de potencias se cumple.

c) El rendimiento de cada receptor será el porcentaje de potencia transformada frente a la consumida:

Receptor: $\eta=\frac{\mathrm{P_T}}{\mathrm{P_C}}=\frac{20}{68}=0.294\ \rightarrow\ 29.4\%$ *; Generador 1* $\eta=\frac{\mathrm{P_T}}{\mathrm{P_C}}=\frac{8}{8}=1\ \rightarrow\ 100\%$

En los generadores, el rendimiento es el porcentaje de energía o potencia que se suministra al circuito respecto a la generada:

Generador 2 $\eta=\frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_G}}=\frac{88}{120}=0.73\widehat{3}\ \rightarrow\ 73.\widehat{3}\%$ *; Generador incógnita* $\eta=\frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_G}}=\frac{28}{28}=1\ \rightarrow\ 100\%$

Como es de esperar ambos elementos ideales (generador 1 y generador incógnita) tienen un rendimiento del 100%.

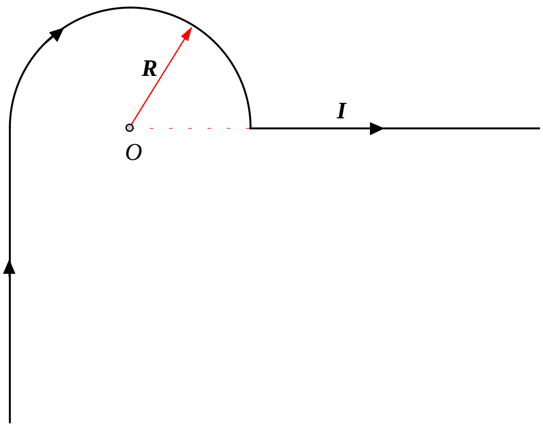
3.- El conductor de la figura està format per dos trams rectilinis indefinits per un costat, i un tram semicircular de radi R coplanari amb el altres dos. Per el circula un corrent I amb el sentit assenyalat.

a) Calcula la intensitat de camp magnètic en el punt O, assenyalant la direcció i el sentit.

b) Calcula el fluix magnètic que travessa una espira circular de radi r ($r<<R$) situada en O i coplanària amb el conductor.

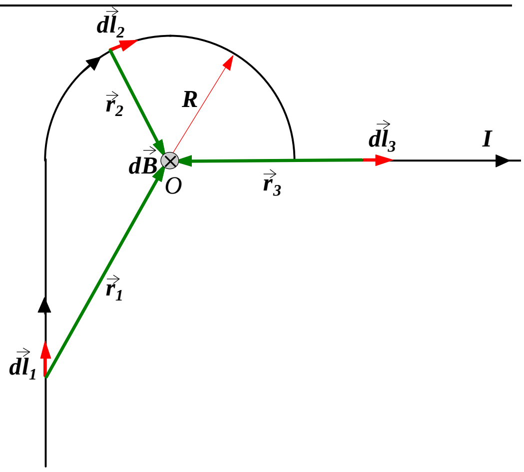
c) Calcula el coeficient d'inducció mútua entre l'espira i el conductor.

d) Si la intensitat varia en el temps segons la llei $I = I_0 \dfrac{t}{T}$ calcula la força electromotriu induïda en l'espira i el sentit de la intensitat induïda. [$I_0>0$ i $T>0$]



Solució :

a) la intensitat de camp magnètic serà la suma del camp creat per cada tram del conductor. En els tres trams l'element de corrent i el punt O estan en el mateix pla, i per tant el camp magnètic en els tres casos serà normal al pla del dibuix. Com, a mes, la intensitat circula en el mateix sentit, el camp creat per els tres anirà en la mateixa direcció i sentit (el assenyalat en el dibuix, que és el del producte vectorial de $d\vec{l} \times \vec{r}$), i únicament tindrem que integrar el mòdul del camp. Per altra banda, en el tram *3*, l'element de corrent i el vector posició van en la mateixa direcció, i el seu producte vectorial serà zero $d\vec{l}_3 \times \vec{r}_3 = 0$.



$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R}; \quad B_2 = \int_2 \frac{\mu_0 I \left| d\vec{l}_2 \times \vec{R} \right|}{4\pi R^3} = \int_2 \frac{\mu_0 I \cdot dl_2}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \cdot \pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}; \quad B_3 = 0$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)$$

b) al ser l'espira petita podrem considerar que el camp magnètic en ella és uniforme i que te el valor calculat per al punt O. Com que l'espira està en el mateix pla del conductor, el vector superfície de l'espira serà paral·lel al camp

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\int_S ds = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2$$

c)

$$\Phi = M \cdot I = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2 \rightarrow M = \frac{\mu_0}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2$$

d) Al transcórrer el temps la intensitat augmenta, i per tant el fluix augmenta produint inducció. Per compensar l'augment de fluix la intensitat induida en l'espira ha de crear un camp magnètic en sentit contrari al inductor. La intensitat induida ha de circular en sentit antihorari per que, aplicant la regla de la ma dreta, el camp de l'espira, normal al pla de l'espira, tinga el sentit adequat.

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\left(\frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2\right)}{dt} = \frac{\mu_0}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2 \frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\pi r^2 \frac{I_0}{T}$$

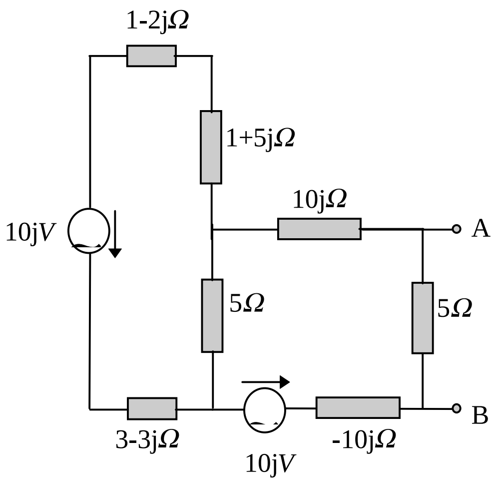
4.- En el circuit de la figura:

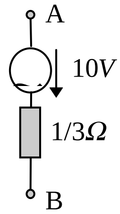
a) Calcula la impedància equivalent entre els punts *A* i *B* del circuit.

b) Calcula la intensitat de corrent per la impedància de 10jΩ.

c) Calcula la diferencia de potencial entre els punts *A* i *B*.

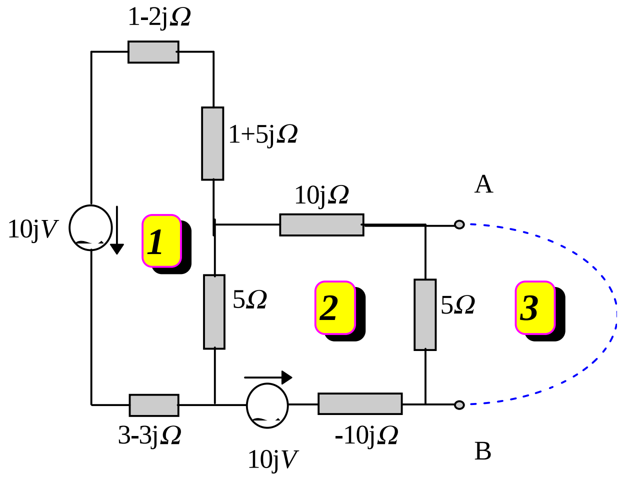
d) Utilitza el generador equivalent de Thevenin per a determinar la intensitat de corrent que circularà per un generador de força electromotriu 10*V* i impedància interna 1/3Ω que connectem entre *A* i *B*, i calcula de nou la diferència de potencial entre *A* i *B*.





Solució:

a)



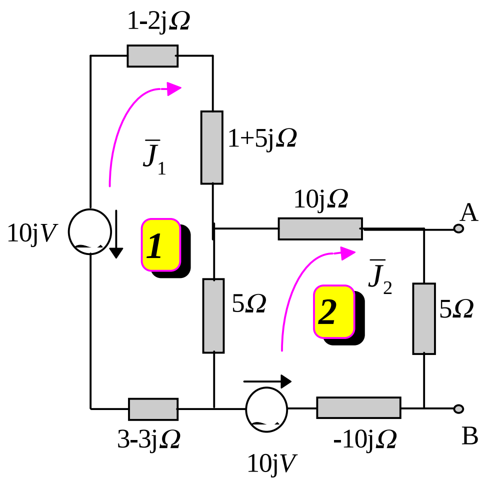
$$\bar{Z}_{AB}=\frac{\begin{vmatrix}(1-2j)+(1+5j)+5+(3-3j) & -5 & 0\\ -5 & 10j+5+5-10j & -5\\ 0 & -5 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(1-2j)+(1+5j)+5j+(3-3j) & -5\\ -5 & 10j+5+5-10j\end{vmatrix}}=$$

$$\frac{\begin{vmatrix}10 & -5 & 0\\ -5 & 10 & -5\\ 0 & -5 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -5\\ -5 & 10\end{vmatrix}}=\frac{5\cdot 10\cdot 10-((-5)\cdot(-5)\cdot 10+(-5)\cdot(-5)\cdot 5)}{10\cdot 10-((-5)\cdot(-5))}=\frac{125}{75}=\frac{5}{3}\Omega$$

b)

$$\begin{bmatrix}-10j\\ -10j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{J}_1\\ \bar{J}_2\end{bmatrix}$$

$$\bar{J}_2=\frac{\begin{vmatrix}10 & -10j\\ -5 & -10j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -5\\ -5 & 10\end{vmatrix}}=\frac{10\cdot(-10j)-((-5)\cdot(-10j))}{10\cdot 10-((-5)\cdot(-5))}=\frac{-150j}{75}=-2jA$$



c)

$$\bar{V}_{AB}=\bar{J}_2\cdot 5=-2j\cdot 5=-10jV$$

d)

$$\bar{I}=\frac{10-10j}{1/3+5/3}=\frac{10-10j}{6/3}A=5-5jA$$

$$V_{AB}=I\frac{1}{3}-10=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}j-10=-\frac{25}{3}-\frac{5}{3}j\quad V$$