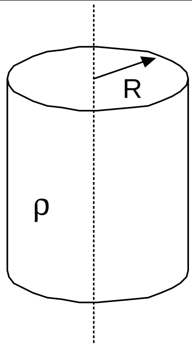
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA EXAMEN DE PROBLEMAS DE F.F.I.	11 de septiembre de 2000

1. La figura muestra un cilindro de longitud infinita y radio R, cargado uniformemente con una densidad volumétrica de carga ρ. Calcula:

a) E(r), para r<R y r>R.

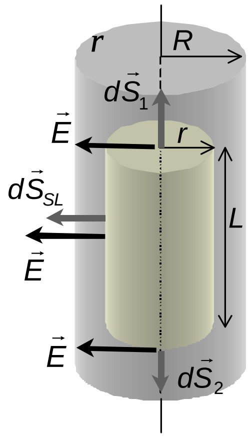
b) Diferencia de potencial entre el eje del cilindro y su superficie.



a) Al tratarse de un cilindro indefinido, nos permite resolver este problema mediante el teorema de Gauss. Dada la simetría del problema, el módulo del campo eléctrico solo depende de la distancia *r* al eje del cilindro, y además, la dirección del campo eléctrico debe ser radial. Por tanto, podemos utilizar como superficie de Gauss un cilindro de longitud *L* y radio *r*, coaxial al cilindro cargado.

r < R:

En este caso al ser *r* más pequeño que *R*, la superficie de Gauss está contenida dentro del cilindro, tal y como indica la figura.



El flujo del campo eléctrico a través de la superficie de Gauss es,

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dicha integral la podemos dividir en tres partes, el flujo a través de la superficie lateral (*SL*), y el flujo a través de cada una de las bases del cilindro (B_1 y B_2),

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{SL} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Para las dos bases del cilindro, el vector $d\vec{S}$ es perpendicular a la superficie, tal y como indica la figura, mientras que el campo eléctrico tiene la dirección radial. Por tanto, son vectores perpendiculares, y su producto escalar es cero. Por otro lado, para la superficie lateral del cilindro, el vector $d\vec{S}$ es radial, paralelo al campo eléctrico:

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{SL} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{SL} E\, dS$$

El campo eléctrico solamente depende de la distancia al eje del cilindro, por tanto en la superficie lateral del mismo es constante, y puede salir fuera de la integral,

$$\Phi = \int_{SL} E\, dS = E \int_{SL} dS = E S_{SL} = E 2prL$$

la integral de *dS* es la superficie lateral del cilindro, que es igual a 2*prL*.

Por otro lado, el teorema de Gauss nos dice que el flujo es igual a la carga encerrada en el interior de la superficie dividido por e_0,

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{e_0}$$

y la carga encerrada en el interior es igual a la densidad de carga por el volumen,

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{e_0} = \frac{rV}{e_0} = \frac{rpr^2L}{e_0}$$

Igualando ambas expresiones del flujo obtenemos el valor del campo eléctrico,

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = E2prL \\ \Phi = \dfrac{rpr^2L}{e_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad E2prL = \frac{rpr^2L}{e_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{rr}{2e_0} \quad \text{(N/C)}$$

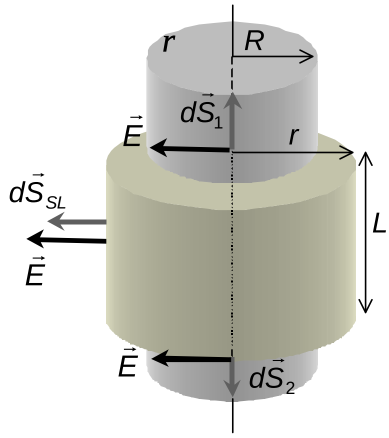
Que como se ve, es directamente proporcional a *r*, es decir, es creciente con el radio.

r > R:

De nuevo, tomamos como superficie de Gauss un cilindro de radio *r* y longitud *L*. En este caso al ser *r* más grande que *R*, la superficie de Gauss se sitúa fuera del cilindro cargado, tal y como indica la figura.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, el flujo a través de la superficie de Gauss será,

$$\Phi = E2prL\ .$$



Aplicando ahora el teorema de Gauss,

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{e_0}$$

donde en este caso, la carga encerrada es aquella contenida en un cilindro de longitud *L*, y radio *R*,

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{e_0} = \frac{rV}{e_0} = \frac{rpR^2L}{e_0}$$

Observa que la diferencia con el caso anterior radica en que ahora aparece *R* en lugar de *r* en esta expresión.

Igualando las dos expresiones del flujo obtenidas, podemos calcular el módulo del campo eléctrico:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = E2prL \\ \Phi = \dfrac{rpR^2L}{e_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad E2prL = \frac{rpR^2L}{e_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{rR^2}{2e_0r} \quad \text{(N/C)}$$

que en este caso es inversamente proporcional a la distancia *r*.

b) La diferencia de potencial entre dos puntos (0 y *R*) es,

$$V_R - V_0 = -\int_0^R \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

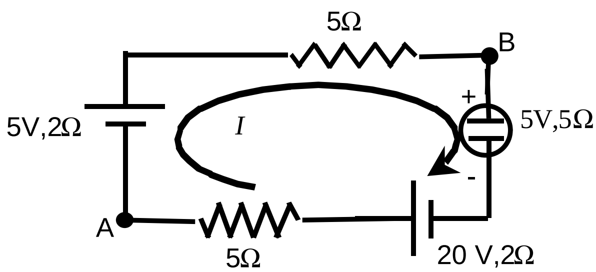
donde la expresión para el campo eléctrico ha sido calculada en el apartado anterior. La dirección del campo eléctrico es radial, por lo que tomando $d\vec{r}$ en la dirección radial, los dos vectores son paralelos, con lo cual su producto escalar es igual al producto de los módulos,

$$V_R - V_0 = -\int_0^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^R E\,dr$$

puesto que la integral va desde 0 hasta *R*, debemos utilizar la expresión del campo eléctrico obtenida para *r* < *R*, y sustituyendo en la integral obtenemos,

$$V_R - V_0 = -\int_0^R Edr = -\int_0^R \frac{rr}{2e_0}dr = \frac{-r}{2e_0}\int_0^R rdr = \frac{-r}{2e_0}\frac{r^2}{2}\bigg|_0^R = \frac{-rR^2}{4e_0} \quad \text{(V)}$$

2. Dado el circuito de la figura, calcula:
a) Intensidad que circula por el circuito (valor y sentido)
b) Diferencia de potencial V= V_A -V_B. Calcúlala por los dos caminos posibles.
c) Potencia total consumida en el circuito.
d) Rendimiento del receptor.
e) Indica que generadores suministran potencia al circuito y da el valor de la potencia suministrada y generada por los mismos.



a) Aplicando la ecuación del circuito, tomando como sentido de la intensidad el horario,

$$I = \frac{20+5-5}{2+5+2+5+5} = \frac{20}{19} = 1{,}05 \text{ A}$$

b) Tomamos el camino que sigue el sentido de la intensidad:

$$V_A - V_B = I_{AB}\sum R - \sum \boldsymbol{e} = \frac{20}{19}\cdot(2+5)-(5) = \frac{45}{19} = 2{,}37 \text{ V}$$

De haber seguido el camino contrario

$$V_A - V_B = I_{AB}\sum R - \sum \boldsymbol{e} = \frac{-20}{19}\cdot(5+2+5)-(-20+5) = \frac{45}{19} = 2{,}37 \text{ V}$$

c) Será la suma de las pérdidas por efecto Joule más las potencias transformadas motor:

$$P_C = I^2\sum R + I\sum \boldsymbol{e}' = (2+5+5+2+5)\cdot\left(\frac{20}{19}\right)^2 + (5)\cdot\frac{20}{19} = \frac{500}{19}\text{W} = 26{,}3\text{ W}$$

Dicha potencia consumida debe coincidir con la potencia generada por los generadores. Dicha potencia generada viene dada por:

$$P_g = \boldsymbol{e}I = (20+5)\cdot\frac{20}{19} = \frac{500}{19}\text{ W} = 26{,}3\text{W}$$

d)

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{e}'}{\boldsymbol{e}'+r'I} = \frac{5}{5+5\times 20/19} = \frac{19}{39} = 0{,}49 = 49\%$$

e) Los dos generadores suministran potencia.

La potencia generada y suministrada por el generador de 20V es:

$$P_g = \boldsymbol{e}I = 20\cdot\frac{20}{19} = \frac{400}{19}\text{W} = 21{,}1\text{W} \quad P_g = \boldsymbol{e}I - rI^2 = \frac{400}{19} - 2\left(\frac{20}{19}\right)^2 = 18{,}84\text{W}$$

Y por el generador de 5V

$$P_g = \boldsymbol{e}I = 5\cdot\frac{20}{19} = \frac{100}{19}\text{W} = 5{,}26\text{W} \quad P_g = \boldsymbol{e}I - rI^2 = \frac{100}{19} - 2\left(\frac{20}{19}\right)^2 = 3{,}05\text{W}$$

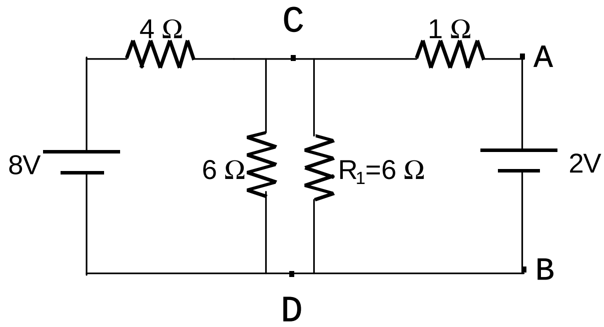
3. Dado el circuito de la figura:

a) Calcula la intensidad que circula del punto A al B.

b) Calcula la potencia disipada por la resistencia R_1.

c) Encuentra el equivalente de Thevenin entre C y D, indicando claramente su polaridad.

d) Si se le añade al circuito una resistencia de 5Ω entre los puntos C y D, utilizando el equivalente de Thevenin calcula la intensidad que circularía por dicha resistencia.



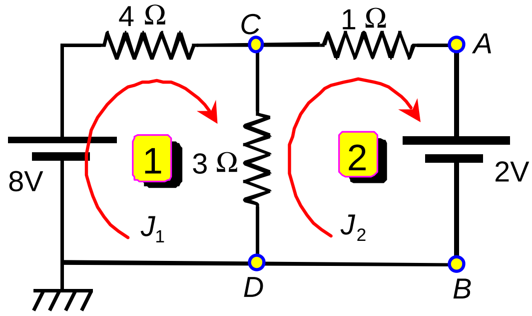
Para resolver este ejercicio de forma más sencilla, conviene sustituir las dos resistencias de 6 Ω situadas en paralelo, por su resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{1}{1/6 + 1/6} = 3\,\Omega$$

y una vez hecho este paso previo, podemos resolver el problema por el método de las mallas.

a) Para aplicar el método de las mallas, primeramente habría que transformar todos los generadores de intensidad del circuito en generadores de tensión. En este caso, puesto que no hay ningún generador de intensidad, este paso no es necesario realizarlo.

En segundo lugar hay que numerar las mallas, y asignar a cada una de ellas una intensidad de malla, todas en el mismo sentido. En este caso hay dos mallas, que numeramos de izquierda a derecha, y les asignamos las intensidades de malla en sentido de las agujas del reloj, tal y como indica la figura.



La ecuación matricial que se obtiene por aplicación del método de las mallas es,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

donde e_i representa la suma de las fuerzas electromotrices de la malla i, R_{ii} es la suma de las resistencias de la malla i, y R_{ij} es la suma de las resistencias comunes a la malla i y a la j. Sustituyendo ahora los valores se obtiene,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Observa que la fuerza electromotriz de la malla 2, e_2, es negativa debido a que la intensidad J_2 atraviesa el generador del borne positivo al negativo del mismo.

La intensidad que circula de A a B (I_{AB}) es igual a J_2, que aplicando la regla de Cramer viene dada por:

$$I_{AB} = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10}{19}\ \mathrm{A}$$

La intensidad J_1 viene dada por,

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{26}{19}\ \mathrm{A}$$

b) Para calcular dicha potencia, necesitamos calcular primero la intensidad que circula por la rama *CD*. La intensidad I_{CD} es igual a la intensidad de la malla 1 menos la intensidad de la malla 2:

$$I_{CD} = J_1 - J_2 = \frac{26}{19} - \frac{10}{19} = \frac{16}{19} \text{ A}$$

La potencia total consumida entre *C* y *D* es entonces,

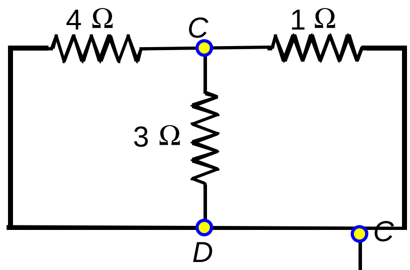
$$P = RI_{CD}^2 = 3\left(\frac{16}{19}\right)^2 = \frac{768}{361} = 2{,}13 \text{ W}$$

Como las dos resistencia de dicha rama son iguales, y están conectadas en paralelo, la potencia consumida por ambas es la misma, e igual a la potencia total consumida en esa rama dividido entre dos:

$$P_{6\Omega} = \frac{P}{2} = \frac{384}{361} = 1{,}06 \text{ W}$$

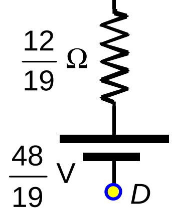
c) Para determinar el equivalente de Thevenin necesitamos la resistencia equivalente de la red pasiva, y la diferencia de potencial, entre los puntos *C* y *D*.

Observando la figura vemos que las tres resistencias del circuito están conectadas en paralelo, de modo que la resistencia equivalente entre los puntos *C* y *D* viene dada por:



$$R_{CD} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{19}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{19}\ \Omega$$

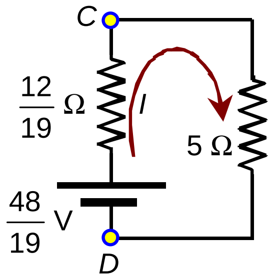
La diferencia de potencial entre *C* y *D* está calculada en el apartado anterior.



$$V_{CD} = \sum R\,I - \sum \boldsymbol{e} = R\,I_{CD} = 3 \cdot \frac{16}{19} = \frac{48}{19} \text{ V}$$

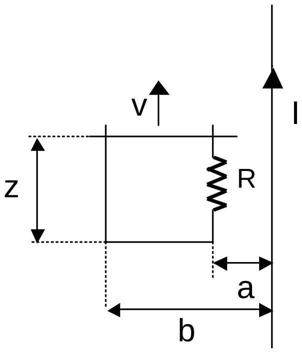
De este modo, el equivalente de Thevenin entre los puntos *C* y *D* es el indicado en la figura, con el borne negativo en el punto *D*

d) Si colocamos ahora una resistencia de 5 Ω entre los puntos *C* y *D*, y utilizando el equivalente de Thevenin tal y como indica la figura, la intensidad viene dada por:



$$I = \frac{\sum \boldsymbol{e}}{\sum R} = \frac{48/19}{12/19 + 5} = \frac{48}{107} \text{ A}$$

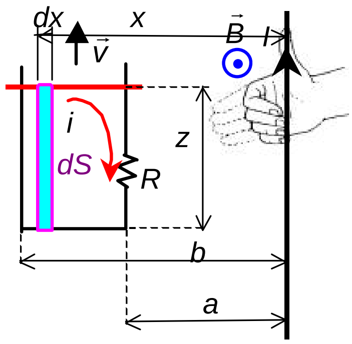
4. Por el conductor rectilíneo de la figura, de longitud infinita, circula una intensidad de corriente de 2 A. en el sentido indicado.
En el mismo plano, y en la posición mostrada en la figura, se encuentra una espira de resistencia R, uno de cuyos lados se mueve con velocidad constante v en el sentido indicado.
Calcula:
a) El flujo magnético que atraviesa la espira, en función de z, debido a la corriente de 2 A.
b) La fuerza electromotriz inducida en dicha espira.
c) Intensidad inducida en la espira indicando su sentido.
d) Fuerza que actúa sobre el lado móvil de la espira.



a) El campo magnético creado por el conductor tendrá dirección normal al plano del dibujo, y sentido saliente tal y como indica la regla de la mano derecha. El módulo vendrá dado por,

$$B = m_0 \frac{I}{2p x}$$

siendo x la distancia al conductor.
Al calcular el flujo deberemos tomar una superficie elemental en la que el campo sea uniforme: una superficie rectangular de altura z y amplitud dx en la que el valor de B es constante, y que podremos desplazar sobre la espira desde una distancia a del conductor hasta una distancia b. De este modo, el elemento de superficie viene dado por $dS = zdx$. La dirección y el sentido del vector superficie elemental coinciden con el del campo, con lo cual,



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S BdS = \int_a^b \frac{m_0 I z}{2p} \frac{dx}{x} = \frac{m_0 I z}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{(Wb)}$$

b) La fuerza electromotriz inducida la calculamos utilizando la ley de Faraday. Primero aplicamos la regla de Lenz para obtener el sentido de la corriente inducida: al mover el lado superior z aumenta, y el flujo, que es proporcional a z, aumentará también. La corriente se opondrá a esta variación creando con la espira un campo en sentido contrario al del conductor. Aplicando la regla de la mano derecha a la espira, el sentido de la corriente inducida es horario, como se indica en el dibujo anterior.
Teniendo en cuenta que la única variable que depende del tiempo es z, el valor absoluto de la *fem* será:

$$|e_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{m_0 I}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dz}{dt} = \frac{m_0 I}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right) v \quad \text{(V)}$$

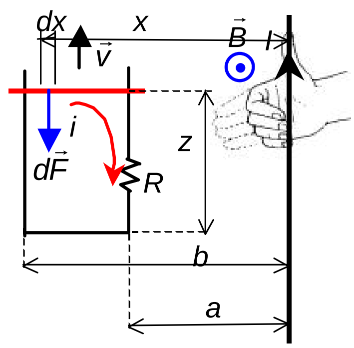
y por tanto la intensidad de corriente inducida será igual a,

$$i = \frac{e_i}{R} = \frac{m_0 I}{2p R} \ln\left(\frac{b}{a}\right) v \quad \text{(A)}$$

c) Por último, la fuerza sobre el lado que se desplaza la calcularemos a partir de la expresión general, ya que el campo no es uniforme:

$$\vec{F} = i \int_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

Hemos de tener en cuenta que la intensidad que aparece en esta expresión es la intensidad que circula por el lado móvil, mientras que la que produce el campo es la que circula por el conductor rectilíneo. Por otro lado, el conductor y el campo son normales, con lo que el módulo del producto vectorial será el producto de los módulos, y, conocido ya el sentido de la intensidad de corriente inducida, el producto vectorial dará el sentido a las fuerzas indicada en el dibujo, es decir, frenando el movimiento del lado móvil, de acuerdo a la regla de Lenz. Por último, los límites del conductor están situados a distancias a y b del conductor, que serán los límites de integración. Con todo ello, el módulo de la fuerza es:



$$F = i \int_C Bdx = i \int_a^b \frac{m_0 I}{2p} \frac{dx}{x} = \left(\frac{m_0 I}{2p} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2 \frac{v}{R} \quad \text{(N)}$$