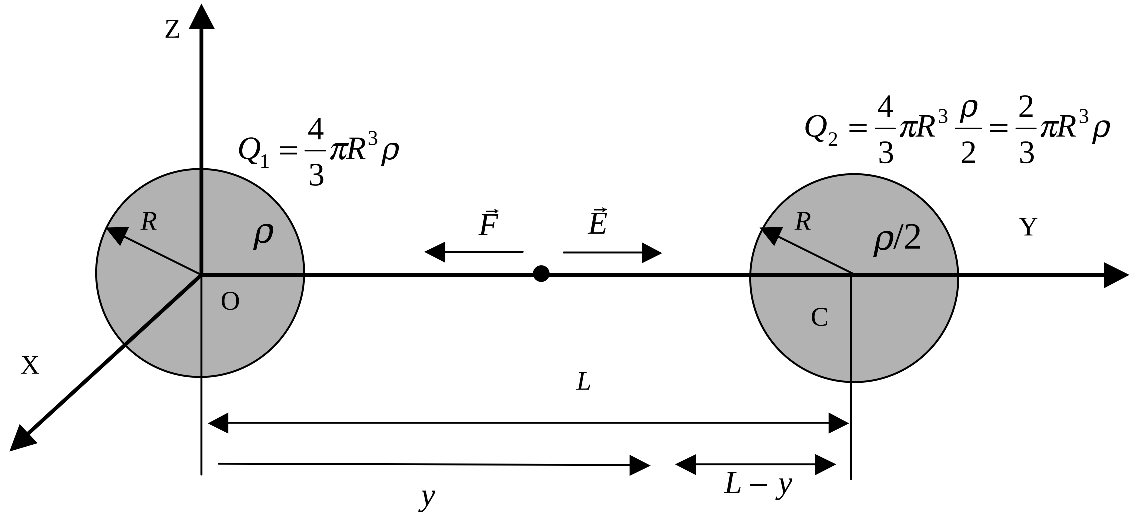
1. Sean dos distribuciones esféricas de carga de radio R. Una de ellas está situada en el origen de coordenadas, siendo su densidad en volumen de carga $\rho > 0$. y la otra se encuentra en el punto $(0,L,0)$ y su densidad en volumen de carga es $\rho/2 > 0$.

a) Calculad el campo eléctrico y el potencial en el punto $(0,L/2,0)$.
b) Si situamos una carga $q<0$ en el punto $(0,L/2,0)$, ¿qué fuerza actúa sobre ella?.
c) Determinad el punto en el que tendríamos que situar la carga q para que la fuerza electrostática sobre ella sea nula.



a) El campo eléctrico total en el punto (0,L/2,0) viene dado por la suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las esferas, teniendo en cuenta además que el campo eléctrico debido a la esfera de la izquierda tiene dirección $\vec{j}$, y el campo de la esfera de la derecha dirección - $\vec{j}$.

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left(L/2\right)^2}\vec{j} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left(L/2\right)^2}\vec{j} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 \, L^2/4}\left(\vec{j} - \frac{\vec{j}}{2}\right) = \frac{4}{3}\frac{R^3\rho}{\varepsilon_0 L^2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{j} = \frac{2}{3}\frac{R^3\rho}{\varepsilon_0 L^2}\vec{j} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

El potencial eléctrico en el punto (0,L/2,0) viene dado por la suma de potenciales producidos por cada una de las esferas

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \, L/2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \, L/2} = \frac{\frac{4\pi}{3}R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 \, L/2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3\varepsilon_0 L}R^3\rho\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{R^3}{\varepsilon_0 L}\rho \quad (V)$$

b)

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{2}{3}\frac{R^3\rho}{\varepsilon_0 L^2} q\,\vec{j}$$

Observa que la fuerza tiene dirección - $\vec{j}$, puesto que la carga es negativa.

c) El campo ecléctico en un punto $(0,y,0)$ viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{j}}{y^2} - \frac{\vec{j}}{2(L-y)^2}\right)$$

La fuerza será igual a cero cuando el campo eléctrico sea nulo:

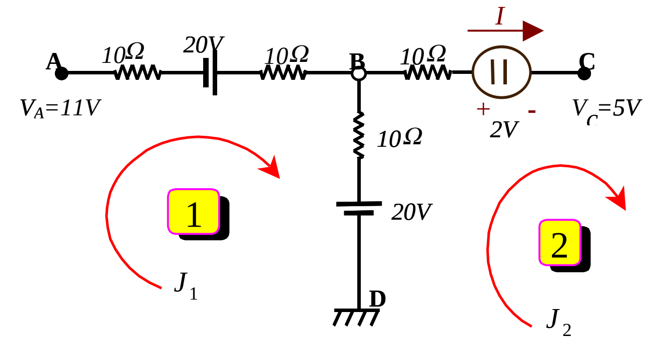
$$\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{j}}{y^2} - \frac{\vec{j}}{2(L-y)^2}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2(L-y)^2$$

$$y = \pm\sqrt{2}(L-y) \quad \Rightarrow \quad \left(1\pm\sqrt{2}\right)y = \pm\sqrt{2}\,L \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pm\sqrt{2}L}{1\pm\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \left(2\mp\sqrt{2}\right)L$$

De las dos soluciones que se obtienen de la ecuación de segundo grado, $y = \left(2+\sqrt{2}\right)L > L$ no tiene sentido puesto que queda fuera del espacio comprendido entre las dos esferas. De esta forma, la solución viene dada por:

$$y = \left(2-\sqrt{2}\right)L = 0{,}586\,L$$

a) Calcula la intensitat que circula pel motor i la potència que transforma.
b) Determina el generador equivalent de Thevenin entre A i B.
c) Si li afegim al circuit una resistència de 10 Ω entre els punts A i B, calcula la intensitat que circularia per la dita resistència utilitzant el generador equivalent de Thevenin.



a) Suponiendo que en el motor la intensidad va de izquierda a derecha, su polaridad será la indicada en la figura.
Utilizando el método matricial de mallas, con las intensidades definidas tal y como indica la figura, obtendremos la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 11+20-20 \\ 20-2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+10+10 & -10 \\ -10 & 10+10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

De donde, la intensidad que pasa por el motor $I=J_2$ viene dada por

$$I = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 11 \\ -10 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{500}{500} = 1\text{ A}$$

La potencia transformada por el motor es:

$$P' = \varepsilon' I = 2 \cdot 1 = 2\,W$$

b) La fuerza electromotriz del generador equivalente de Thevenin es igual a la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Para calcular esta diferencia de potencial, primeramente necesitamos la intensidad J_1:

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 13 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{350}{500} = \frac{7}{10} = 0{,}7\text{ A}$$

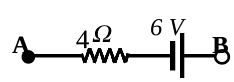
Con lo cual, la diferencia de potencial viene dada por:

$$\varepsilon_T = V_{AB} = 10 \cdot J_1 - 20 + 10 \cdot J_1 = 20 \cdot 0{,}7 - 20 = -6 \quad V$$

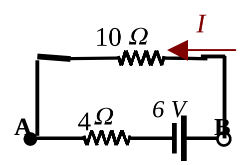
Y la resistencia del generador de Thevenin:

$$R_T = \frac{1}{1/(10+10) + 1/10 + 1/10} = 4\,\Omega$$

De esta forma, el generador equivalente de Thevenin será:



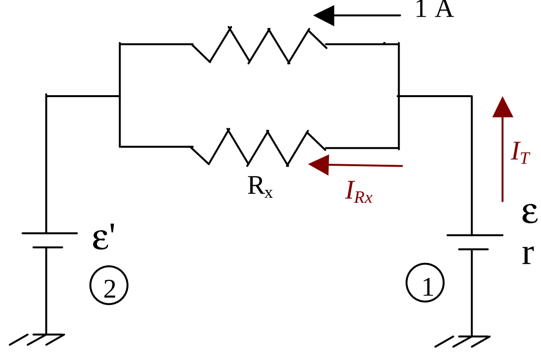
c) La intensidad que circula por la resistencia, en el sentido indicado, es igual a:



$$I = \frac{6}{10+4} = \frac{3}{7} = 0{,}42\ A$$

una corriente de 1 A, en el sentido indicado en el dibujo. El generador 1 genera una potencia de 25 W, de los cuales consume el 20% en su resistencia interna, suministrando el resto al circuito. El receptor 2 puede considerarse ideal, y consume una potencia de 5 W. Calcular:

a) La potencia consumida por la resistencia desconocida R_x.
b) El valor de la resistencia desconocida, R_x
c) Las corrientes que recorren cada una de las ramas.
d) La f.e.m. y resistencia interna del generador 1.
e) La f.c.e.m. del receptor 2.
f) El rendimiento (%) del generador 1.



a) Realizando un balance de potencias:

$$P_{generada} = P_{consumida}$$

La potencia generada es de 25 W, y la potencia consumida es:

$$P_{consumida} = P_r + P_{5\Omega} + P_{Rx} + P_{\varepsilon'} = 5 + 5\cdot 1^2 + P_{Rx} + 5 = 15 + P_{Rx}$$

De donde obtenemos finalmente $P_{Rx} = 25 - 15 = 10\,W$

b) A partir de la potencia consumida en la resistencia de 5 Ω se puede obtener la diferencia de potencial en la resistencia,

$$P_{5\Omega} = VI \quad \Rightarrow \quad V = \frac{P_{5\Omega}}{I} = \frac{5}{1} = 5\,V$$

que será igual a la diferencia de potencial en la resistencia R_x, que se puede expresar como,

$$V = 5\,V = R_x I_{Rx}$$

Por otro lado, la potencia en la resistencia R_x es igual a:

$$P_{Rx} = 10\,W = I_{Rx}^2 R_x$$

con lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es:

$$I_{Rx} = 2\,A \qquad R_x = 2{,}5\,\Omega$$

c) $I_{Rx} = 2\,A$, $I_T = I_{Rx} + I_{5\Omega} = 2 + 1 = 3\,A$

d) A partir de las potencias:

$$P_r = rI_T^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{9} = 0{,}56\,\Omega$$

$$P_{generada} = \varepsilon I \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{25}{3} = 8{,}3\,V$$

e)

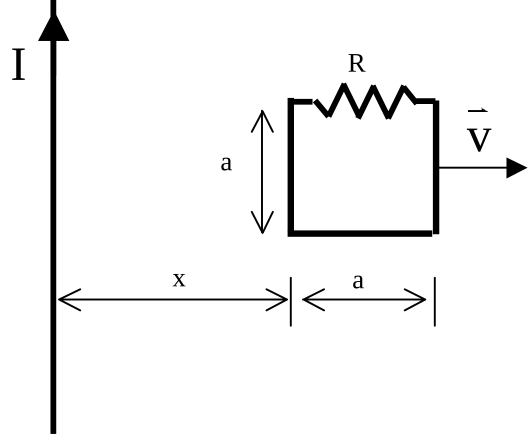
$$P_{\varepsilon'} = \varepsilon' I_T \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = \frac{5}{3} = 1{,}67\,V$$

f)

$$\eta = \frac{P_{suministrada}}{P_{generada}} = \frac{20}{25} = 0{,}8 = 80\%$$

cuadrada de lado a y resistencia eléctrica R que se aleja con velocidad constante $\vec{v}$, tal como se muestra en la figura. En el instante en el que el lado de la espira más próximo al conductor se encuentra a una distancia x=2a del mismo, calculad:

a) Flujo del campo magnético a través de la espira.
b) F.e.m. inducida en la espira.
c) Intensidad inducida en la espira, indicando su sentido.
d) Fuerza total ejercida por el campo magnético sobre la espira.
e) Si el lado más próximo de la espira se encuentra a una distancia 3a ¿la intensidad inducida será mayor, menor o igual que en el caso anterior?. Justifica la respuesta.



a) El campo magnético creado por la corriente I que circula por el hilo rectilíneo e indefinido depende de la distancia x al hilo

$$B(x)=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

y su dirección y sentido en el plano donde se encuentra la espira es perpendicular y hacia dentro. El flujo del campo magnético a través de la espira es

$$\Phi=\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}=\int_x^{x+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,a dx=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$$

ya que los vectores **B** y **dS** son paralelos en toda la superficie S de la espira y se ha integrado en elementos de superficie adx desde el más cercano al hilo (a distancia x) hasta el más lejano (a distancia $x+a$).
El flujo del campo magnético en $x=2a$ es entonces

$$\Phi(2a)=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

b) La fuerza electromotriz inducida en la espira es, según la ley de Faraday

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\frac{v}{x+a}-\frac{v}{x}\right)=\frac{\mu_0 Ia^2 v}{2\pi x(x+a)}$$

donde $v=dx/dt$ es la velocidad de la espira. La fem inducida en la espira cuando se encuentra en $x=2a$ es

$$\varepsilon(2a)=\frac{\mu_0 Iv}{12\pi}$$

c) y la corriente i inducida en la espira en esa misma posición es

$$i(2a)=\frac{\mu_0 Iv}{12\pi R}$$

donde R es la resistencia eléctrica de la espira y el sentido de la corriente es, según la ley de Lenz, horario, pues se opone así a la reducción del flujo magnético hacia dentro que se produce al alejarse la espira del hilo rectilíneo.

d) La fuerza que ejerce el campo magnético creado por la corriente rectilínea sobre la espira por la que circula la corriente inducida i se puede calcular como la suma de las fuerzas sobre sus cuatro lados. Se observa fácilmente que las fuerzas sobre los lados superior e inferior son iguales y opuestas, mientras que para los lados derecho e izquierdo tienen la misma dirección y sentidos opuestos, luego

$$F=F_{der}-F_{izq}=iaB(3a)-iaB(2a)=\left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\right)^2\left(\frac{v}{72R}-\frac{v}{48R}\right)=-\left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\right)^2\frac{v}{144R}$$

con dirección y sentido contrario a la velocidad.

e) La intensidad inducida cuando la espira se ha alejado hasta $x=3a$ será menor, ya que tanto el flujo como su variación son menores al alejarse la espira del hilo rectilíneo a velocidad constante. En efecto,

$$i(3a)=\frac{\mu_0 Iv}{24\pi R}<i(2a)$$