Examen FFI Facultad de Informática. Septiembre 2004
Teoría

1. Demuestra que si un campo vectorial $\vec{F}$ deriva de potencial, la circulación de $\vec{F}$ entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria.

Si $\vec{F}$ deriva de potencial, existe una función escalar $V / \vec{F} = -\nabla V$

Entonces la circulación de $\vec{F}$ entre dos puntos cualesquiera:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla V \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V_A - V_B$$

Resultado que depende únicamente del punto inicial y final, siendo independiente, por lo tanto, de la trayectoria seguida.

2. Enuncia la ley de Coulomb y el principio de superposición aplicado a fuerzas eléctricas sobre una carga en reposo.

La fuerza ejercida por una carga puntual q, sobre otra carga puntual q', ambas en reposo, es proporcional al producto de ambas cargas e inversamente proporcional a la distancia entre ellas al cuadrado: $\mathrm{F} = \mathrm{K}\dfrac{\mathrm{q.q'}}{\mathrm{r}^2}$

La dirección de la fuerza es la recta que une ambas cargas, y la fuerza será atractiva cuando ambas cargas tengan el mismo signo y repulsiva si son de signo contrario.

El principio de superposición indica que la fuerza total ejercida por un conjunto de cargas sobre una carga puntual q, resulta de la suma algebraica de las fuerzas ejercidas por cada una de las cargas considerada de forma independiente a las demás.

3. Sea un conductor esférico hueco de radios R_1 *y* R_2 (R_1<R_2). Si introducimos una carga *Q* en el centro de la esfera, calcula:

a) Carga existente en cada una de las superficies del conductor.

b) Densidad superficial de carga en cada una de las superficies.

Si después conectamos el conductor a tierra, manteniendo la carga central *Q,* calcula:

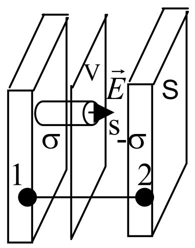
c) Carga existente en cada una de las superficies del conductor.

d) Densidad de carga en cada una de las superficies.

	Conductor aislado		Conductor conectado a tierra	
	Carga	σ	Carga	σ
Superf. R_1	-Q	$\dfrac{-Q}{4\pi R_1^2}$	-Q	$\dfrac{-Q}{4\pi R_1^2}$
Superf. R_2	Q	$\dfrac{-\mathrm{Q}}{4\pi \mathrm{R}_2^2}$	0	0

4. Deduce la expresión del campo eléctrico entre las armaduras de un condensador plano, cargado con una carga *Q*, distancia de separación entre las armaduras *d* y superficie de las mismas *S*. A partir de la misma, deduce la expresión de la capacidad de un condensador plano.

En el interior de un condensador plano, despreciando el efecto de bordes, se puede considerar que las superficies equipotenciales son paralelas a las armaduras y el campo eléctrico es, por lo tanto, perpendicular a éstas en cada punto:



Tomando como superficie de Gauss un cilindro perpendicular a una de las armaduras de forma que una de sus bases esté en el interior del conductor (E=0), y teniendo en cuenta que el campo $\vec{E}$ es tangente a la superficie lateral, sólo habrá flujo de campo eléctrico a través de la base de la superficie que se haya en el interior del condensador. Luego, por el teorema de Gauss:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S E\cdot ds = E\int_S ds = E.s = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.s}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

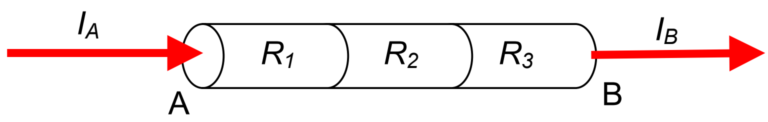
que es constante en el interior del condensador.

Para hallar la capacidad calcularemos la d.d.p entre las armaduras siguiendo una trayectoria perpendicular a ellas y, por lo tanto, tangente a $\vec{E}$.

$$V = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 E\cdot dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\int_1^2 dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.d = \frac{Qd}{S\varepsilon_0} \rightarrow C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0\frac{S}{d}$$

donde d es la separación entre armaduras y S la superficie de cada armadura.

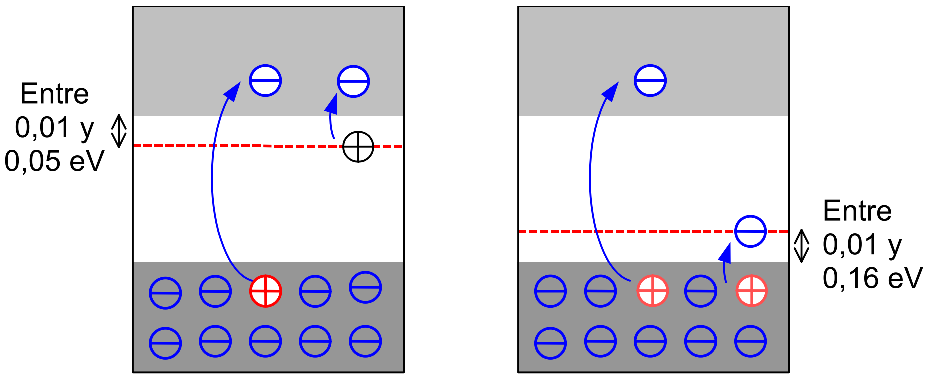
5. Un cilindro está formado por tres conductores cilíndricos, de igual geometría pero de resistividad diferente, colocados tal como se muestra en la figura, donde la resistencias R_1, R_2 y R_3 cumplen la relación $R_1<R_2<R_3$.
Si por la sección A circula una intensidad I_A ,¿cómo será la intensidad I_B que sale por la sección B? ¿Mayor, menor o igual? Justifica con claridad la respuesta.



La intensidad en A es igual a la intensidad en B.
La intensidad es la carga por unidad de tiempo que atraviesa una sección del conductor. Si consideramos el volumen formado por las tres resistencias, dado que no existen fuentes ni sumideros de carga eléctrica en un conductor, la misma carga que entra en el volumen (I_A) debe salir del mismo (I_B).

6. Representa y explica el esquema de bandas de energía de un semiconductor tipo p y uno tipo n.
Cuando añadimos impurezas donadoras a un material semiconductor, en las proximidades de la banda de conducción aparece una nueva banda muy estrecha donde se sitúan los electrones adicionales de los átomos donadores. La energía de estos electrones se encuentra muy cerca del nivel inferior de la banda de conducción (con una separación del orden de 0,01 – 0,05 eV, lo que significa que con un aporte de energía muy pequeño estos electrones pueden pasar a la banda de conducción, aumentando de esta manera la conductividad del material. Según la concentración de impurezas que se añaden se puede conseguir diferentes valores de la conductividad. Por otro lado, la

generación de pares electrón–hueco se produce de la misma forma que en un material semiconductor puro.

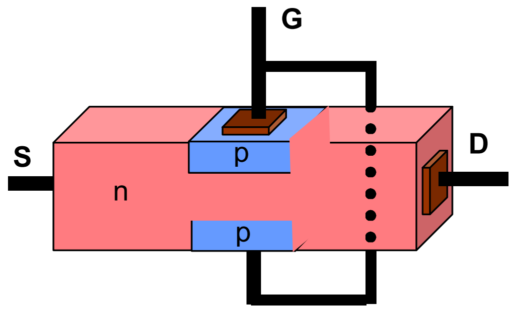


tipo *n* tipo *p*

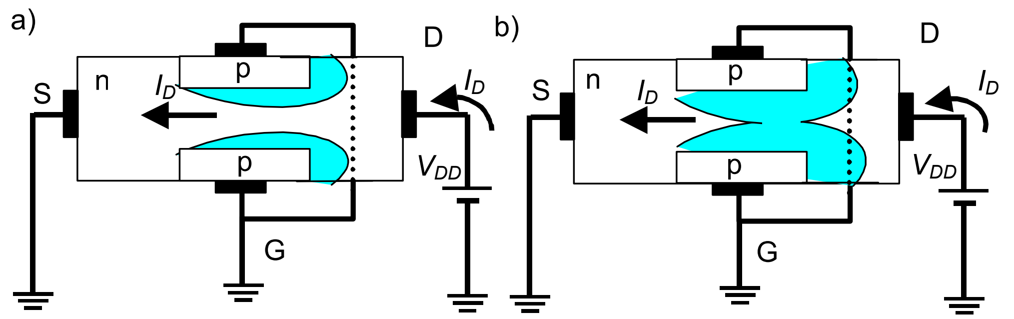
Si dopamos un semiconductor con impurezas aceptoras, en las proximidades de la banda de valencia aparece una nueva banda muy estrecha vacía. Algunos electrones de la banda de valencia pueden pasar a estos niveles aceptores, dejando huecos en la banda de valencia. Estos huecos son los responsables de la conducción en el material. De nuevo, el proceso de generación de pares electrón–hueco también se produce.

7. Describe brevemente la estructura del transistor de efecto de campo de unión (JFET) de canal n.

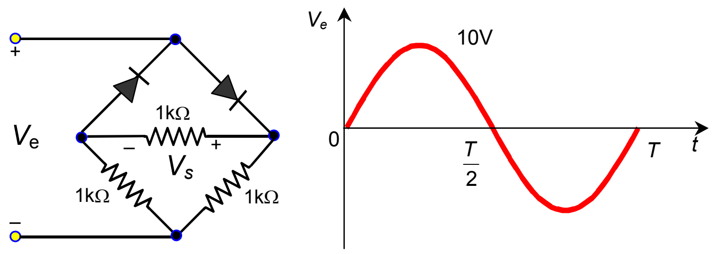
Consiste fundamentalmente en una barra de un material extrínseco de tipo *n* . A cada extremo del canal se incorporan dos terminales del transistor, la Fuente, S, y el Drenador, D. En dos laterales opuestos de la barra del semiconductor existen dos zonas con un dopado "opuesto" al que conforma el resto de la barra. Ambas zonas está unidas a un tercer terminal denominado Puerta, G. La figura muestra una representación de la estructura física del transistor descrito.



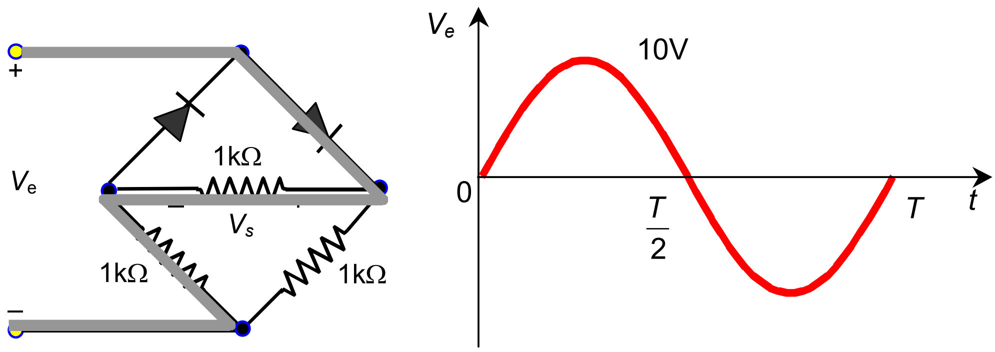
Los tres terminales del transistor se conectarán a diferentes potenciales respecto de un punto dado. Así la Fuente(S) se conectara directamente a dicho punto, mientras que la Puerta (G) lo hará a un potencial menor o igual, V_G, y el drenador a un potencial mayor, V_{DD}, tal como se muestra en la figura, para un JFET con canal *n*.

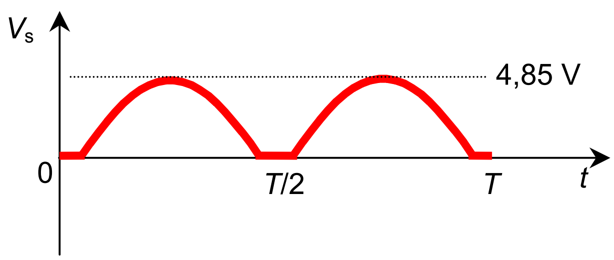


8. Calcula y representa la tensión de salida V_S del circuito de la figura, para la tensión de entrada V_e indicada en la figura. Los diodos son de silicio, con una tensión umbral de 0,7 V.



El diodo produce una caída de tensión de 0,7 V: 10 – 0,7 = 9,3 V; y las dos resistencias iguales dividen la tensión ente dos: V_S = 9,3/2 = 4,85 V





9. Por una bobina de n espiras y sección S = 30 cm^2 circula una corriente I=2 A. Si dicha bobina se encuentra en el seno de un campo magnético B = 3 T, uniforme, ¿qué número n de espiras ha de tener para que se produzca un par de fuerzas máximo de momento M = 1,8 kNm?

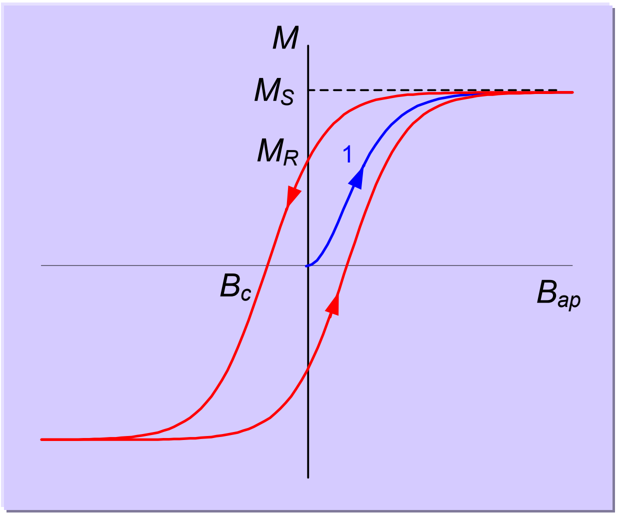
El momento del par vale:
$\vec{M} = nI\vec{S} \times \vec{B}$, por lo que su valor máximo es $nISB$.

$$n = \frac{M_{max}}{ISB} = \frac{1800}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-4} \cdot 3} = 100000\ espiras$$

10. Representa gráficamente el ciclo de histéresis de un material ferromagnético y explica sus características fundamentales.

Cuando un material ferromagnético es sometido a un campo magnético, experimenta una imantación que crece con el campo aplicado B_{ap}. Si se representa la imantación M, frente a B_{ap}, se obtiene la curva de primera imantación (1) como muestra la figura. La imantación no crece indefinidamente: aunque se aumente mucho B_{ap}, la imantación no puede aumentar más allá de cierto límite denominado imantación de saturación M_s.

Si a continuación se disminuye gradualmente B_{ap}, el material pierde imantación, pero no toda. Aunque se anule el campo aplicado, queda una imantación remanente M_R. Si se quiere "borrar" todo resto de imantación, se deberá aplicar un campo externo o campo coercitivo B_c, en sentido contrario al previo. Si se sigue aumentando el campo aplicado en dicho sentido se alcanza de nuevo una imantación de saturación en sentido contrario al anterior, tal y como se observa en la figura.

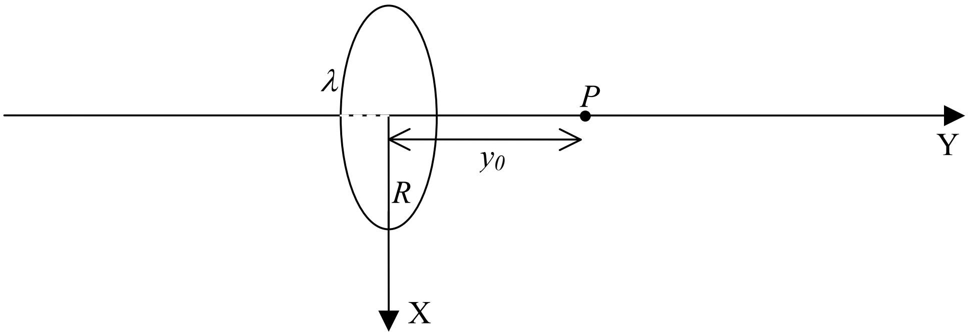


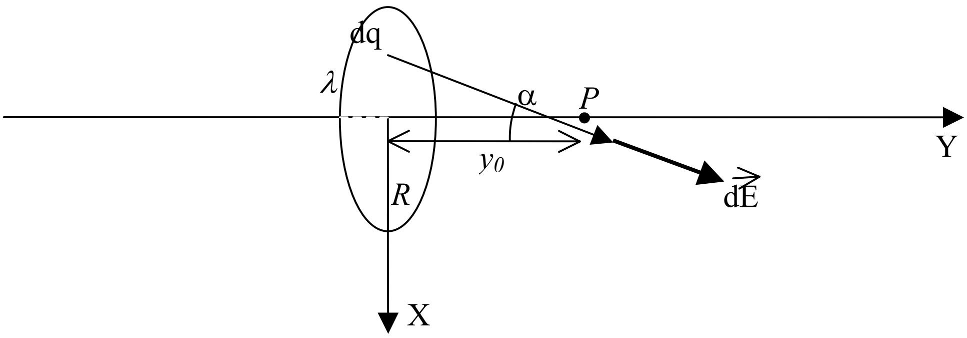
Si posteriormente se disminuye gradualmente B_{ap}, y luego se vuelve a cambiar el sentido, los valores anteriores no se repiten, es decir la curva no es reversible. Este efecto de denomina histéresis, y al ciclo completo de imantación – desimantación que se produce al aplicar un campo magnético alterno, se denomina ciclo de histéresis. Los ciclos de histéresis se producen cuando se aplica a un barra de hierro un campo magnético que varía con el tiempo, por ejemplo sinusoidalmente: estamos magnetizando y desmagnetizando el material con una frecuencia igual a la del campo aplicado.

En esta curva de histéresis, el área delimitada es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso de imantación – desimantación.

Problemas Septiembre

1.- Sea una distribución con forma de anillo, de densidad lineal de carga λ>0 y radio *R*.
a) Halla el campo eléctrico creado por dicha distribución en un punto *P* del eje del anillo situado a una distancia y_0 de su centro, como se indica en la figura.
b) Halla el potencial eléctrico en el mismo punto *P*.
c) ¿Existe algún punto tal que al colocar una carga puntual *Q* igual en valor y signo a la carga total existente en el anillo, se anule el campo eléctrico en el punto *P*? En caso afirmativo ¿cuáles son las coordenadas de ese punto? En caso contrario razona la respuesta.
d) ¿Existe algún punto tal que al colocar la carga puntual *Q* del apartado c) se anule el potencial eléctrico en el punto *P*? En caso afirmativo ¿cuáles son las coordenadas de ese punto? En caso contrario razona la respuesta.





a) Para aplicar superposición dividimos la distribución en cargas elementales dq, que al estar sobre la circunferencia su valor, en función de la densidad lineal de carga, será:
$dq = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot R \cdot d\theta$ donde dθ es el arco elemental. El campo elemental en el punto P será:
$d\vec{E} = \dfrac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ en dirección radial y donde $r = \sqrt{R^2 + {y_0}^2}$. Por la simetría del problema, la componente en dirección normal al eje se anulará con la de la carga simétrica, y nos quedará únicamente la componente en dirección del eje:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_n + d\vec{E}_y = d\vec{E}_n + dE_y\vec{j} = d\vec{E}_n + \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\vec{j}$$

$$dE_y = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{y_0}{r}$$

$$E = E_y = \int_0^{2\pi}\frac{\lambda R y_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}d\theta = \frac{\lambda R y_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}2\pi = \frac{\lambda R y_0}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2 + {y_0}^2}\right)^3}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R y_0}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3}\vec{j}$$

b) Para aplicar superposición dividimos la distribución en cargas elementales dq. El potencial elemental en el punto P será: $dV = \dfrac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r} d\theta = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r} 2\pi = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}}$$

c) Para que una carga puntual cree un campo que pueda anular el del anillo la carga debe estar en la dirección del eje y en el lado contrario del anillo (a la derecha de P en el dibujo). Supongamos que está en un punto de estas características situado a una distancia y_Q a la derecha del punto P. El campo creado será:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_\lambda + \vec{E}_Q = \frac{\lambda R y_0}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3}\vec{j} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y_Q^{\ 2}}\vec{j} = 0$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_\lambda + \vec{E}_Q = \frac{\lambda R y_0}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3}\vec{j} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y_Q^{\ 2}}\vec{j} = 0$$

$$\frac{\dfrac{Q}{2\pi R} R y_0}{2\varepsilon_0\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y_Q^{\ 2}} \rightarrow \frac{y_0}{\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3} = \frac{1}{y_Q^{\ 2}} \rightarrow y_Q = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3}{y_0}}$$

$$P_Q\left(0, y_0 + \sqrt{\frac{\left(\sqrt{R^2 + y_0^{\ 2}}\right)^3}{y_0}}, 0\right)$$

d) El potencial es escalar, la carga positiva crea un potencial positivo, independientemente del punto en que se encuentre, por lo que no será posible anular el potencial con otra carga positiva.

2.- Sea una espira circular de radio *b* por la que circula una intensidad de corriente *I* = I_0 sen *wt* y otra espira de radio *a* (*a* <<*b*) y resistencia R_a, concéntrica con la anterior. Halla:

a) ¿Cuál es el campo magnético creado por la corriente *I* de la espira de radio *b* en su centro?

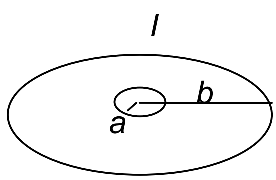
Suponiendo que el campo es uniforme e igual al valor calculado en el centro en la superficie de la espira de radio a, calcula:

b) El flujo del campo magnético creado por la espira de radio *b* a través de la espira de radio *a*.

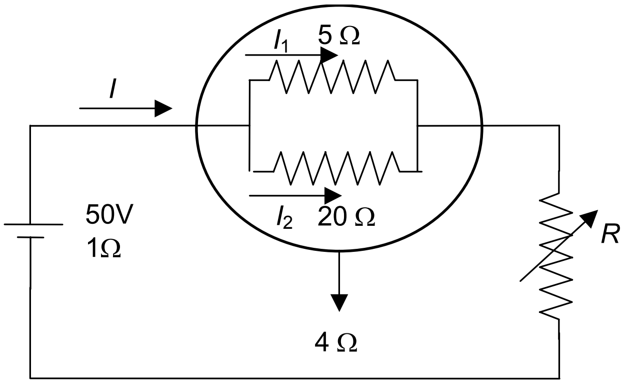
c) La intensidad inducida en la espira de radio *a*.

d) El coeficiente de inducción *M* entre las dos espiras

e) Si por la espira de radio *a* circulase una intensidad I_a hallar el flujo del campo magnético creado por la espira de radio *a* través de la espira de radio *b.*



3. Dado el circuito de la figura, ¿cuál debe ser el valor de la resistencia variable R para que la potencia disipada en la resistencia de 5Ω sea de 20 W? En estas condiciones, calcula el rendimiento del generador y realiza un balance de potencias.



A partir de la potencia consumida en la resistencia de 5 Ω:

$$P = 5I_1^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2 \text{ A}$$

Como la resistencia de 5 Ω y la de 20 Ω están en paralelo:

$$5I_1 = 20I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 / 4 = 0{,}5 \text{ A}$$

Con lo cual la intensidad total es igual a

$$I = I_1 + I_2 = 2{,}5 \text{ A}$$

Por otro lado, a partir de la ecuación del circuito obtenemos la resistencia incógnita R:

$$I = \frac{50}{1+4+R} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad R = 15\,\Omega$$

Donde se ha tenido en cuenta que la resistencia equivalente de las dos resistencias en paralelo es igual a:

$$R_{eq} = \frac{1}{1/5 + 1/20} = 4\,\Omega$$

El rendimiento del generador es:

$$\eta = \frac{P_{sum}}{P_{gen}} = \frac{\varepsilon I - rI^2}{\varepsilon I} = \frac{\varepsilon - rI}{\varepsilon} = 0{,}95$$

Balance de potencias:

Potencia suministrada por el generador

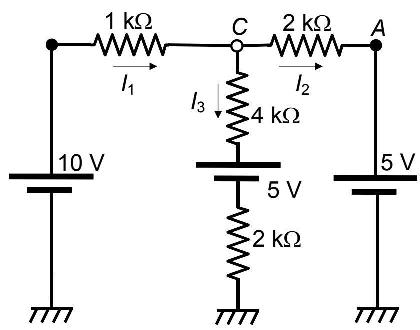
$$P_{sum} = \varepsilon I - rI^2 = 118{,}75 \text{ W}$$

Potencia consumida por las resistencias del circuito:

$$P = 5I_1^2 + 20I_2^2 + RI^2 = 20 + 5 + 93{,}75 = 118{,}75 \text{ W}$$

Vemos que la potencia suministrada por el generador es igual a la potencia consumida en el circuito por las resistencias.

4. Dado el circuito de la figura:



a) Determina las intensidades de rama I_1, I_2, e I_3.
b) Calcula el potencial en el punto C.
c) Calcula el equivalente de Thevenin entre los puntos A y *tierra*, indicando claramente su polaridad.
d) Entre los puntos A y tierra se conecta un diodo de tensión umbral 0,7 V en polarización directa y una resistencia en serie de 1kΩ. Calcula la intensidad de corriente que circula

por el diodo, indicando claramente su sentido.

a) Resolviendo por el método de las mallas:

$$\begin{pmatrix} 10-5 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{40}{20} = 2\text{ mA} \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{30}{20} = 1{,}5\text{ mA}$$

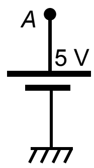
$$I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}5\text{ mA}$$

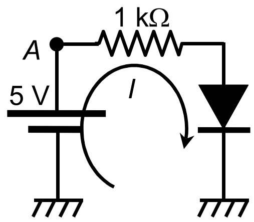
b)

$$V_C - V_A = 2I_2 = 3\text{ V}$$

$$V_C = 3 + \mathrm{V_A} = 3 + 5 = 8\text{ V}$$

c) Evidentemente, la resistencia entre A y tierra es cero, y la diferencia de potencial entre A y tierra es de 5 V, por lo que el equivalente de Thevenin es el indicado en la figura de la derecha.





d) Utilizando el equivalente de Thevenin calculado en el apartado anterior

$$I = \frac{5 - 0{,}7}{1} = 4{,}3\text{ mA}$$