FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Los ángulos:

Se pueden medir en:

GRADOS

RADIANES: El radián se define como el ángulo que limita un arco cuya longitud es igual al radio del arco. Por tanto, el ángulo, ***α***, completo en radianes de una circunferencia de radio, ***r***, sería:

$$\alpha_{circunferencia} = \frac{L_{circunferencia}}{r} = \frac{2 \times \pi \times r}{r} = 2 \times \pi$$

Su símbolo es ***rad***.

$$1rad = \frac{360^0}{2 \times \pi} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$$

$$1^0 = \frac{2 \times \pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745rad$$

Las Funciones Trigonométricas:

$$y = senx$$
$$y = \cos x$$
$$y = tgx$$

Las ecuaciones trigonométricas:

- Razones trigonométricas del ángulo diferencia:

$$sen|\alpha - \beta| = sen\alpha \cos \beta - \cos \alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + sen\alpha sen\beta$$
$$tg|\alpha - \beta| = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$$

- Razones trigonométricas del ángulo suma:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos \beta + \cos \alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - sen\alpha sen\beta$$
$$tg|\alpha + \beta| = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

- Razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- Razones trigonométricas del ángulo doble:

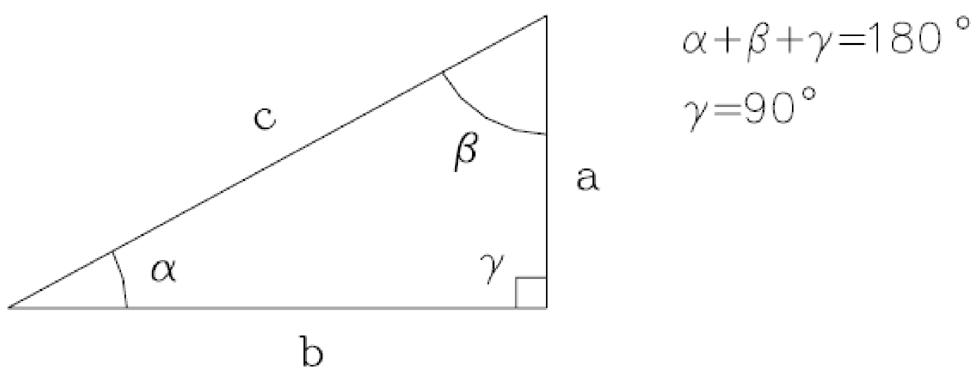
$$sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

- Sumas y diferencias de senos y cosenos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$senA + senB = 2sen\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$senA - senB = 2\cos\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$senA + senB = -2sen\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2}$$

<u>Geometría y trigonometría básica:</u>

El triángulo rectángulo:



El teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Relaciones trigonométricas fundamentales:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta \qquad \text{sen}\,\alpha = 1/\text{cosec}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{sen}\,\beta \qquad \cos\alpha = 1/\sec\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \text{cotg}\,\beta \qquad \tan\alpha = 1/\text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta \qquad \tan\alpha = \text{sen}\,\alpha/\cos\alpha$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \text{cosec}\,\beta \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta$$

$$\text{sen}\,(90-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}\,(90-\alpha) = \tan\alpha$$

$$\cos\,(90-\alpha) = \text{sen}\,\alpha \qquad \sec\,(90-\alpha) = \csc\alpha$$

$$\tan\,(90-\alpha) = \text{cotg}\,\alpha \qquad \csc\,(90-\alpha) = \sec\alpha$$

$$\text{sen}\,(180\pm\alpha) = \mp\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{cotg}\,(180\pm\alpha) = \pm\,\text{cotg}\,\alpha$$

$$\cos\,(180\pm\alpha) = = \cos\alpha \qquad \sec\,(180\pm\alpha) = = \sec\alpha$$

$$\tan\,(180\pm\alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \csc\,(180\pm\alpha) = \mp\csc\alpha$$

CÁLCULO INTEGRAL

Integrales inmediatas:

1. $\int \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] dx = f(x) + c$
2. $\int u^m \, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c \, , m \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c \, , a > 0, a \neq 1$
5. $\int e^u \, du = e^u + c$
6. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
7. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
8. $\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + c$
9. $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + c$
10. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$
11. $\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + c$
12. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$
13. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$
14. $\int \sec u \; \tan u \, du = -\csc u + c$
15. $\int \csc u \; \cot u \, du = -\csc u + c$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{u}{a} + c$

Ejemplos:

$$\int \frac{1}{2+x}dx = \ln|2+x| + C$$

$$\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3arctgx + C$$

La integral definida: Regla de Barrow.

Dada una función f continua en un intervalo [a,b] y sea g(x) cualquier primitiva de f, es decir g'(x)=f(x). Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Ejemplos:

$$\int_0^\pi \cos(x)dx = sen(\pi) - sen(0) = 0$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Integral de Riemann: El área bajo una curva f(x)

La **integral de Riemann** es una operación sobre una función continua y limitada en un intervalo (a;b), donde a y b son llamados los extremos de la integración. La operación consiste hallar el límite de la suma de productos entre el valor de la función en un punto x_i* y el ancho Δx del subintervalo conteniendo al punto.

Normalmente se denota como:

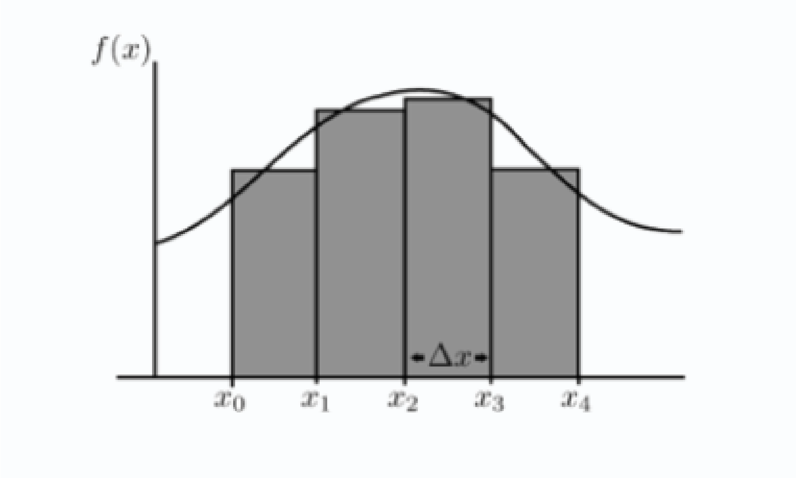
$$\int_a^b f(x)dx$$

El símbolo $\int$ es una "S" deformada. En el caso en que la función *f* tenga varias variables, el d*x* especifica la variable de integración.

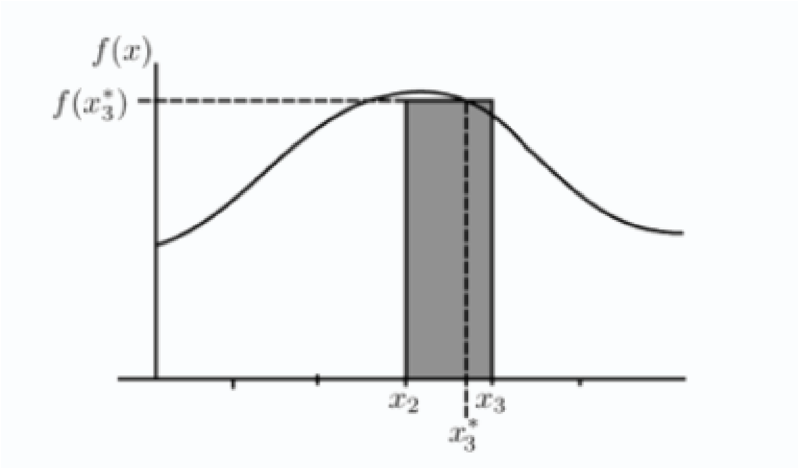
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

La **integral de Riemann** es una forma simple de definir la integral de una función sobre un intervalo como el área bajo la curva de la función.

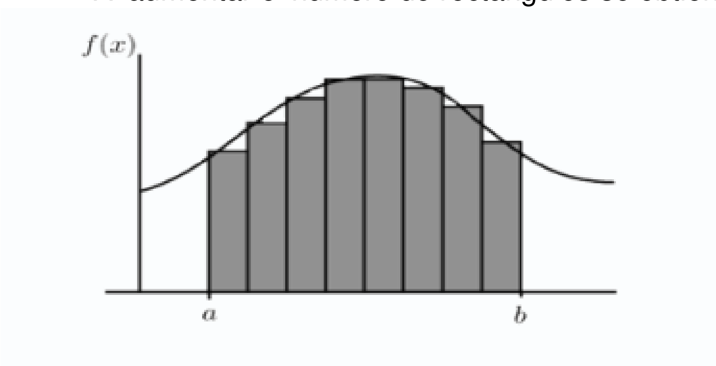
Para obtener una aproximación al área encerrada debajo de una curva, se la puede dividir en rectángulos como indica la figura.

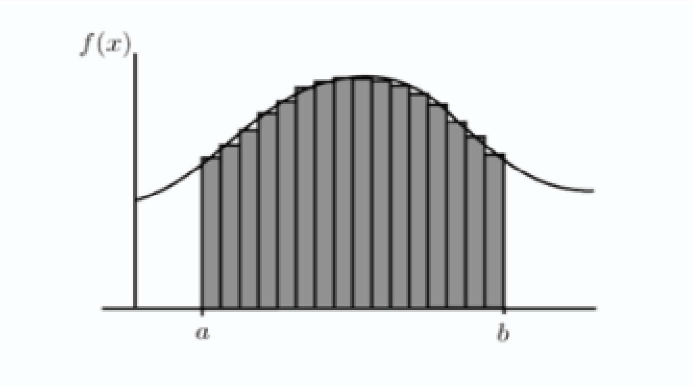


El área de cada rectángulo, es el producto de la función el un punto, por el ancho del intervalo.



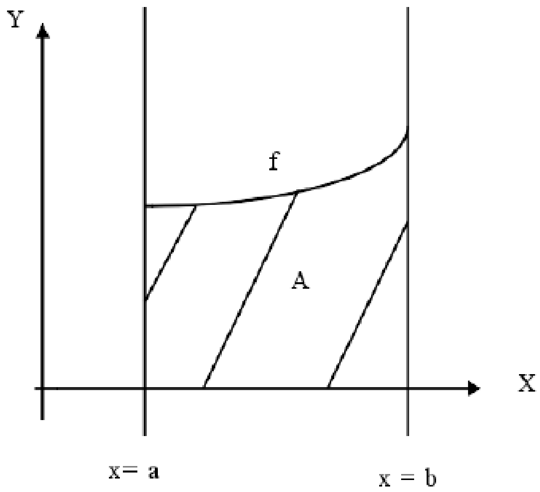
Al aumentar el número de rectángulos se obtiene una mejor aproximación.





$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_x$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos calcular el área comprendida entre la gráfica de una función positiva y= f(x), el eje OX y las rectas x=a, x=b.



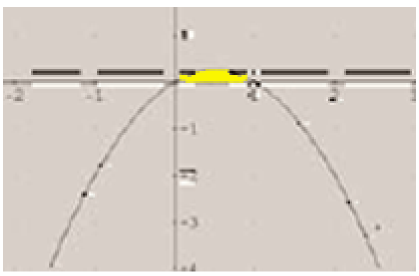
Dicha área se representa como:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

El área encerrada por dos curvas f y g entre a y b será:

$$A = \int_a^b |f - g|$$

EJEMPLO: Calcula el área del recinto determinado por la parábola $y = x - x^2$ y el eje OX:



El vértice de la parábola se encuentra situado sobre la línea discontinua. El área que queremos calcular aparece sombreada en amarillo. Por lo tanto los límites de integración serán los cortes de la curva con el eje x.

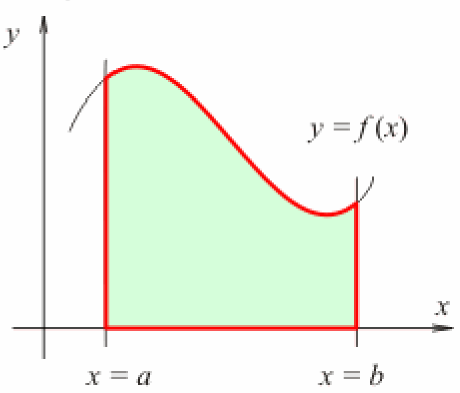
Sustituyendo en la ecuación y=0, obtenemos los valores: x=0, x=1.

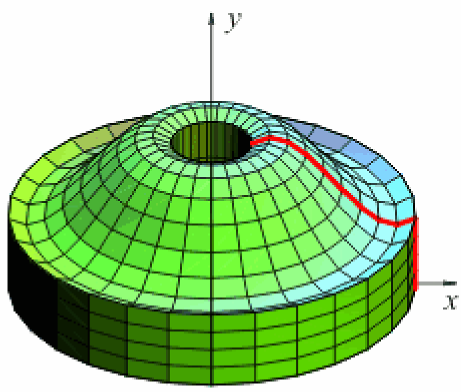
$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Volumen de sólidos de revolución mediante el cálculo integral.

Consideremos el problema general de hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje ***y,*** la región que está comprendida entre la curva $y = f(x)$, con $f(x) > 0$, el eje x, es decir, la recta horizontal $y= 0$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$.

La región y el sólido de revolución que genera aparecen representados en las siguientes figuras:





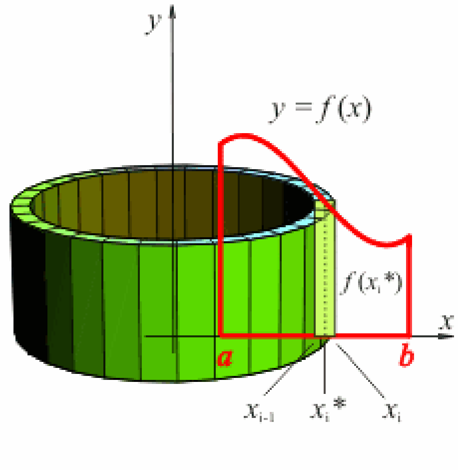
Dividamos el intervalo [a, b] en n subintervalos [x_{i-1}, x_i], todos con el mismo ancho: $\Delta x = (b - a) / n$.

Sea x_i^* el punto medio del i-ésimo subintervalo. Consideremos el rectángulo R_i construido sobre el i-ésimo subintervalo con una altura de $f(x_i^*)$ y hagámoslo girar en torno del eje y. Entonces se produce un casquete cilíndrico que tiene como radio medio x_i^*, como altura $f(x_i^*)$ y cuyo grosor es $\Delta x = x_{i-1} - x_i$.

Por lo tanto, el volumen V_i de este casquete cilíndrico está dado por:

$$V_i = (2\pi x_i^*) f(x_i^*) \Delta x$$

Para obtener un cálculo aproximado del volumen total del sólido de revolución debemos poner *n* casquetes cilíndricos de éstos, unos dentro de los otros, como lo ilustra la figura y después sumar los volúmenes de todos ellos:



$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi x_i^*) f(x_i^*) \Delta x$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2\pi x_i^*) f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

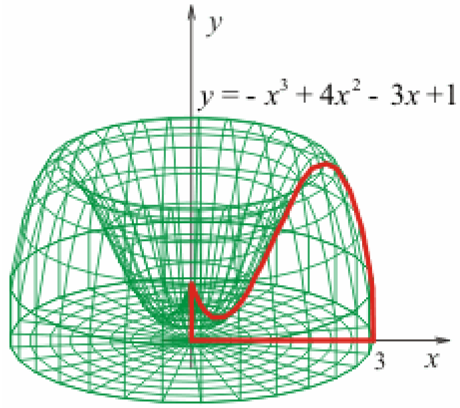
Y de esta manera hemos llegado a formular una regla general para el cálculo de volúmenes con el método de los casquetes cilíndricos. Es la siguiente:

Regla general: El volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje *y* la región que está comprendida entre la curva $y = f(x)$, con $f(x) > 0$, el eje *x* y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$, está dado por la integral:

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

EJEMPLO1:

Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar sobre el eje **y** la región comprendida, en el primer cuadrante, entre la curva $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical x=3.



En este caso la región que gira está delimitada por la curva $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, por el eje $\boldsymbol{x}$ y por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 3$. La altura de los casquetes cilíndricos varía de acuerdo a la función $f(x)$

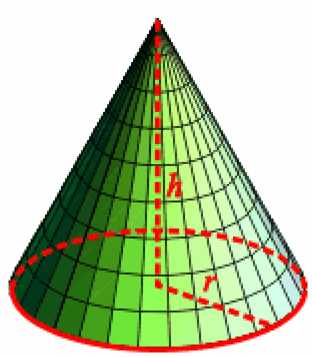
$$V = \int_0^3 2\pi x f(x)dx = 2\pi\int_0^3 x(-x^3 + 4x^2 - 3x + 1)dx = 2\pi\int_0^3 (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x)dx =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{99}{5}\pi$$

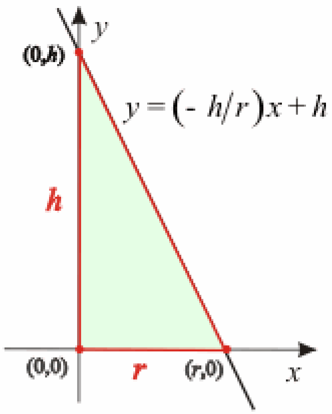
EJEMPLO2:

Demostrar, empleando el método de los casquetes cilíndricos, que el volumen de un cono de altura h y con radio r en su abertura está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Para comenzar, observemos que este cono puede ser visto como el sólido que se produce al hacer girar, alrededor del eje ***y***, la región triangular cuyos vértices son los puntos (0,0), (r,0) y (0,h), donde h y r son números reales positivos.

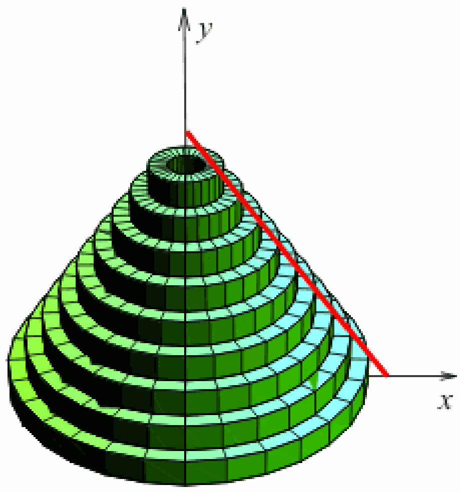


La ecuación de la recta que pasa por los puntos (r,0) y (0,h) es:

$$y = (-h/r)\, x + h$$

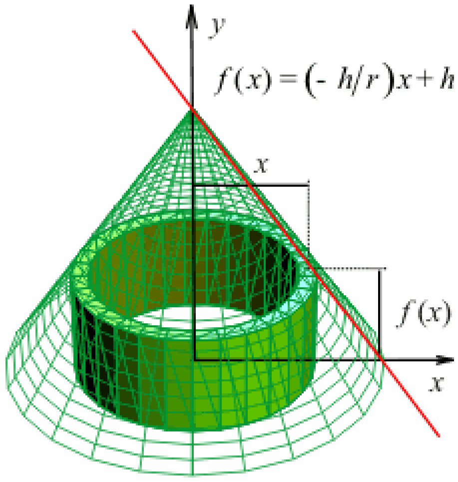
Puesto que su pendiente es $m = -\, h/r$ y la intersección con el eje y es el punto (0,h).

Ahora bien, para aplicar el método que nos ocupa, consideremos que el cono está formado por una serie de casquetes cilíndricos, incrustados los unos dentro de los otros, cuyos radios varían de 0 a r y cuyas alturas varían de 0 a h. Naturalmente, la altura de cada cilindro está dada por la recta $y = (-h/r)\ x + h$. Los casquetes cercanos al centro son altos y su radio es pequeño, mientras que los que se sitúan más al exterior tienen un radio amplio pero su altura es pequeña.



Debe ser claro entonces que un casquete cualquiera, de radio x, tiene como altura:

$$f(x) = (-h/r)\, x + h$$



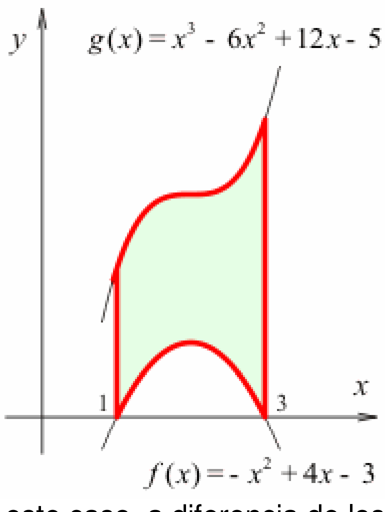
Por lo tanto, el volumen del cono viene dado por la integral:

$$V=\int_0^r (2\pi x)f(x)dx = 2\pi\int_0^r x((\frac{-h}{r})x+h)dx = 2\pi h\int_0^r (x-\frac{1}{r}x^2)dx = 2\pi h\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3r}\right]_0^r =$$

$$= 2\pi h(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3r}) = 2\pi r^2 h(\frac{1}{6}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

EJEMPLO3:

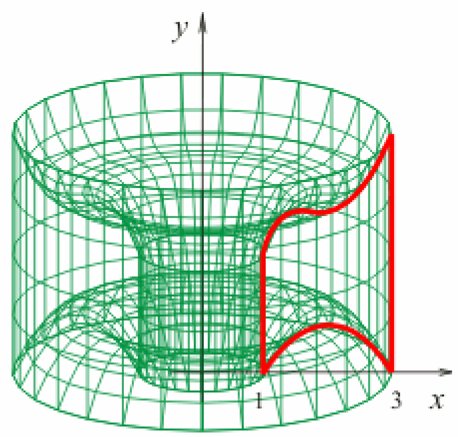
Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje ***y**,* la región que está delimitada por la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$, por la cúbica $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y por las verticales $x = 1$ y $x = 3$.



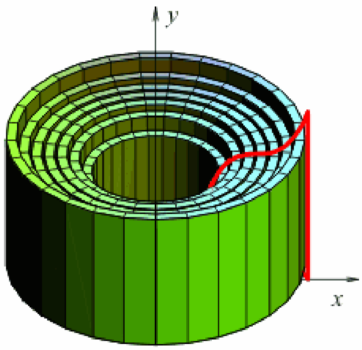
En este caso, a diferencia de los ejemplos anteriores, hay dos funciones involucradas que son:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$
$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

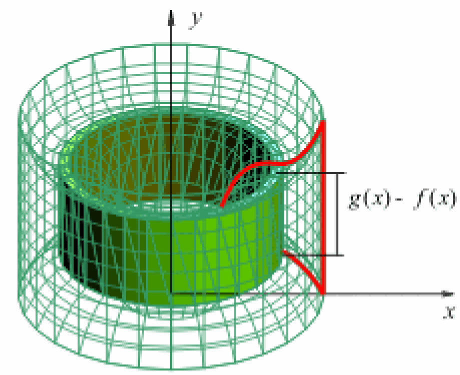
El sólido de revolución que se genera al hacer girar esta región alrededor del eje *y*. Obsérvese que está limitado arriba y abajo por dos superficies de revolución curvas y en la parte interior y en la exterior por dos superficies cilíndricas.



Consideremos ahora que este sólido está formado por una serie de casquetes cilíndricos incrustados, como antes, los unos dentro de los otros.



Esta vez los casquetes no sólo varían en cuanto a su radio y a su altura, sino que varían además en cuanto a su ubicación respecto del eje *x,* puesto que su base inferior está situada en la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ mientras que su base superior está situada en la cúbica $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Por lo tanto, un casquete cilíndrico de radio *x* tiene como altura:



$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (x^3 - 6x^2 + 12x - 5) - (-x^2 + 4x - 3) \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de este sólido de revolución está dado por la integral:

$$V=\int_1^3 2\pi x(g(x)-f(x))dx=\int_1^3 2\pi x(x^3-5x^2+8x-2)dx=2\pi\int_1^3 (x^4-5x^3+8x^2-2x)dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}-x^2\right]_1^3=\frac{\pi}{30}\left[12x^5-75x^4+160x^3-60x^2\right]_1^3=\frac{292}{15}\pi$$

VECTORES

Introducción:

Los vectores son magnitudes representadas por un segmento dirigido (flecha). Se caracterizan por poseer:

a) Una longitud, la que es representada por un valor numérico al que llamaremos módulo (también se la denomina norma)

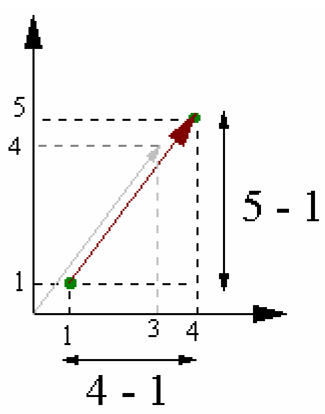
b) Una dirección, que es la recta a la que pertenece

c) Un sentido. La recta posee dos sentidos, generalmente estos se indican mediante signos "+" para un lado y "-" para el otro.

Los vectores pueden situarse en el plano, o sea dos dimensiones, o en el espacio, desde tres hasta infinitas dimensiones.

Veamos los vectores en el plano, las mismas propiedades pueden ser aplicadas en todas las otras dimensiones. Es así que podemos escribir su *origen* y su *extremo* como puntos (*x*, *y*). La ubicación de estos puntos le dará el sentido al vector. Si el origen del vector es, por ejemplo, A = (1, 1) y el extremo B = (4, 5), el vector será AB (de A hasta B).

Resulta interesante destacar que las coordenadas de estos puntos determinan un triángulo rectángulo, de manera que su módulo puede calcularse aplicando el teorema de *Pitágoras*. De manera que la longitud de cada cateto coincide con el valor que debería tener el vector si su origen fuera el centro de coordenadas.



$$|vector|=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}$$
$$|vector|=\sqrt{4^2+3^2}$$
$$|vector|=\sqrt{16+9}$$
$$|vector|=5$$

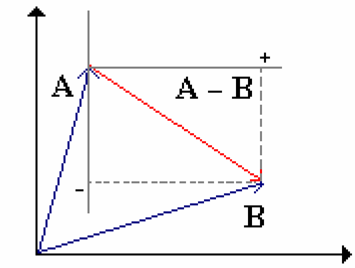
Sea A un vector de *n* dimensiones, A = {a_1, a_2, a_3, . . . a_n} llamamos módulo, norma o simplemente longitud del vector al valor numérico (escalar) determinado por:

$$\|A\|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$

Resta de vectores:

Restar dos vectores geométricamente implica "trazar" un tercer vector desde el extremo del primero hasta el extremo del segundo. Aritméticamente restamos las componentes verticales y horizontales entre sí.

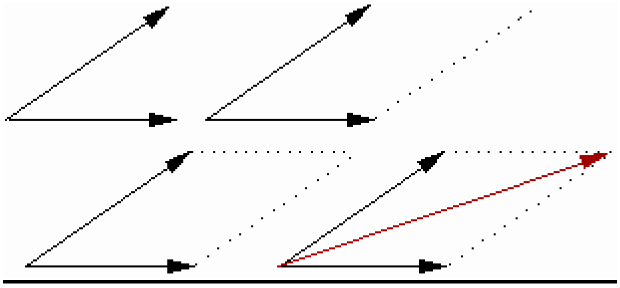
A = (7, 2)
B = (5, 4)
A - B = (7,2) – (5,4) = (7 – 5, 2 – 4) = (2, 2)



Suma de vectores:

Si tenemos dos vectores podemos sumarlos y hallar un tercero.

Método del paralelogramo: es un método geométrico en el cual trazamos dos segmentos paralelos a la dirección de cada vector, por los extremos de los mismos. Uniendo la intersección de los vectores y de los segmentos paralelos (puntos en color) obtendremos el vector suma.



Analíticamente, se suman las componentes.
A = (0, 5)
B = (5, 4)
A + B = (0,5) + (5,4) = (0 + 5, 5 + 4) = (5, 9)

Propiedades:

1. A + B = C (al sumar dos vectores se obtiene otro vector - ley de composición interna)
2. A = a (x_1 , x_2) = (a x_1 , a x_2) (para $a \in$ R) [el producto de un vector y un escalar da otro vector]
3. (- 1) . A = - A (opuesto) A^{-1} = 1 / A (inverso)
4. A + (B + C) = (A + B) + C (propiedad asociativa)
5. A + B = B + A (propiedad conmutativa)
6. a . (A + B) = a . A + a . B (para $a \in$ R) (propiedad distributiva)
7. A (a + b) = A . a + A . b (para $a \in$ R, $b \in$ R)
8. A + 0 = 0 + A = A [0 representa el vector nulo (0, 0) que es neutro en suma]

9. A + (- A) = 0
10. 1 . A = A
11. 0 . A = 0

Producto escalar entre dos vectores:

El resultado de esta operación, como su propio nombre indica, es un número escalar.

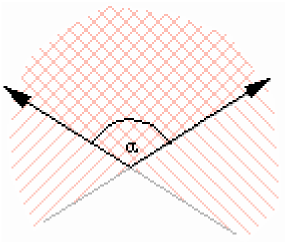
Si tenemos dos vectores A = $\{a_1, a_2, . . ., a_n\}$ y B = $\{b_1, b_2, . . ., b_n\}$ el producto escalar entre ambos puede hallarse mediante la sumatoria del producto de cada una de sus coordenadas.

$A . B = a_1 b_1 + a_2\, b_2 + . . . + a_n\, b_n$

Dados dos vectores A y B llamaremos *producto escalar* de A y B al *número real* determinado por:

$A . B = | A | . | B | . \cos \alpha$

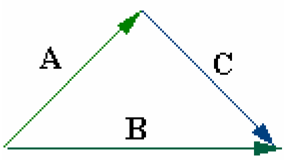
Siendo α el ángulo entre ambos vectores.

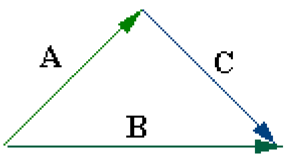


Propiedades:

1. A . B = B . A
2. A . (B + C) = A . B + A . C
3. (a . A) . B = A . (a. B) (para $a \in$ R)
4. A . A > 0 (para A $\neq$ 0)
5. | A . B| $\leq$ | A | . | B | (desigualdad de Cauchy - Schwarz)
6. Si A $\neq$ 0, B $\neq$ 0 y α = 90º $\Rightarrow$ A . B = 0 (El producto escalar de vectores ortogonales es nulo ya que el cos 90º = 0.)

¿Como se determina el valor del ángulo entre dos vectores?





$A - B = C$

$(A - B)^2 = C^2$

$A^2 - 2.\ A . B + B^2 = C^2$

$A^2 - 2.\ | A | . | B | . \cos \alpha + B^2 = C^2$

$$\cos\alpha = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2.A.B}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A^2 + B^2 - C^2}{2.A.B}\right)$$

Producto vectorial

Dados dos vectores A y B llamaremos *producto vectorial* de A = {a_1, a_2, a_3} y B={b_1, b_2, b_3} al *vector* determinado por:

A x B= $(a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ a_3b_1 - a_1b_3\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

Dicha expresión proviene de la resolución de un determinante de la siguiente forma:

Se considera una base ortonormal del espacio vectorial V3; B= {**e1**, **e2**, **e3**}.

Llamamos producto vectorial de los vectores **x** e **y** al vector **x^y** obtenido de la forma siguiente:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e1} & \mathbf{e2} & \mathbf{e3} \\ x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{vmatrix}$$

Siendo **x** = (x1,x2,x3) e **y** = (y1,y2,y3) respecto de la base B

Por tanto las coordenadas de **x^y** serán respecto de esa base:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left(\begin{vmatrix} x2 & x3 \\ y2 & y3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x1 & x3 \\ y1 & y3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x1 & x2 \\ y1 & y2 \end{vmatrix} \right)$$

En este caso son vectores de R^3 pero es aplicable a vectores de cualquier dimensión. El vector resultante será perpendicular al plano en el que se encuentran A y B.

Propiedades:

1. A x B = - (A x B)
2. A x (B + C) = A x B + A x C
3. (*a* . A) x B = A x (*a*. B) (para $a \in$ R)
4. A x B es perpendicular a A y a B
5. (A x B) x C = A x (B x C)
6. $(A \times B)^2 = (A . A) . (B . B) - (A . B)^2$
7. | A x B | = | A | . | B | . | sen a |

Momento de un vector respecto de un punto.

Se define el **momento de un vector v** respecto de un punto ***O*** a un vector $\vec{M}_O$ que verifica la condición:

$$\vec{v} = \vec{AB}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{v}$$

Observar que se trata de un producto vectorial de dos vectores, por lo que si los puntos son ***O (xo,yo,zo)*** y ***A (xA,yA,zA)***, el vector momento tiene la expresión:

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \text{o bien} \quad \vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \text{si } O\ (0,0,0).$$

Momento de un vector respecto de un eje

Sea un vector cuyo momento respecto a un punto ***O*** es el dado por la expresión anterior y sea ***E*** une eje que pasa por el punto ***O***, de manera que sea un vector unitario que señala la dirección y sentido de ***E***. El momento del vector respecto al eje ***E***, ***ME*** , viene dado por la expresión:

$$M_E = \vec{M}_O . \vec{u} = |\vec{M}_o| . |\vec{u}| . cos(\widehat{\vec{M}_0, \vec{u}})$$

Si los vectores de la fórmula anterior se expresan en función de sus componentes cartesianas, podremos escribir:

$$M_E = M_{ox} . u_x + M_{oy} . u_y + M_{oz} . u_z$$