

### 3.4. Ejercicios del Capítulo 3

Ejercicios del libro, página 75.

1. Integra:  $D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

**Solución:**  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

2. Integra los siguientes sistemas de EDs

(a)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}y + z \\ \frac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$ , o bien  $D \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

**Sol.:**  $\lambda_{1/2} = \frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{7-2\sqrt{2}}}{2}$ ;  $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 1 \end{cases}$

**Solución:**  $\begin{cases} x(t) = e^t - \frac{t^3}{6} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3 \\ y(t) = e^t + \frac{t^4}{24} - C_1 \frac{t^3}{6} + (1 - C_2) \frac{t^2}{2} - (C_1 + C_3)t + C_4 \end{cases}$

(c)  $D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Halla los valores y vectores

propios, e indica como sería la solución general.

**Solución:**  $\lambda_1 = 1$  (coble con un solo vector propio),  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ .

(g)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 6x + 8y = e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} - x = 0 \end{cases}$

**Solución:**  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (C_1 - \frac{1}{2}e^t) e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (C_2 - \frac{1}{2}e^{-t}) e^{4t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + x \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases}$

**Solución:** Valor propio doble, pero con un solo vector propio.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2(x) \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Las funciones  $c_1(x), c_2(x)$  se obtienen por variación de constantes:

$$c_1(x) = (-9 + 9x - 4x^2)e^x, \quad c_2(x) = (4x - 4)e^x.$$

3. Resuelve por el método de eliminación

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3x - 4y = -3 \\ \ddot{y} + x + y = -5 \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}(e^t - 1)(23(e^{-t} - 1) + 13t(e^{-t} + 1)) \\ x = \frac{1}{4}(e^t - 1)(36(e^{-t} - 1) + 13t(e^{-t} + 1)) \end{cases}$$

**Otros ejercicios.**

1. Resuelve (examen 1er parcial 2006/2007)

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

(a) Matricialmente.

(b) Por el método de reducción

$$\text{Solución: } \begin{cases} x(t) = e^{2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) \\ y(t) = e^{2t}(C_2 \cos(t) - C_1 \sin(t)) \end{cases}$$

2. Resolver el sistema (examen junio 2006/2007)

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 2x - 3y + t \end{cases}$$

**a)** Resuelve primero matricialmente el sistema homogéneo asociado.

**b)** Resuelve el sistema no homogéneo por el método de variación de constantes.

$$\text{Solución: } \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = (C_1 e^{-2t} - \frac{2t+3}{10}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + (C_2 e^{-t} - \frac{t+1}{5}) \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (examen 1er parcial 2007/2008)

$$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 8x + 3y + e^t \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$\text{Solución: } \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = (C_1 - \frac{1}{12}e^{2t}) e^{-t} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} + (C_2 - \frac{1}{6}t) e^t \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \end{Bmatrix}$$