Práctica 2

Solución analítica de problemas de contorno. Ecuación de ondas

2.1. Ecuación de ondas 1D: Vibraciones forzadas de una cuerda finita con extremos móviles

La ecuación de ondas para una cuerda finita sometida a una fuerza exterior y condiciones de contorno no homogéneas (extremos móviles) viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \ , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = \psi_1(t) \ , \quad u(l,t) = \psi_2(t) \ ,$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x) \ .$$

Para resolver este problema se ha visto en teoría que la solución $u(x,t)$ se descompone en dos funciones

$$u(x,t) = U(x,t) + u_3(x,t)$$

donde

$$u_3(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t))$$

y $U(x,t)$ es solución del siguiente problema con (distintas) fuentes pero condiciones de frontera nulas

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x,t) \ , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$(g(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2})$ con las condiciones de contorno

$$U(0,t) = 0 \ , \quad U(l,t) = 0 \ ,$$

y las condiciones iniciales

$$U(x,0) = u(x,0) - u_3(x,0), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u_3}{\partial t}(x,0) \ .$$

Para resolver este segundo problema se ha visto en teoría que la solución $U(x,t)$ se descompone en dos funciones

$$U(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

donde u_1, u_2 tienen condiciones de frontera nulas. $u_1(x,t)$ es solución de la ecuación homogénea (sin fuentes) y condiciones iniciales no nulas dada por

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \ ,$$

con las condiciones de contorno

$$u_1(0,t) = 0 \ , \quad u_1(l,t) = 0 \ ,$$

y las condiciones iniciales

$$u_1(x,0) = U(x,0), \quad u_1'(x,0) = U'(x,0) \ .$$

$\left(u_1' \equiv \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)$. De lo estudiado en teoría, sabemos que

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

e imponiendo las condiciones iniciales obtenemos los coeficientes

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x,0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ B_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^l u_1'(x,0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \ . \end{aligned}$$

$u_2(x,t)$ es solución de la ecuación no homogénea (con fuentes) y condiciones iniciales nulas dada por

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + g(x,t) \ ,$$

con las condiciones de contorno e iniciales nulas

$$\begin{array}{ll} u_2(0,t) = 0\,, & u_2(l,t) = 0 \\ u_2(x,0) = 0\,, & u_2'(x,0) = 0 \ . \end{array}$$

De la teoría sabemos que

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi a} \int_0^t g_n(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right) d\tau \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ ,$$

donde las funciones $g_n(t)$ se obtienen de la descomposición de la función fuente $g(x,t)$

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ ,$$

esto es

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \ .$$

Con todo esto, la solución del problema viene dado por

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t).$$

Resumen: algoritmo de cálculo: Dado el problema

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = & a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \ , \qquad 0 < x < l, \\ u(0,t) & = & \psi_1(t) \ , \qquad u(l,t) = \psi_2(t) \\ u(x,0) & = & \varphi_0(x) \ , \qquad u(x,0) = \varphi_1(x) \ , \end{array}$$

introducimos las constantes, a, l y definimos las funciones: $f(x,t), \psi_1(t), \psi_2(t), \varphi_0(x), \varphi_1(x)$. A continuación, procedemos con el siguiente orden de cálculos

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= \psi_1(t) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
g(x,t) &= f(x,t) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
u_1(x,0) &= u(x,0) - u_3(x,0) \\
u_1'(x,0) &= u'(x,0) - u_3'(x,0) \\
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l u_1(x,0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l u_1'(x,0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
u_1(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
g_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
u_2(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right) d\tau\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)
\end{aligned}$$

2.2. Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel de índice entero, $J_n(z)$, son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) y = 0 \ . \tag{2.1}$$

Estas funciones están implementadas en el Mathematica y se denominan `BesselJ[m,z]`.

Estas funciones son oscilantes y se anulan en muchos puntos (los ceros de las funciones). Los valores para los que se anulan las funciones de Bessel serán imporantes para resolver los problems que nos aparecerán. Como ya vimos en la práctica anterior, para obtener el valor de estos ceros *Mathematica* dispone de una instrucción para su obtención automática. Recordamos que hace falta cargar un paquete

```
In[]:=<< NumericalMath`BesselZeros`
```

La instrucción `BesselJZeros[n,m]` nos da los m primeros zeros de $J_n(x)$. Si queremos obtener los resultados con más dígitos, podemos utilizar el comando `SetPrecision`. Por ejemplo, los 7 primeros zeros de $J_0(x)$ los podemos obtener con 10 dígitos de precisión de la siguiente forma (los ponemos en un vector quellamamos `mu0`)

```
In[]:=mu0=SetPrecision[BesselJZeros[0, 7], 10]
Out[]:={2.404825558, 5.520078110, 8.653727913, 11.79153444,
        14.93091771, 18.07106397, 21.21163663}
```

De este modo podemos ir obteniendo una tabla con los ceros de las funciones de Bessel como la que se muestra en la tabla 2.1.

Cuadro 2.1: Ceros de las funciones de Bessel.

Cero	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

Usando estos ceros podemos comprobar la propiedad de ortogonalidad de estas funciones, que se expresa como

$$\int_0^{r_0} r J_\nu\left(\frac{\mu_{i,\nu}}{r_0}r\right) J_\nu\left(\frac{\mu_{j,\nu}}{r_0}r\right) dr = \delta_{i,j}\frac{r_0^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_{i,\nu}), \tag{2.2}$$

Por otro lado, cualquier función, $f(x)$, definida para $x \in [0,1]$ y que se anule en $x = 1$, $f(1) = 0$, se puede descomponer en una serie de funciones de Bessel

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_\nu(\mu_{n,\nu}x) \tag{2.3}$$

siendo μ_n los ceros de J_ν. Los coeficientes C_n se pueden calcular teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel,

$$C_n = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\mu_{n,\nu})}\int_0^1 f(x)J_\nu(\mu_{n,\nu}x)\,x\,dx. \tag{2.4}$$

2.3. Ecuación de ondas en 2D: Vibración de una membrana circular

Hemos visto que la ecuación que describe la vibración de una membrana circular de radio r_0 viene dada, en coordenadas polares, por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) .$$

Si el problema tiene simetría radial, entonces u no depende de θ. La ecuación se simplifica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) ,$$

y la solución se puede escribir (por separación de variables y superposición de soluciones)

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) R_n(r)$$

donde T_n y R_n son soluciones de las ecuaciones

$$T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0,$$

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \lambda_n R_n = 0. \tag{2.5}$$

La ecuqación (2.5) para $R_n(r)$ se corresponde con la ecuación (2.1) para $m = 0$ y $y(r) = R(\sqrt{\lambda}\, r)$ (donde $y' = \sqrt{\lambda} R'$ y $y'' = \lambda R''$). Como se ha visto en teoría, las soluciones para los distintos valores de n serán: $R_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$. Como estas funciones se tienen que anular en $r = r_0$, esto es $J_0(\sqrt{\lambda_n} r_0) = J_0(\mu_{n,0}) = 0$, donde $\mu_{n,0}$ son los ceros de la función de Bessel $J_0(x)$, entonces, $\lambda_n = \left(\frac{\mu_{n,0}}{r_0}\right)^2$. Teniendo en cuenta las soluciones de estas ecuaciones, vemos que la solución del problema se puede escribir en la forma

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos\left(\frac{a\mu_{n,0}}{r_0} t\right) + G_n \operatorname{sen}\left(\frac{a\mu_{n,0}}{r_0} t\right) \right) J_0\left(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r\right) .$$

Los coeficientes E_n y G_n se obtienen a partir de las condiciones iniciales teniendo en cuenta que

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0\left(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r\right), \qquad u_t(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{a\mu_{n,0}}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r\right),$$

y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel. Para ello, multiplicamos ambas partes de las igualdades por $r\, J_0(\frac{\mu_{n,0}}{r_0}r)$, integramos y utilizamos la propiedad de ortogonalidad (2.2). Con esto obtenemos los coeficientes buscados:

$$
\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_{n,0})}\int_0^{r_0} u(r,0) J_0(\frac{\mu_{n,0}}{r_0}r)\, r\, dr. \\
G_n &= \frac{2}{a\mu_{n,0} r_0 J_1^2(\mu_{n,0})}\int_0^{r_0} u_t(r,0) J_0(\frac{\mu_{n,0}}{r_0}r)\, r\, dr.
\end{aligned}
$$

Utilizando el *Mathematica* podemos visualizar de manera dinámica la evolución. En la práctica anterior vimos como representar una sección transversal de la onda. También es posible realizar una simulación en tres dimensiones utilizando la instrucción:

```
In[]:=Manipulate[RevolutionPlot3D[u[r, t], {r, 0, r0},
   PlotRange -> {{-r0, r0}, {-r0, r0}, {-1, 1}}], {t, 0, 10}]
```

2.4. Ejercicios

1. Obtén la solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha_1}{l}x(l-x) \ , \qquad 0 < x < 5, \\
u(0,t) &= \alpha_2 \sin(3t) \ , \qquad\qquad u(l,t) = 0 \\
u(x,0) &= \alpha_3(Unit(x-2) - Unit(x-3)) \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

   con $Unit(x)$ la función escalón (UnitStep[]). Considerar los siguientes casos para los parámetros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

   a)$(1,0,0)$, **b**)$(0,1,0)$, **c**)$(0,0,1)$.

   Simular la solución con el *Manipulate* para $t \in [0,10]$ para los tres casos, utilizando 2 y 7 autovalores. Indicar cuánto vale $u(2,5)$ en cada uno de los casos.

2. Supongamos que se tiene una cierta membrana homogénea circular de radio r_0 de tal forma que se mueve verticalmetne con velocidad, v_0 Si se para de repente, la membrana empieza a vibrar, siendo la ecuación que describe su movimiento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \ ,$$

   con las condiciones iniciales y de frontera

$$u(r_0,t) = 0 \ , \quad u(r,0) = 0 \ , \quad u_t(r,0) = v_0 \ .$$

   Para $r_0 = 1, v_0 = 1$. obten las soluciones aproximadas al considerar 2 ceros y 7 ceros de la función de Bessel en el desarrollo y

   a) Dibuja con el *Manipulate* las solución obtenida, $u(r,t)$ en dos y en tres dimensiones en el intervalo $t \in [0,10]$.

   b) Si en $r = 0{,}8$ la amplitud llega a $0{,}25$ la membrana se rompe. Dibuja la solución $u(0{,}8,t)$ y encuentra con el *FindRoot* el instante en el que ocurre, utilizando 2 y 7 ceros.