Práctica 1

Conceptos Básicos en la resolución analítica de EDPs de evolución

En esta práctica revisaremos algunas cuestiones relacionadas con la solución mediante funciones analíticas de algunos problemas de ondas y su implementación en el Mathematica, tanto para obtener soluciones aproximadas de estos problemas como para visualizarlos.

1.1. Problema de la cuerda ilimitada

Consideremos la EDP hiperbólica (ecuaciones de ondas) corespondiente a una cuerda ilimitada dada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x).$$

La solución, $u(x,t)$, se ha visto en teoría que viene dada por (solución de d'Alembert):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\hat{x})d\hat{x}. \tag{1.2}$$

El *Mathematica* nos permite resolver este problema y visualizar la evolución de la solución de una manera muy sencilla.

Ejemplo 1.1 *Obtener la solución del problema*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x\, e^{-x^2},$$

y representar la evolución de la solución en el intervalo $x \in [-5,5],\ t \in [0,3]$.

La solución de este problema viene dada por

```
a= 1
u[x_,t_]:= (1/2)Integrate[s*E^(-s^2), {s, x - a*t, x + a*t}]
```

La solución que nos da es

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left(e^{-(t-x)^2} - e^{-(t+x)^2}\right). \tag{1.4}$$

Podemos ahora conocer la solución en cualquier instante y posición y también visualizar la propagación de la onda con la ayuda de la instrucción `Manipulate`

```
Manipulate[Plot[u[x, t],{x,-5,5},PlotRange->{-0.6,0.6}],{t,0,3}]
```

La opción `PlotRange` *se utiliza para fijar el eje vertical y poder ver mejor cómo evoluciona la onda.*

1.2. EDPs hiperbólicas: Separacón de Variables

Los problemas de evolución que consideraremos en esta práctica serán las ecuaciones de ondas (hiperbólicas) en una variable espacial y sobre una región espacial finita. También estudiaremos un problema bidimensional con simetría circular (una membrana circular de radio r_0, en el que la ecuación diferencial depende de t y del radio, pero no del ángulo). Las ecuaciones diferenciales que consideraremos son

$$\begin{aligned}
&\text{(hiperbólica)} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & t>0, \quad & 0 \le x \le l. & (1.5)\\
&\text{(hiperb. radial)} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\,, & t>0, \quad & 0 \le r \le r_0\,.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la ecuación es lineal y utilizando separación de variables, podemos escribir la solución de los problemas en la siguiente forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

($X_n(x)$ se sustituye por $R_n(r)$ en el problema bidimensional con simetía radial). La forma de obtener las funciones $T_n(t)$ y $X_n(x)$ es sustituir en la ecuación diferencial. En la ecuación (1.5) la función $X_n(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

cuya solución general vimos en Ampliación de Matemáticas que era, para $\lambda_n > 0$

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right).$$

Las ecuaciones diferenciales vienen acompañadas de condiciones iniciales y de frontera, las cuales determinan las constantes A_n, B_n y λ_n. Las condiciones de frontera son:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0.$$

Esto es independiente de t y por tanto nos fuerza por un lado a que $X(0) = 0$, e inmediatamente deducimos que $A_n = 0$. La condición de frontera en el extremo derecho nos dará los valores de λ_n válidos para el problema en cuestión (las constantes B_n se absorben dentro de las funciones $T_n(t)$ y se determinarán a partir de las condiciones iniciales). De $X(l) = 0$ tenemos

$$\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, l\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

esto es, $\sqrt{\lambda_n}$ son los ceros en $x = l$ de la función $\sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)$.

Descomposición de funciones

Consideremos una función, $f(x)$ con las mismas condiciones de frontera como las de las ecuaciones anteriors, esto es, $f(0) = 0$ y $f(l) = 0$. Entonces, la función se puede descomponer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\, x\right) . \tag{1.6}$$

Los coeficientes, C_n se pueden obtener teniendo en cuenta las condiciones de ortogonalidad

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}\, x\right)\, dx\ . \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.2 *Obtener los coeficiente C_n para la función $f(x) = x(l - x)$.*

Las integrales para obtener los C_n las podríamos resolver utilizando integración por partes dos veces, pero el Mathematica nos lo puede dar como sigue

```
f[x_]=x(L-x);
c[n_]=(2/L)Integrate[f[x]*Sin[n*Pi*x/L], {x, 0, L}]
```

1.3. Simulaciones de problemas de ondas

A continuación vamos a hacer uso de estas herramientas de *Mathematica* para realizar simulaciones de soluciones de EDPs de evolución hiperbólicas (ondas). Consideremos la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0\ , \quad u(l,t) = 0\ ,$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u'(x,0) = \varphi_1(x)\ ,$$

$\left(u' \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\right)$. De lo estudiado en teoría, se tiene que la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l u'(x,0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \ . \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes A_n y B_n, usamos el Mathematica

```
In[]:= u10[x_]=...;
In[]:= du10[x_]=...;
In[]:= An[n_]=(2/l)Integrate[u10[x]*Sin[n*Pi*x/l],{x,0,l}];
In[]:= Bn[n_]=(2/(n*Pi*a))Integrate[du10[x]*Sin[n*Pi*x/l],{x,0,l}];
```

Una vez tenemos los coeficientes, indicamos cuantos términos del sumatorio queremos considerar y definimos la función

```
In[]:=nau=...
In[]:=u[x_,t_]:=Sum[(An[n]*Cos[n*Pi*a*t/l] +
      Bn[n]*Sin[n*Pi*a*t/l])*Sin[n*Pi*x/l],{n,1,nau}]
```

y podemos dibujar la evolución de la solución utilizando el comando `Manipulate`.

1.4. Funciones de Bessel

En la ecuación radial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \ , \qquad t > 0, \qquad 0 \le r \le r_0 \ ,$$

si consideramos

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) R_n(r)$$

se tiene que R_n tiene que satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \lambda_n R_n = 0. \tag{1.8}$$

La solución de esta ecuación diferencial no se estudió en el curso de Ampliación de Matemáticas. Para eliminar λ_n podemos hacer el cambio de variable independiente, $x = \sqrt{\lambda_n}\, r$ y se convierte en

$$\frac{d^2 R_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR_n}{dx} + R_n = 0. \tag{1.9}$$

Las soluciones se corresponden con una familia de las llamadas funciones de Bessel. Las funciones de Bessel de índice entero, $J_m(x)$, y las funciones de Bessel de segunda especie, $Y_m(x)$, son soluciones independientes de

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \ . \tag{1.10}$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la solución general será

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x).$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias. Sin embargo, como

$$\lim_{x \to 0} Y(x) = \infty$$

y la solución real en el origen toma un valor finito, entonces $C_2 = 0$.

Las funciones $J_m(x)$ están implementadas en el Mathematica y se denominan `BesselJ[m,x]`. Para ver el comportamiento de estas funciones dibujamos $J_0(x), J_1(x), J_3(x)$

```
In[]:= Plot[{BesselJ[0,x],BesselJ[1,x],BesselJ[3,x]},
       {x, 0, 20}, PlotStyle -> {RGBColor[1,0,0],
       RGBColor[0,1,0],RGBColor[0, 0, 1]}]
```

y obtenemos la gráfica mostrada en la figura 1.1.

Observamos que estas funciones se anulan en muchos puntos (los ceros de las funciones). Losvalores para los que se anulan las funciones de Bessel serán imporantes para resolver los problems que nos aparecerán. Para obtener el valor de estos ceros se puede usar la función `FindRoot[ ]`, donde hay que tomar un valor de x cercano al punto de corte.

```
In[]:=FindRoot[BesselJ[0,x],{x, 1}]
Out[]={x->2.40483}
```

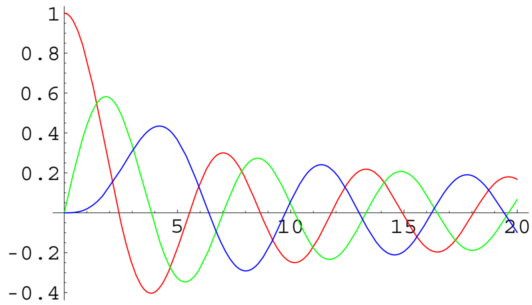

Figura 1.1: Funciones de Bessel de índice entero.

Debido a su imporancia, *Mathematica* dispone de una instrucción para su obtención automática. Para ello hace falta cargar un paquete

```
In[]:=<< NumericalMath‘BesselZeros‘
```

La instrucción `BesselJZeros[n,m]` nos da los m primeros zeros de $J_n(x)$. Si queremos obtener los resultados con más dígitos, podemos utilizar el comando `SetPrecision`. Por ejemplo, los 7 primeros zeros de $J_0(x)$ los podemos obtener con 10 dígitos de precisión de la siguiente forma (los ponemos en un vector quellamamos `mu0`)

```
In[]:=mu0=SetPrecision[BesselJZeros[0, 7], 10]
Out[]:={2.404825558, 5.520078110, 8.653727913, 11.79153444,
        14.93091771, 18.07106397, 21.21163663}
```

Usando estos ceros podemos comprobar la propiedad de ortogonalidad de estas funciones, que se expresa como

$$\int_0^1 x J_0\left(\mu_{i,0} x\right) J_0\left(\mu_{j,0} x\right)\, dx = \delta_{i,j} \frac{1}{2} J_1^2(\mu_{i,0}), \tag{1.11}$$

donde $\mu_{i,0}$ son ceros de J_0, pero no lo son de J_1.

NOTA: esta relación es para $x \in [0,1]$. Si nuestra función depende de r con $r \in [0, r_0]$ los resultados siguen siendo válidos sin más que realizar el cambio de variables $x = \frac{r}{r_0}$, con lo que la relación de ortogonalidad queda:

$$\int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_{i,0}}{r_0} r\right) J_0\left(\frac{\mu_{j,0}}{r_0} r\right)\, dr = \delta_{i,j} \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_{i,0}). \tag{1.12}$$

Por ejemplo,

```
In[]:=NIntegrate[x*BesselJ[0,mu0[[1]]*x]*BesselJ[0,mu0[[2]]*x],
     {x,0,1}]
Out[]=1.51788*10^(-17)
In[]:=NIntegrate[x*BesselJ[0, mu0[[1]]*x]^2, {x, 0, 1}]
      - BesselJ[1, mu0[[1]]]^2/2
Out[]=1.70142*10^(-13)
```

Por otro lado, cualquier función, $f(r)$, definida para $r \in [0, r_0]$ y que se anule en $r = r_0$, $f(r_0) = 0$, se puede descomponer en una serie de funciones de Bessel

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r) \tag{1.13}$$

siendo $\mu_{n,0}$ los ceros de J_0. Los coeficientes C_n se pueden calcular teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel,

$$C_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_{n,0})} \int_0^{r_0} f(r) J_0(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r)\, r\, dr. \tag{1.14}$$

Ejemplo 1.3 *Obtener los coeficdientes C_n para la función $f(r) = (r - r_0)^2$, para $r_0 = 2$.*

```
r0=2;
f[r_]=(r-r0)^2;
C[n_] = (2/(r0*BesselJ[1, mu0[[n]]])^2)*
     Integrate[r*BesselJ[0, mu0[[n]]*r/r0]*u0[r],{r, 0, r0}];
```

Ejercicios. Práctica 1

1. Halla la solución de la cuerda infinita para las condiciones iniciales

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x\, e^{-x^2/2}.$$

   ¿Cuanto vale $u(2,1)$?

2. Considera la solución de la ecuación hiperbólica

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ,$$

   para $a = 2, l = 10$.

   a) Halla los coeficientes a_n para las condiciones iniciales $u(x,0) = x^2(l-x)^2,\ u'(x,0) = 2$.

   b) Halla la simulación con *Manipulate* utilizando 6 autofunciones para $t \in [0,10]$.

   c) Halla $u(1/2,1)$ utilizando 2, 4, 8 y 16 autofunciones.

3. Considera la solución de la ecuación hiperbólica radial

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{a\mu_{n,0}}{r_0} t\right) J_0\left(\frac{\mu_{n,0}}{r_0} r\right).$$

   con condiciones en la frontera, $u(r_0,t) = 0$, y tomando $r_0 = 1,\ a = 1$.

   a) Halla los coeficientes E_n para las condiciones iniciales $u(r,0) = 1-r$.

   b) Halla la simulación con *Manipulate* utilizando 5 autofunciones para $t \in [0,10]$.

   c) Halla $u(1/2,1)$ utilizando 2, 4 y 8 autofunciones.