Práctica 3

Solución analítica de problemas de contorno. Ecuación de difusión

En esta práctica estudiaremos algunos problemas asociados a la ecuación de difusión. En primer lugar resolveremos el problema general de una varilla finita con una fuente calorífica y condiciones de frontera variables. En la segunda parte de la práctica estudiaremos las modificaciones a realizar cuando las condiciones en la frontera dependen también de la derivada de la solución (frontera aislada o con intercambio de calor).

3.1. Varilla finita con fuentes de calor y condiciones de contorno no homogéneas

La ecuación del calor para una varilla finita con fuentes de calor y condiciones de contorno no homogéneas viene dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x,t) \ , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno

$$T(0,t) = f_1(t) \ , \quad T(l,t) = f_2(t) \ ,$$

y la condición inicial

$$T(x,0) = g(x) \ .$$

Para resolver este problema hemos visto que la solución $T(x,t)$ se descompone en dos funciones

$$T(x,t) = u(x,t) + T_3(x,t)$$

donde

$$T_3(x,t) = f_1(t) + \frac{x}{l}(f_2(t) - f_1(t))$$

y $u(x,t)$ es solución del siguiente problema con distinta función fuente pero condiciones de frontera nulas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(x,t) \ , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

($R(x,t) = Q(x,t) - \frac{\partial T_3}{\partial t}$) con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0 \ , \quad u(l,t) = 0 \ ,$$

y la condición inicial

$$u(x,0) = g(x) - T_3(x,0) \ .$$

Para resolver este segundo problema hemos visto que la solución $u(x,t)$ se descompone en dos funciones

$$u(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t)$$

donde T_1, T_2 tienen condiciones de frontera nulas. $T_1(x,t)$ es solución de la ecuación homogénea (sin fuentes) y condiciones iniciales no nulas dadas por

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \ ,$$

con las condiciones de contorno

$$T_1(0,t) = 0 \ , \quad T_1(l,t) = 0 \ ,$$

y la condición inicial

$$T_1(x,0) = u(x,0) \ .$$

De lo estudiado en teoría, sabemos que

$$T_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \ ,$$

e imponiendo la condición inicial obtenemos los coeficientes

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \ .$$

$T_2(x,t)$ es solución de la ecuación no homogénea (con fuentes) y condiciones iniciales nulas dada por

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + R(x,t) \ ,$$

con las condiciones de contorno

$$T_2(0,t) = 0 \ , \quad T_2(l,t) = 0 \ ,$$

y la condición inicial

$$T_2(x,0) = 0 \ .$$

De lo estudiado en teoría, sabemos que

$$T_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t q_n(\tau) \exp\left(- \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau) \right) d\tau \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ ,$$

donde las funciones $q_n(t)$ se obtienen de la función fuente $R(x,t)$

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ ,$$

esto es

$$q_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l R(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \ .$$

Con todo esto, la solución del problema viene dado por

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t).$$

Resumen: algoritmo de cálculo: De igual manera a como se hizo en el tema anterior para el problema de ondas, nos construimos el siguiente algoritmo (se puede obtener fácilmente modificando ligeramente el algoritmo del la práctica anterior).

Definir los parámetros a, l y las funciones $f_1(t), f_2(t), g(x), Q(x,t)$

$$\begin{aligned}
T_3(x,t) &= \dots \\
R(x,t) &= \dots \\
u(x,0) &= \dots \\
a_n &= \dots \\
T_1(x,t) &= \dots \\
q_n(t) &= \dots \\
T_2(x,t) &= \dots \\
T(x,t) &= T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t)
\end{aligned}$$

3.2. Fronteras aisladas

En los problemas de transmisión de calor es interesante estudiar problemas en los que alguno de los extremos del dominio está aislado. Supongamos, por ejemplo, que se quiere estudiar la distribución de temperaturas en una región comprendida en el intervalo $[0, l]$, suponiendo que el extremo situado en $x = l$ está aislado térmicamente. Esta condición se expresa

$$\frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0 \ .$$

Así, veamos cómo se puede analizar el siguiente problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ ,$$

con las condiciones de contorno

$$T(0, t) = 0 \ , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0 \ ,$$

y la condición inicial

$$T(x, 0) = f(x) \ .$$

Para resolver este problema se utiliza el método de separación de variables probando una solución de la forma

$$T(x, t) = X(x)P(t) \ ,$$

con lo que llegamos a la ecuación

$$\frac{1}{a^2}\frac{P'}{P} = \frac{X''}{X} = -\lambda \ .$$

Se tiene

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \tag{3.1}$$

con las condiciones

$$X(0) = 0 \ , \quad X'(l) = 0 \ . \tag{3.2}$$

La solución general de la ecuación (3.1) es de la forma

$$X(x) = A \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \ .$$

Las condiciones de contorno (3.2) implican que

$$A = 0 \ , \quad \sqrt{\lambda} B \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0 \ .$$

Los autovalores son pues

$$\lambda_n = \left(\left(\frac{2n-1}{2} \right) \frac{\pi}{l} \right)^2 \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

y las autofunciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \left(\left(\frac{2n-1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right) \ .$$

Para la parte temporal se tiene la ecuación

$$P_n'(t) + \left(a \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 P_n(t) = 0 \ ,$$

cuya solución es de la forma

$$P_n(t) = a_n \exp \left(- \left(\frac{a(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 t \right) \ .$$

Tenemos pues que la solución del problema viene dada por

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left(- \left(\frac{a(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) \ ,$$

donde los coeficientes a_n se obtienen a partir de la condición inicial

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx \ .$$

3.3. Intercambio de calor en la frontera

En situaciones más realistas se tiene transferencia de calor en los extremos del dominio. En este caso si consideramos el extremo correspondiente a $x = l$, se tendrán que imponer condiciones de la forma

$$hT(l,t) + \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0 \ ,$$

donde h es un coeficiente de transferencia de calor. Veamos cómo se resuelven los problemas de este tipo.

Consideremos el problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ ,$$

con las condiciones de contorno

$$T(0,t) = 0 \ , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = -hT(l,t) \ ,$$

y la condición inicial

$$T(x,0) = f(x) \ .$$

De igual manera que antes, por separación de variables

$$\frac{1}{a^2}\frac{P'}{P} = \frac{X''}{X} = -\lambda \ .$$

se llega a que la solución general para $X(x)$ es

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) \ . \tag{3.3}$$

Las condiciones de contorno son ahora de la forma

$$X(0) = 0 \ , \quad X'(l) = -hX(l) \ .$$

De la condición, $X(0) = 0$ obtenemos $A = 0$ y de la segunda condición se deduce la siguiente ecuación

$$B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = -hB\sin(\sqrt{\lambda}l) \ ,$$

o sea,

$$\tan(\sqrt{\lambda}l) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \ .$$

Tomando $\beta = \sqrt{\lambda}\ l$ esta ecuación se expresa

$$\tan(\beta) = -\frac{\beta}{hl} \ . \tag{3.4}$$

Esto es, para que la función $T(x,t) = P(t)X(x)$ cumpla las condiciones de frontera, éstas deben de imponerse a la función $X(x)$ dada en (3.3), y ello implica que $A = 0$ y λ sólo puede tomar un número discreto de valores, $\lambda_n, \ \ n = 1, 2, \ldots$, tales que sean solución de (3.4).

Si, por ejemplo, dibujamos las curvas $y = \tan(x)$ e $y = -x$, obtenemos la gráfica mostrada en la Figura 3.1

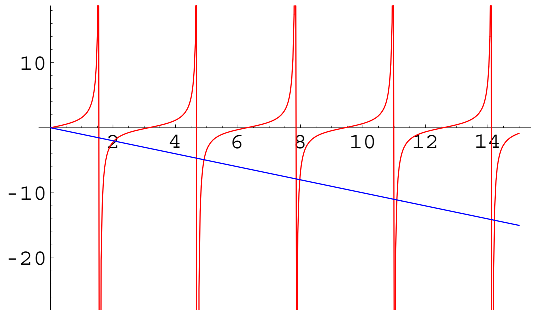

Figura 3.1: Raíces de la ecuación (3.4) para $h = l = 1$.

Observamos que la ecuación (3.4) tiene una sucesión de raíces positivas $\beta_1, \beta_2, \ldots$. Como tenemos que hallarlas numéricamente, necesitamos conocer dónde se encuentran aproximadamente. A partir de la figura vemos que la raíz, β_n se encuentra en el intervalo $[\pi(2n-1)/2, \pi\, n]$, (y cerca del extremo izquierdo del intervalo). Las siguientes instrucciones nos permiten definir un vector cuyas componentes sean estas raíces.

```
resul:=FindRoot[Tan[x]==-x,{x,Pi(2n-1)/2+1/n,Pi(2n-1)/2,Pi*n}]
regla:=Flatten[resul]
bet[n_]=x/. regla;
```

Con el `FindRoot`, el cero n-ésimo lo empezamos a buscar a partir del punto de partida $x = \frac{1}{2}\pi(2n-1) + \frac{1}{n}$ y le decimos que se encuentra dentro del intervalo $\beta_n \in [\frac{1}{2}\pi(2n-1), n\pi]$. Resultados similares se obtienen si dibujamos las curvas $y = \tan(x)$ e $y = -\frac{x}{hl}$ para los correspondientes valores de h y l. Viendo la gráfica, se observa que el número de ceros seguirá siendo el mismo. Habrá una raíz en cada intervalo, $\beta \in [(2n-1)\pi, 2n\pi]$, aunque tomarán valores ligeramente distintos. Los autovalores serán

$$\lambda_n = \left(\frac{\beta_n}{l}\right)^2 .$$

Como funciones espaciales se toman (la constante B se puede absorver dentro de la función $P(t)$)

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_n}{l} x\right) .$$

Se puede comprobar que estas funciones satisfacen una relación de ortogonalidad de la forma

$$\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_n}{l}\, x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_n}{l}\, x\right)\, dx = \delta_{n,m} \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta_n}{l}\, x\right) dx . \qquad (3.5)$$

Para comprobar las reglas de ortogonalidad, podemos definir la función

```
ort[n_,m_]:=NIntegrate[Sin[bet[n]*x]*Sin[bet[m]*x],{x,0,1}]
```

y observar que éstas se cumplen. Para el caso anterior (se corresponde con el caso $h = l = 1$) se tiene, por ejemplo

```
In[]:= ort[1,3]
Out[]= -8.93383*10^(-17)
In[]:= ort[3,3]
Out[]= 0.507733
```

Para la parte temporal se tiene la ecuación

$$P_n'(t) + a^2 \left(\frac{\beta_n}{l}\right)^2 P_n(t) = 0 \ ,$$

cuya solución es de la forma

$$P_n(t) = a_n \exp\left(-\left(\frac{a\beta_n}{l}\right)^2 t\right) \ .$$

Por tanto, lasolución viene dada por

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\left(\frac{a\beta_n}{l}\right)^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_n}{l} x\right) \ ,$$

donde los coeficientes a_n se obtienen a partir de la condición inicial, haciendo uso de la relación de ortogonalidad (3.5).

$$a_n = \frac{1}{\int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta_n}{l} x\right) dx} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta_n}{l} x\right) dx \ . \tag{3.6}$$

3.4. Ejercicios

1. Suponed que un modelo simple para obtener la distribución de temperatura en una habitación de 10 metros de profundidad a la que una de sus paredes le da el Sol es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ , \quad 0 \leq t \leq 24 \ , \quad 0 \leq x \leq 10 \ ,$$

   con las condiciones de contorno

$$T(0,t) = 20 - 5\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \ , \quad T(10,t) = 20 \ ,$$

   y la condición inicial

$$T(x,0) = 20 \ .$$

   a) Dibujar con el *Manipulate* la distribución de temperatura para $t \in [0,100]$ utilizando 10 autofunciones.
   b) Dibujar la variación de temperatura en $x = 8$ y $t \in [0,100]$.
   c) Hallar $T(5,4)$ con 15 autofunciones. Suponiendo que éste es el valor exacto, hallar el error absoluto cometido al calcular este valor con 2 y con 6 autofunciones.

2. Dado el problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ , \quad 0 \leq x \leq 10 \ , \quad t > 0 \ ,$$

   con las condiciones de contorno

$$T(0,t) = 0 \ , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(10,t) = -0{,}2T(10,t) \ ,$$

   y la condición inicial

$$T(x,0) = 4x - \frac{3}{10}x^2 \ .$$

   a) Comprobad que se satisface la relacin de ortogonalidad (3.5) para los 3 primeros autovalores (para los valores de h y l del problema).
   b) Dibujad la distribucin de temperatura para $t \in [0,200]$.