

Práctica 5

Métodos Numéricos para EDOs: Parte 2

Esta práctica es continuación de la Práctica 4, y haremos uso de los ficheros realizados en la misma. Como siguiente paso consideramos algunos de los métodos numéricos más utilizados para resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $y \in \mathbb{R}^p$.

5.1. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son esquemas que hacen uso de la evaluación de f en uno o varios puntos auxiliares, elegidos adecuadamente, de forma que el desarrollo en serie que se obtiene se ajuste al desarrollo de Taylor con una aproximación mejor que la del método de Euler. En realidad, el método de Euler podría considerarse también como un método RK de orden 1.

Los métodos RK se denominan de un paso porque son algoritmos que generan la aproximación y_{i+1} a partir de y_i , y por tanto éste se puede iniciar a partir de las condiciones iniciales, tomando $y_0 = y(t_0)$. Algunos de estos métodos explícitos (de órdenes bajos) más conocidos son:

Método del punto medio: Es un método RK de orden 2 dado por el

esquema

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \right) .$$

Este método se puede reescribir de forma más adecuada para poderse programar en un ordenador como sigue

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2), \\ y_{i+1} &= y_i + hk_2 . \end{aligned}$$

Como vemos, el método necesita evaluar la función f dos veces en cada paso de integración, por lo que requiere de más operaciones que en el caso del método de Euler. Por otro lado, este coste adicional se compensa porque el método suele ser bastante más preciso. Tiene un error de truncamiento $O(h^3)$ y un error global $O(h^2)$.

Método de Euler modificado. Viene dado por el algoritmo

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + h, y_i + hk_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \end{aligned}$$

que también requiere de dos evaluaciones de la función f por paso y tiene un error de truncamiento $O(h^3)$ y un error global $O(h^2)$.

Método de Heun

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + 2h/3, y_i + 2k_1/3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2), \end{aligned}$$

que tiene un error de truncamiento $O(h^3)$ y un error global $O(h^2)$.

Se pueden obtener métodos de Runge-Kutta de orden superior de una forma análoga a la desarrollada para los métodos de orden 2.

Método estándar Runge-Kutta de orden 4. Es posiblemente el método Runge-Kutta más conocido y utilizado porque mantiene un buen balance entre el coste del método y la precisión que se consigue con el mismo. Es de orden 4 y requiere de 4 evaluaciones por paso. El método viene dado por:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2), \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + hk_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

en el que el error de truncamiento es $O(h^5)$ y el error global del método es $O(h^4)$.

Ejemplo Resolver con el método RK de orden 4 el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (modelo de Lotka-Volterra de la Práctica 4)

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= c(1 - z), & c(0) &= 4 \\ \frac{dz}{dt} &= z(c - 2), & z(0) &= 1, \end{aligned}$$

para $t \in [0, 100]$. Recordamos que el sistema tiene la constante de integración: $I(c, z) = z - \log(z) + c - 2 \log(c)$.

A continuación nos construimos un programa en el que ilustramos cómo se puede implementar el método RK de orden 4. Lo llamaremos **EjemploRK4.m**.

```

                                EjemploRK4.m
%                                y' = f(t,y)
% Método Runge-Kutta-4 standard de 4 etapas y de orden 4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global cont
cont = 0;
% Tiempo inicial, final y número de divisiones
t0=0; tf=100; Npasos = 500;
% Tamaño del paso de integración
h = (tf-t0)/Npasos;
% Condiciones iniciales
y = [4 ; 1];
% R4 almacena las soluciones obtenidas en cada instante
R4 = [t0 y' eps];
% Magnitud conservada
I0 = y(1) - 2*log(y(1)) + y(2) - log(y(2));
t = t0;
for i2 = 1:Npasos;
    t1 = t + h/2; t2 = t + h/2; t3 = t + h;
    %%% Metodo RK-4 estandar %%%%%%%%%%%
    K1 = fVola(t,y);
    K2 = fVola(t1,y+h*K1/2);
    K3 = fVola(t2,y+h*K2/2);
    K4 = fVola(t3,y+h*K3);
    y = y + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)*h/6;
    %%%%%%%%%%%
    t = t +h;

```

```

    In = y(1) - 2*log(y(1)) + y(2) - log(y(2));
    lerror = log10(abs(In-I0))
    R4 = [R4 ; t y' lerror];
end
figure(1)
hold on
plot(R4(:,2),R4(:,3),'*')
figure(2)
hold on
plot(log10(R4(:,1)),R4(:,4),'*')

```

5.2. Métodos multipaso

Los métodos de Euler y de Runge-Kutta que se han expuesto son métodos de un paso. Esto es, para calcular la aproximación y_{i+1} de $y(t_{i+1})$, hacen uso solamente de la aproximación y_i . Se puede mejorar el funcionamiento de los métodos si al calcular la aproximación y_{i+1} , se utilizan otras aproximaciones, $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$, calculadas previamente. Los métodos que hacen uso de estas aproximaciones se llaman *métodos multipaso*.

En el estudio de estos métodos consideraremos que los instantes t_j están igualmente espaciados, con un paso temporal h , esto es, $t_j = t_0 + jh$. Se distinguirán dos tipos de métodos: explícitos e implícitos. Los *métodos explícitos* calculan y_{i+1} haciendo uso de $f(t_i, y_i)$ así como de la función f evaluada en la solución correspondiente a instantes anteriores. Los métodos multipaso explícitos se llaman también métodos de *Adams-Bashforth*. Algunos de estos métodos son:

Método de Adams-Bashforth de dos pasos

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} (3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})) .
 \end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^3)$.

Método de Adams-Bashforth de tres pasos

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{12} (23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2}))
 \end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^4)$.

Método de Adams-Bashforth de cuatro pasos

$$\begin{aligned}y_0 &= \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \quad y_3 = \alpha_3, \\y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24} (55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) \\&\quad - 9f(t_{i-3}, y_{i-3})) .\end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^5)$.

A los métodos multipaso implícitos se les llama métodos de *Adams-Moulton*. Para el cálculo de y_{i+1} , estos métodos hacen uso de $f(t_{i+1}, y_{i+1})$. Algunos de estos métodos son los siguientes:

Método de Adams-Moulton de un paso

$$\begin{aligned}y_0 &= \alpha_0, \\y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} (f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_i, y_i)) .\end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^3)$. Este método es conocido como el método trapezoidal, aunque se corresponde también con un método RK implícito de orden 2.

Método de Adams-Moulton de tres pasos

$$\begin{aligned}y_0 &= \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \\y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24} (9f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(t_i, y_i) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_{i-2}, y_{i-2}))\end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^5)$.

Método de Adams-Moulton de cuatro pasos

$$\begin{aligned}y_0 &= \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \quad y_3 = \alpha_3, \\y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{720} (251f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 646f(t_i, y_i) - 264f(t_{i-1}, y_{i-1}) \\&\quad + 106f(t_{i-2}, y_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, y_{i-3})) .\end{aligned}$$

que tiene un error local $O(h^6)$.

En la práctica, los métodos multipaso implícitos no se usan en solitario, más bien se utilizan para mejorar las aproximaciones obtenidas por los métodos explícitos. La combinación de una técnica explícita con una implícita se llama método de predicción y corrección o método predictor-corrector.

Veamos cómo construir un método predictor-corrector, en el que los primeros pasos los realizamos utilizando un método RK de los estudiados en la sección anterior. En concreto, mostramos el método de Adams-Moulton de 3 pasos donde el valor de y_{i+1} en $f(t_{i+1}, y_{i+1})$ (que es el que lo hace implícito) se aproxima por el valor obtenido con el método de Adams-Bashforth de 3 pasos.

```

                                EjemploA-B-M4.m
%                               y' = f(t,y)
% Método Adamas-Moulton de 3 pasos y de orden 4
% Se inicializa con el método RK4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global cont
cont = 0;
% Tiempo inicial, final y número de divisiones
t0=0; tf=10; Npasos = 300;
% Tamaño del paso de integración
h = (tf-t0)/Npasos;
% Condiciones iniciales
y = [4 ; 1];
% R4 almacena las soluciones obtenidas en cada instante
R4 = [t y' eps];
% Magnitud conservada
I0 = y(1) - 2*log(y(1)) + y(2) - log(y(2));
t = t0;
for i2 = 1:2;
    t1 = t + h/2;  t2 = t + h/2;  t3 = t + h;
    %%% Metodo RK-4 estandar %%%%%%%%%%%
    K1 = fVolt(t,y);
    K2 = fVolt(t1,y+h*K1/2);
    K3 = fVolt(t2,y+h*K2/2);
    K4 = fVolt(t3,y+h*K3);
    y = y + ((K1 + 2*(K2 + K3) + K4)*h/6);
    %%%%%%%%%%%
    t = t + h;
    R4 = [R4 ; t y' eps];
end
% Predictor con el Adams-Bashforth de 3 pasos
y0 = R4(1,2:3)';    f0 = fVolt(t0,y0);
y1 = R4(2,2:3)';    f1 = fVolt(t0+h,y1);
y2 = R4(3,2:3)';    f2 = fVolt(t0+2*h,y2);

```

```

for i3 = 3:Npasos;
    y2p = y2 + h*(23*f2 - 16*f1 + 5*f0)/12;      %Predictor
    f2p = fVolt(t,y2p);
    y2 = y2 + h*(9*f2p + 19*f2 - 5*f1 + f0)/24; %Corrector
    t = t + h;
    f0 = f1; f1 = f2; f2= fVolt(t,y2);
    In = y2(1) - 2*log(y2(1)) + y2(2) - log(y2(2));
    lerror = log10(abs(In-I0))
    R4 = [R4 ; t y2' lerror];
end
figure(1)
hold on
plot(R4(:,2),R4(:,3),'r*','MarkerSize',4')
figure(2)
hold on
plot(log10(R4(:,1)),R4(:,4),'b*','MarkerSize',4')

```

Ejercicios. Práctica 5

Considera el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} x' = v_x \\ v_x' = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ y' = v_y \\ v_y' = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

que sirve para describir la trayectoria de un satélite (en caso de ser perfectamente esférica). El sistema tiene la siguiente magnitud conservada (la energía):

$$H = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (5.2)$$

donde $v_x = x'$, $v_y = y'$. Tomando como condiciones iniciales

$$x = 1 - e, \quad y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = \sqrt{(1 + e)/(1 - e)}$$

obtenemos una trayectoria cerrada elíptica con excentricidad, e , y de periodo $T = 2\pi$. Tomar $e = 0,5$ e integrar el sistema para $t \in [0, 20]$.

- a)** Construir dos ficheros que utilicen el método Runge-Kutta de orden 4 y el método de Heun. Para ello puedes modificar el programa EjemploRK4.m y cambiar el nombre adecuadamente.

b) Integra el sistema utilizando los siguientes pasos de integración: $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ para el método de Heun, y $h = \frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}$ para el otro, indicando cómo disminuye el error.
- a)** Adaptar el método multipaso al problema del satélite.

b) Modificar el programa para que utilice el método predictor-corrector que utiliza el método de Adams-Bashforth y el de Adams-Moulton, ambos de cuatro pasos.